Une remarque sur une classe de fonctions exponentielles du calcul opérationnel

par

L. WŁODARSKI (Łódź).

J. Mikusiński[1]) a remarqué que, dans l'étude des équations aux dérivées partielles linéaires aux coefficients constants, les fonctions exponentielles $e^{-s^{\alpha}\lambda}$, où s est l'opérateur différentiel, jouent un rôle fondamental. Lorsque $0<\alpha<1$, la fonction originale correspondante se laisse représenter sous la forme

$$f(t,\lambda;\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\exp(zt-z^{\alpha}\lambda)\,dz \qquad (\lambda,t>0).$$

J. Mikusiński a montré que la fonction f est continue et réelle pour tout $0<\alpha<1$ et λ, $t>0$. Nous montrerons qu'elle est *non-négative*. Ce fait se laisse déduire du théorème suivant, dû à E. L. Post[2]):

Si la fonction $f(t)$ est continue pour $t>0$, et l'intégrale

$$F(z)=\int_{0}^{\infty}e^{-zt}f(t)\,dt \tag{1}$$

converge pour $R(z)>x_0$, on a

$$f(t)=\lim_{k\to\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}F^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right). \tag{2}$$

En effet, si α et λ sont fixés $(0<\alpha<1)$, la fonction $f(t,\lambda;\alpha)$ est bornée:

$$f(t,\lambda;\alpha)\leqslant\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-i\infty}^{+i\infty}\exp[-\lambda R(z^{\alpha})]\,dz\right|=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\exp\left(-\lambda r^{\alpha}\cos\frac{\pi}{2}\alpha\right)dr;$$

[1]) J. G.-Mikusiński, *Sur les fonctions exponentielles du calcul opératoire*, Studia Mathematica 12 (1951), p. 208 - 224.

[2]) E. L. Post, *Generalized differentiation*, Trans. Amer. Math. Soc. 32 (1930), p. 723 - 781.

l'intégrale (1) est, pour cette fonction, convergente dans le demi-plan $R(z)>0$, et l'on peut appliquer la formule (2). Dans le cas considéré, on a

$$F(z)=\exp(-z^{\alpha}\lambda)>0,\qquad -F'(z)=\alpha\lambda z^{\alpha-1}F(z)>0\quad\text{pour } z \text{ positif}$$

et, généralement,

$$(-1)^{k+1}F^{(k+1)}(z)$$
$$=\alpha\lambda\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(k-n-\alpha)(-1)^{n}z^{\alpha+n-(k+1)}F^{(n)}(z)>0$$

pour $z>0$ et $k=1,2,\ldots$, où le symbole

$$(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(k-n-\alpha)$$

est à remplacer par 1 lorsque $n=k$.

En vertu de (2), il s'ensuit que $f\geqslant 0$ pour $t>0$, c. q. f. d.

(Reçu par la Rédaction le 16. 6. 1952)

PAŃSTWOWY INSTYTUT MATEMATYCZNY