Sur les espaces métriques linéaires (II)

par

S. MAZUR (Warszawa) et W. ORLICZ (Poznań).

§ 2.

2. Soit X un espace linéaire avec une pseudonorme homogène $|x|$[1]. Nous appelons une fonctionnelle additive $\xi(x)$ définie dans X *fonctionnelle linéaire avec la pseudonorme* $|x|$ lorsque

$$|x_n - x_0| \to 0 \quad \text{entraîne} \quad \xi(x_n) \to \xi(x_0).$$

---

[1]) Les termes employés sans définition sont ceux du § 1 de ce mémoire. Il a paru dans Studia Mathematica 10 (1948), p. 184-208. Les numéros cités qui commencent par le chiffre 1 en indiquent les lieux cités ici.

Les deux §§, dont la publication s'est retardée de tant d'années (cf. le renvoi [1]) au § 1, p. 184), ont plusieurs points de tangence avec des travaux plus récents sur les cônes dans les spaces linéaires et sur les espaces topologiques linéaires. Parmi de nombreux travaux de ce domaine, les suivants sont à noter en premier lieu:

Н. Ахиезер и М. Крейн, *О некоторых вопросах теории моментов* (N. Akhiezer et M. Krein, *Sur quelques problèmes de la théorie des moments*), Kharkov 1938.

М. Г. Крейн и М. А. Рутман, *Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха,* Успехи математических наук (M. G. Krein et M. A. Rutman, *Opérateurs linéaires qui laissent invariant un cône dans l'espace de Banach,* Uspiehi Matiematitcheskih Nauk) III (1) (23), Moscou 1948, p. 1-95.

J. Dieudonné et L. Schwartz, *La dualité dans les espaces* (F) *et* (LF), Annales de l'Institut Fourier 1 (1950), p. 61-101.

G. Köthe, *Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommener Räume,* Mathematische Zeitschrift 51 (1948), p. 317-345.

Nos recherches sur les cônes dans les espaces B_0 et leurs applications à la théorie des inégalités datent de 1942 et 1943; nous y avons tenu compte de la monographie précitée d'Akhiezer et Krein. La théorie des cônes n'y est d'ailleurs développée, pas plus que dans la monographie de Krein et Rutman, que pour les espaces de Banach. Nous n'avons pas trouvé dans la littérature qui nous a été accessible la théorie de la solubilité des inégalités dans les espaces B_0, qui est l'un des principaux résultats de notre mémoire.

$\xi(x)$ étant une fonctionnelle linéaire, il existe en vertu de 1.511 (en y posant $|x|^* = |\xi(x)|$ et $|x|_0 = |x|$) un nombre N tel que

$$|\xi(x)| \leqslant N|x| \quad \text{pour tout} \quad x \in X;$$

le plus petit N satisfaisant à cette condition sera dit *norme de la fonctionnelle* ξ *avec la pseudonorme* $|x|$ et désigné par $|\xi|_X$ ou par $|\xi|$ tout court.

Il est évident que, réciproquement, toute fonctionnelle additive $\xi(x)$ qui satisfait à cette condition pour un nombre N est une fonctionnelle linéaire avec la pseudonorme $|x|$.

Le théorème de Banach et Hahn sur le prolongement des fonctionnelles linéaires subsiste lorsque la norme est remplacée par une pseudonorme homogène. Il en résulte en particulier l'existence, pour tout $x_0 \in X$, d'une fonctionnelle linéaire $\xi(x)$ avec la pseudonorme $|x|$ telle que $\xi(x_0) = |x_0|$ et $|\xi| \leqslant 1$.

L'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires avec la pseudonorme $|x|$ sera désigné par $\Xi(|x|)$ ou par Ξ tout court. L'ensemble $\Xi(|x|)$ constitue un espace B en y entendant de la manière usuelle l'addition des fonctionnelles, de même que leur multiplication par les nombres réels, et en définissant la norme d'une fonctionnelle $\xi(x)$, en tant qu'élément de $\Xi(|x|)$, comme égale à $|\xi|$.

2.1. *Si* $|x|^*$ *et* $|x|_0$ *sont des pseudonormes homogènes dans* X, *la condition nécessaire et suffisante pour que toutes les fonctionnelles qui sont linéaires avec la pseudonorme* $|x|^*$ *le soient avec la pseudonorme* $|x|_0$ *est l'existence d'un nombre* N *tel que*

$$|x|^* \leqslant N|x|_0 \quad \textit{pour tout} \quad x \in X.$$

La suffisance de la condition étant évidente, nous n'en démontrons ici que la nécessité.

Soit en effet $\Xi_k(|x|^*)$, où $k = 1, 2, \ldots$, l'ensemble de tous les $\xi \in \Xi(|x|^*)$ pour lesquels $|\xi|_0 \leqslant k$. C'est un ensemble fermé et l'on a

$$\Xi(|x|^*) = \sum_{k=1}^{\infty} \Xi_k(|x|^*).$$

Il existe donc un k tel que l'ensemble $\Xi_k(|x|^*)$ contient une sphère. Soit r son rayon. En posant $N = 2k/r$, on a

$$|\xi|_0 \leqslant N \quad \text{pour} \quad |\xi|^* \leqslant 1.$$

Quel que soit $x_0 \in X$, il existe une fonctionnelle $\xi_0 \in \Xi(|x|^*)$ telle que $\xi_0(x_0) = |x_0|^*$ et $|\xi_0|^* \leqslant 1$. Il vient $|x_0|^* = \xi_0(x_0) \leqslant |\xi_0|_0 \cdot |x_0|_0 \leqslant N|x_0|_0$.

2.2. Soit X un espace B_0^* avec la norme $|x|$. Admettons qu'une suite $\{|x|_k\}$ de pseudonormes homogènes y est fixée, telle que

$$(*) \qquad |x_n| \to 0 \quad \text{équivaut à} \quad |x_n|_k \to 0 \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Nous disons qu'une fonctionnelle linéaire $\xi(x)$ définie dans X est *d'ordre m* si elle est linéaire avec la pseudonorme

$$|x|_m^* = \sup\left(|x|_1, |x|_2, \ldots, |x|_m\right).$$

2.21. *Toute fonctionnelle linéaire définie dans l'espace* X *est d'un ordre* m.

C'est une conséquence de 1.51 en y posant $|x|^* = |\xi(x)|$.

2.22. *S'il existe un nombre* m *tel que toutes les fonctionnelles linéaires définies dans l'espace* X *sont d'ordre* m, *l'espace* X *est isomorphe à un espace* B^*.

En effet, toute fonctionnelle définie dans X et qui est linéaire avec la pseudonorme $|x|_p^* = \sup\left(|x|_1, |x|_2, \ldots, |x|_p\right)$ l'est aussi avec la pseudonorme $|x|_0 = \sup\left(|x|_1, |x|_2, \ldots, |x|_m\right)$. Il existe donc, en vertu de 2.1, un nombre N_p pour lequel $|x|_p^* \leqslant N_p|x|_0$. Reste à appliquer le critérium 1.52.

2.23. *Quelle que soit la fonctionnelle linéaire* $\xi(x)$ *d'ordre* m, *définie dans l'espace* X, *il existe des fonctionnelles* $\xi_1(x), \xi_2(x), \ldots, \xi_m(x)$, *linéaires avec les pseudonormes* $|x|_1, |x|_2, \ldots, |x|_m$ *respectivement, telles que*

$$\xi(x) = \xi_1(x) + \xi_2(x) + \ldots + \xi_m(x)$$

et dont les normes satisfont à la condition

$$|\xi|_m = |\xi_1| + |\xi_2| + \ldots + |\xi_m|,$$

où $|\xi|_m$ *est la norme de* ξ *avec la pseudonorme* $|x|_m^*$ *et* $|\xi_i|$ *est celle de* ξ_i *avec la pseudonorme* $|x|_i$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, m$.

Si une fonctionnelle $\xi(x)$ *est représentable dans cette forme, elle est d'ordre* m *et*

$$|\xi|_m \leqslant |\xi_1| + |\xi_2| + \ldots + |\xi_m|.$$

La démonstration de la seconde partie du théorème étant banale, nous ne démontrons ici que la première.

Soit X_i l'espace X avec la pseudonorme $|x|_i$ (c'est donc un espace linéaire pseudonormé). Considérons le produit cartésien

$$Y = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m$$

avec les opérations définies comme d'habitude et avec la pseudonorme

$$|y|^0 = \sup\left(|x_1|_1, |x_2|_2, \ldots, |x_m|_m\right)$$

pour $y = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \epsilon Y$. Il est facile de voir que toute fonctionnelle $\eta(y)$ définie dans l'espace Y et linéaire avec la pseudonorme $|y|^0$ se laisse représenter dans la forme

$$\eta(y) = \xi_1(x_1) + \xi_2(x_2) + \ldots + \xi_m(x_m),$$

où $\xi_i(x)$ est une fonctionnelle linéaire dans X avec la pseudonorme $|x|_i$ et

$$|\eta| = |\xi_1| + |\xi_2| + \ldots + |\xi_m|.$$

Toute fonctionnelle $\xi(x)$ linéaire dans X avec la pseudonorme $|x|_m^*$ définit une fonctionnelle $\eta(y) = \xi(x)$ linéaire avec la pseudonorme $|y|^0$ dans un sous-espace linéaire $Y_0 \subset Y$ composé d'éléments de la forme $(x, x, \ldots, x)$, et l'on a $|\eta|_{Y_0} = |\xi|_m$. En prolongeant la fonctionnelle $\eta(y)$ à une fonctionnelle linéaire dans le produit Y tout entier sans changer la norme $|\eta|_{Y_0}$ et en représentant la fonctionnelle $\eta(y)$ dans la forme qui précède, on parvient à la forme de la fonctionnelle $\xi(x)$ qu'il s'agissait d'établir et à l'égalité annoncée pour sa norme $|\xi|_m$.

2.3. X étant un espace F^* avec la norme $|x|$, nous disons qu'une suite $\{x_n\}$ de ses éléments *converge faiblement (converge faiblement vers l'élément x_0)* lorsque pour toute fonctionnelle linéaire $\xi(x)$ définie dans X la suite des valeurs $\{\xi(x_n)\}$ converge (converge vers la valeur $\xi(x_0)$).

2.31. *Pour qu'un espace F^* soit un espace B_0^*, il faut et il suffit que toute suite faiblement convergente (faiblement convergente vers un élément) de ses éléments soit bornée.*

La condition est nécessaire. Soient en effet: $\{x_n\}$ une suite d'éléments de l'espace considéré, $\{t_n\}$ une suite de nombres réels convergeant vers 0 et $\{|x|_k\}$ une suite de pseudonormes homogènes dans cet espace, assujettie à $(*)$.

Fixons un indice p et posons $|x|_p^* = \sup\left(|x|_1, |x|_2, \ldots, |x|_p\right)$. Les fonctionnelles linéaires $\Phi_n(\xi) = \xi(\sqrt{|t_n|}\,x_n)$ forment dans l'espace $\Xi(|x|_p^*)$ une suite convergente vers 0. En vertu d'un théorème connu, il existe donc un nombre N_p pour lequel $|\xi(\sqrt{|t_n|}\,x_n)| \leqslant N_p\,|\xi|^*$. En choisissant $\xi_n \epsilon \Xi(|x|^*)$ de façon à avoir

$$|\xi_n|^* \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \xi_n(\sqrt{|t_n|}\,x_n) = |\sqrt{|t_n|}\,x_n|_p^*,$$

il vient $|t_n x_n|_p^* \leqslant N_p \sqrt{|t_n|} \to 0$, d'où $t_n x_n \to 0$.

La condition est suffisante. Soit, en effet, Ξ_k l'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires $\xi(x)$ définies dans l'espace considéré et telles que $|\xi(x)| \leqslant 1$ pour $|x| \leqslant 1/k$. Il est facile de voir que les fonctionnelles $|x|_k = \sup|\xi(x)|$, où $\xi \epsilon \Xi_k$ et $k = 1, 2, \ldots$, sont des pseudonormes homogènes dans cet espace. Soit $|x_n| \to 0$. Il existe des nombres $t_n > 0$ tels que $t_n \to \infty$ et $|t_n x_n| \to 0$. On a donc $|t_n x_n| \leqslant 1/k$, d'où $|t_n x_n|_k \leqslant 1$ pour n suffisamment grands; par conséquent $|x_n|_k \to 0$ pour tout $k = 1, 2, \ldots$ Réciproquement, si $|x_n|_k \to 0$ pour tout $k = 1, 2, \ldots$, on n'a qu'à choisir les nombres $t_n > 0$ de façon que $t_n \to \infty$ et $|t_n x_n|_k \to 0$, pour avoir $\xi(t_n x_n) \to 0$ quel que soit $\xi \epsilon \Xi$; par conséquent, la suite $\{t_n x_n\}$ converge faiblement vers 0 et comme elle est bornée par hypothèse, il vient $|x_n| \to 0$.

2.32. *Tout espace B_0^* séparable est isomorphe à un sous-espace d'un espace B_0 séparable universel, à savoir de l'espace $C(-\infty, +\infty)$ de toutes les fonctions continues dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$* [2].

En effet, X étant un espace B_0^* séparable avec la norme $|x|$, soit $\{|x|_k\}$ une suite de pseudonormes homogènes assujetties à $(*)$. Pour tout k fixe, l'espace $X(|x|_k)$ entendu au sens de 1.42 est un espace B^* séparable; en vertu d'un théorème connu[3], il est donc isomorphe à un sous-espace linéaire Y_k de l'espace C de toutes les fonctions continues, définies sur le segment $\langle 0, 1\rangle$. Pour tout $x \epsilon X$, désignons par y_k l'élément de Y_k qui vient correspondre par cette isomorphie à l'élément $(x)_k \epsilon X(|x|_k)$ et considérons la fonction

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \leqslant 0, \\ y_k(t - 2k + 1) & \text{pour } 2k - 1 \leqslant t \leqslant 2k \text{ où } k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

[2] L'existence d'un espace séparable universel contenant des parties équivalentes à tout espace B_0 séparable est un problème ouvert.

[3] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Warszawa 1932, p. 185-187.

interpolée linéairement dans les intervalles $(2k-2, 2k-1)$. Alors $U(x)=y$ transforme X par isomorphie en un sous-espace linéaire d'un espace B_0, à savoir de $C(-\infty, +\infty)$.

2.33. Nous allons établir à présent la forme générale des fonctionnelles linéaires d'ordre m dans chacun des exemples d'espaces B_0 envisagés dans 1.3 et y déterminer la norme $|\xi|_m$ de chaque fonctionnelle ξ linéaire avec la pseudonorme

$$|x|_m^* = \sup(|x|_1, |x|_2, \dots, |x|_m).$$

Ad 1.31. $\xi_m(x_m)$ étant une fonctionnelle linéaire dans X_m, la fonctionnelle $\xi(x)=\xi_m(x)$ pour $x\epsilon X\subset X_m$ est linéaire d'ordre m dans X; réciproquement, si une fonctionnelle $\xi(x)$ est linéaire d'ordre m dans X, elle est linéaire dans le sous-espace linéaire X de X_m et il existe par conséquent, en vertu du théorème de Hahn et Banach, une fonctionnelle $\xi_m(x_m)$ linéaire dans X_m, telle que $\xi(x)=\xi_m(x)$ pour $x\epsilon X$ et que

$$|\xi|_m = \sup \xi_m(x) \quad \text{pour les} \quad x\epsilon X \quad \text{pour lesquels} \quad |x|_m^* \leqslant 1.$$

Ad 1.311. On a

$$\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n a_{mn} t_n \quad \text{pour} \quad x=\{t_n\}$$

où $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|<\infty$, et

$$|\xi|_m = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| a_{mn} b_{mn}$$

où

$$b_{mn} = \inf\left(\frac{1}{a_{1n}}, \frac{1}{a_{2n}}, \dots, \frac{1}{a_{mn}}\right).$$

Ad 1.312. On a

$$\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n t_n \quad \text{pour} \quad x=\{t_n\}$$

où $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^{p_m'}<\infty$ et $p_m'=\dfrac{p_m}{p_m-1}$.

On voit aisément que $|\xi|_m=\sup\xi(x)$ dans l'ensemble de tous les $x\epsilon X$ pour lesquels

$$\sum_{n=1}^{\infty}|t_n|^{p_m}\leqslant 1.$$

Il en résulte que

$$|\xi|_m = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^{p_m'}\right)^{1/p_m'}.$$

Ad 1.313. On a

$$\xi(x) = \int_0^1 \alpha(t)x(t)\,dt \quad \text{pour} \quad x=x(t)$$

où $\int_0^1 |\alpha(t)|^{p_m'}\,dt<\infty$ et $p_m'=\dfrac{p_m}{p_m-1}$.

On voit comme précédemment que $|\xi|_m=\sup\xi(x)$ dans l'ensemble des $x\epsilon X$ pour lesquels $\int_0^1 |x(t)|^{p_m}\,dt\leqslant 1$, d'où

$$|\xi|_m = \left(\int_0^1 |\alpha(t)|^{p_m'}\,dt\right)^{1/p_m'}.$$

Ad 1.314. On a

$$\xi(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k x^{(k)}(0) + \int_0^1 x^{(m)}(t)\,d\alpha(t) \quad \text{pour} \quad x=x(t),$$

où $\alpha(t)$ est une fonction à variation bornée, continue du côté droit et telle que $\alpha(0)=0$.

Soit $|\xi|_m^0$ la norme de la fonctionnelle ξ avec la pseudonorme

$$|x|^0 = \sup\left(|x(0)|, |x'(0)|, \dots, |x^{(m-1)}(0)|, \sup_t |x^{(m)}(t)|\right).$$

On a trivialement

$$|\xi|_m^0 \leqslant \sum_{k=0}^{m-1}|\alpha_k| + \operatorname*{var}_t \alpha(t);$$

nous allons montrer que l'on a ici le signe $=$.

Posons en effet $\varepsilon_k=\operatorname{sign}\alpha_k$ et choisissons, pour $\varepsilon>0$ donné, un polynôme $w(t)$ de façon à avoir

$$w^{(k)}(0)=0 \quad \text{pour} \quad k=0,1,\dots,m-1,$$

$$|w^{(m)}(t)|\leqslant 1 \quad \text{pour} \quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

$$\int_0^1 w^{(m)}(t)\,d\alpha(t) > \operatorname*{var}_t \alpha(t)-\varepsilon.$$

On a alors pour

$$x(t)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\varepsilon_k}{k!}t_k+w(t)$$

les relations

$$\xi(x)>\sum_{k=0}^{m-1}|a_k|+\operatorname{var}a(t)-\varepsilon \quad \text{et} \quad |x|^0\leqslant 1.$$

Il est facile de voir que $|x|^0\leqslant|x|_m^*\leqslant e|x|^0$, d'où

$$|\xi|_m\leqslant|\xi|_m^0\leqslant e|\xi|_m.$$

Ad 1.32. Il est facile de voir que $\xi_k(x_k)$ étant une fonctionnelle linéaire dans X_k, où $k=1,2,\ldots,$ on a

$$\xi(x)=\sum_{k=1}^{m}\xi_k(x_k) \qquad \text{pour tout} \quad x=\{x_k\}\epsilon X$$

et, réciproquement,

$$|\xi|_m=\sum_{k=1}^{m}|\xi_k|.$$

Ad 1.33. On a en vertu de 2.23 $\xi(x)=\sum_{k=1}^{m}\xi_k(x)$ où $\xi_k(x)$ est une fonctionnelle linéaire avec la pseudonorme $|x|_k$. En appliquant la transformation de l'espace $X(|x|_k)$ en espace c par équivalence qui a été définie dans 1.43, nous concluons que

$$\xi_1(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\bar\beta_k\lim_n t_{kn}+j\lim_k\lim_n t_{kn}$$

et

$$\xi_k(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{k-1,n}t_{k-1,n}+\bar{\bar\beta}_{k-1}\lim_n t_{k-1,n} \qquad \text{pour} \quad k=2,\ldots,m,$$

où

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\bar\beta_k|<\infty \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}|a_{k-1,n}|<\infty,$$

de sorte qu'en posant

$$\beta_k=\begin{cases}\bar\beta_k+\bar{\bar\beta}_k & \text{pour} \quad k=1,2,\ldots,m-1,\\ \bar\beta_k & \text{pour} \quad k=m,m+1,\ldots,\end{cases}$$

il vient

$$\xi(x)=\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{n=1}^{\infty}a_{kn}t_{kn}+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\lim_n t_{kn}+j\lim_k\lim_n t_{kn}.$$

On a trivialement

$$|\xi|_m\leqslant\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{kn}|+\sum_{k=1}^{\infty}|\beta_k|+|j|;$$

cependant le signe $<$ est exclu, car en posant

$$x_p=\{t_{kn}^{(p)}\},$$

où

$$t_{kn}^{(p)}=\operatorname{sign}\begin{cases}a_{kn} & \text{pour} \quad k=1,2,\ldots,m-1 \quad \text{et} \quad n=1,2,\ldots,p,\\ \beta_k\begin{cases}\text{pour} \quad k=1,2,\ldots,m-1 \quad \text{et} \quad n=p+1,p+2,\ldots,\\ \text{pour} \quad k=m,m+1,\ldots,m+p \quad \text{et} \quad n=1,2,\ldots,\end{cases}\\ j \quad \text{pour} \quad k=m+p+1,m+p+2,\ldots \quad \text{et} \quad n=1,2,\ldots,\end{cases}$$

on a

$$|x_p|_m^*\leqslant 1 \quad \text{et} \quad \xi(x_p)\to\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{kn}|+\sum_{k=1}^{\infty}|\beta_k|+|j|.$$

Ad 1.34. $\xi(x)$ étant une fonctionnelle linéaire avec la pseudonorme $|x|_m$, la transformation de l'espace $X(|x|_m)$ en espace C par équivalence, tout comme dans 1.43, conduit à la conclusion que

$$\xi(x)=\int_{-m}^{m}x(t)\,d\,a(t),$$

où $a(t)$ est une fonction à variation bornée, continue du côté gauche et telle que $a(-m)=0$.

$$|\xi|_m=\operatorname{var}_t a(t).$$

Ad 1.35. Soit

$$|x|^0=\sup\Bigg(\sup_{\langle 0,1-1/m\rangle}|x(t)|,\ \sup_{\langle 1-1/m,1\rangle}\Bigg|\int_{1-1/m}^{t}x(s)\,ds\Bigg|\Bigg).$$

Les pseudonormes $|x|_m^*$ et $|x|^0$ étant équivalentes, on a

$$\xi(x)=\int_0^{1-1/m}x(t)\,da(t)+\int_{1-1/m}^{1}\Bigg(\int_{1-1/m}^{t}x(s)\,ds\Bigg)d\beta(t),$$

où $a(t)$ est une fonction à variation bornée dans l'intervalle $\langle 0,1-1/m\rangle$, continue du côté gauche à l'intérieur de cet intervalle et telle que $a(0)=0$; $\beta(t)$ a des propriétés analogues dans l'intervalle $\langle 1-1/m,1\rangle$. Il est facile de voir que les fonctions $a(t)$ et $\beta(t)$ sont déterminées par ces propriétés d'une façon univoque.

Désignons par $|\xi|_m^0$ la norme de la fonctionnelle ξ avec la pseudonorme $|x|^0$, par $|\xi_1|_1$ la norme de la fonctionnelle

$$\xi_1(x)=\int_0^{1-1/m} x(t)\,d\alpha(t)$$

avec la pseudonorme $|x|_1=\sup_{\langle 0,1-1/m\rangle}|x(t)|$ et par $|\xi_2|_2$ la norme de la fonctionnelle

$$\xi_2(x)=\int_{1-1/m}^{1}\left(\int_{1-1/m}^{t} x(s)\,ds\right)d\beta(t)$$

avec la pseudonorme

$$|x|_2=\sup_{\langle 1-1/m,1\rangle}\left|\int_{1-1/m}^{t} x(s)\,ds\right|.$$

Alors l'application de 2.23 à $|x|^0$, $|x|_1$ et $|x|_2$ ainsi définis permet de conclure que

$$|\xi|_m^0=|\xi_1|_1+|\xi_2|_2,$$

d'où

$$|\xi|_m^0=\operatorname*{var}_{\langle 0,1-1/m\rangle}\alpha(t)+\operatorname*{var}_{\langle 1-1/m,1\rangle}\beta(t).$$

Ad 1.36. La transformation par équivalence de l'espace $X(|x|_m)$ en espace L^p, définie dans 1.43, implique la forme

$$\xi(x)=\int_{-m}^{m} x(t)\,\alpha(t)\,dt,$$

où $\alpha(t)$ est une fonction définie sur le segment $\langle -m,m\rangle$ et assujettie à la condition: quand $p=1$, $\alpha(t)$ est bornée mesurable, et quand $p>1$, elle est telle que

$$\int_{-m}^{m}|\alpha(t)|^{p'}dt<\infty,\quad \text{où}\quad p'=\frac{p}{p-1}.$$

On a

$$|\xi|_m=\begin{cases}\sup\limits_{\langle -m,m\rangle}\operatorname{ess}|\alpha(t)| & \text{pour}\quad p=1,\\ \left(\int_{-m}^{m}|\alpha(t)|^{p'}dt\right)^{1/p'} & \text{pour}\quad p>1.\end{cases}$$

2.4. X étant un espace linéaire, nous appelons une fonctionnelle $\omega(x)$ définie dans X *fonctionnelle de Banach* lorsqu'on a $\omega(x_1+x_2)\leqslant\omega(x_1)+\omega(x_2)$ et $\omega(tx)=t\omega(x)$ pour tout $t\geqslant 0$.

2.41. Soient: $\omega(x)$ une fonctionnelle de Banach, $x(\lambda)$ une opération définie dans un espace abstrait Λ et ayant pour valeurs des éléments de X, enfin $c(\lambda)$ une fonctionnelle définie dans Λ.

Pour qu'il existe une fonctionnelle $\xi(x)$ additive, homogène et telle que

$$\xi(x(\lambda))\geqslant c(\lambda)\quad \textit{pour tout}\quad \lambda\in\Lambda,$$

$$\xi(x)\leqslant\omega(x)\quad \textit{pour tout}\quad x\in X,$$

il faut et il suffit que

$$(**)\qquad \sum_{k=1}^{n} t_k c(\lambda_k)\leqslant\omega\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x(\lambda_k)\right)$$

pour $t_k\geqslant 0$ et $\lambda_k\in\Lambda$.

La nécessité de la condition est triviale. Pour en établir la suffisance, envisageons d'abord le cas où la fonctionnelle de Banach $\omega(x)$ prend univoquement des valeurs non-négatives.

Soit A l'ensemble de tous les éléments de X qui sont de la forme

$$a=sx+\sum_{k=1}^{n}s_k x(\lambda_k),$$

où

$$s>0,\quad s_k\leqslant 0,\quad \omega(x)<1,$$

$$c(\lambda_k)<0\quad \text{et}\quad s+\sum_{k=1}^{n}s_k c(\lambda_k)=1;$$

s'il n'y en a pas pour lesquels $c(\lambda_k)<0$, A désignera simplement l'ensemble des $x\in X$ tels que $\omega(x)<1$.

Soit B l'ensemble de tous les éléments de X qui sont de la forme

$$b=\sum_{i=1}^{m}w_i x(\mu_i),$$

où

$$w_i\geqslant 0,\quad c(\mu_i)\geqslant 0\quad \text{et}\quad \sum_{i=1}^{m}w_i c(\mu_i)=1;$$

ici on peut admettre l'existence des μ_i pour lesquels $c(\mu_i)>0$, car en cas contraire la fonctionnelle $\xi(x)\equiv 0$ satisferait à la thèse du théorème.

Soit enfin D l'ensemble de tous les $x \epsilon X$ de la forme $d=b-a$, où $a \epsilon A$ et $b \epsilon B$. Il est facile de voir que l'ensemble D est convexe. En outre, 0 non ϵD, car on aurait en cas contraire

$$sx+\sum_{k=1}^{n} s_k x(\lambda_k)=\sum_{i=1}^{m} w_i x(\mu_i),$$

d'où, en vertu de la condition (**),

$$s\omega(x)=\omega(sx)=\omega\left(\sum_{i=1}^{m} w_i x(\mu_i)-\sum_{k=1}^{n} s_k x(\lambda_k)\right)$$
$$\geqslant \sum_{i=1}^{m} w_i c(\mu_i)-\sum_{k=1}^{n} s_k c(\lambda_k)=s,$$

donc $\omega(x)\geqslant 1$ contrairement à la définition de A.

Considérons dans B un $b_0\neq 0$ arbitraire et posons

$$\xi_0(tb_0)=t \quad \text{pour } t \text{ réels.}$$

La fonctionnelle additive et homogène ξ_0, définie ainsi dans l'espace linéaire composé de tous les éléments tb_0, a la propriété

$$\xi_0(tb_0)\geqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad tb_0 \epsilon D,$$

car $tb_0 \epsilon D$ et $t<0$ entraînent l'égalité $0=(-1/t)(tb_0)+1b_0$, de sorte que le point 0 appartiendrait à D, contrairement à ce qui vient d'être démontré.

Ceci établi, admettons que, dans un espace linéaire R_1 tel que $R_1 \subset X, R_1 \neq X$ et $b_0 \epsilon R_1$, une fonctionnelle additive et homogène ξ_0 est déjà définie, ayant la propriété

$$\xi_0(x)\geqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad x \epsilon R_1 D.$$

Fixons un $y_0 \epsilon X-R_1$ et désignons par R' et R'' respectivement l'ensemble de tous les $x' \epsilon R_1$ tels que $t'(y_0-x')\epsilon D$ pour un $t'>0$ et celui de tous les $x'' \epsilon R_1$ tels que $t''(y_0-x'')\epsilon D$ pour un $t''<0$. Il est facile de constater que

$$R'\neq 0 \quad \text{et} \quad R''\neq 0;$$

en effet, on a, pour t suffisamment petits, $\omega(ty_0)<1$, c'est-à-dire $ty_0 \epsilon A$, d'où $b_0-ty_0 \epsilon D$, et comme $b_0-ty_0=(-t)(y_0-b_0/t)$ pour $t\neq 0$, il vient

$$\frac{1}{t}b_0 \epsilon \begin{cases} R' & \text{quand} \quad t<0, \\ R'' & \text{quand} \quad t>0. \end{cases}$$

Ensuite,

$$\xi_0(x')\leqslant \xi_0(x'') \quad \text{pour} \quad x' \epsilon R' \quad \text{et} \quad x'' \epsilon R'',$$

car $t'(y_0-x')\epsilon D$, $t'>0$, $t''(y_0-x'')\epsilon D$ et $t''<0$ entraînent en vertu de l'identité

$$\frac{1}{t'}[t'(y_0-x')]+\left(-\frac{1}{t''}\right)[t''(y_0-x'')]=x''-x'$$

que

$$\frac{1}{t}(x''-x')\epsilon D \quad \text{pour} \quad t=\frac{1}{t'}-\frac{1}{t''},$$

d'où $\xi_0[(x''-x')/t]\geqslant 0$.

Considérons un nombre arbitraire r_0 tel que

$$\xi_0(x')\leqslant r_0 \leqslant \xi_0(x'') \quad \text{pour} \quad x' \epsilon R' \quad \text{et} \quad x'' \epsilon R'',$$

et posons

$$\xi_0(x+ty_0)=\xi_0(x)+tr_0$$

pour tous les $x \epsilon R_1$ et t réels.

La fonctionnelle additive et homogène ξ_0, définie ainsi dans l'espace linéaire R_2 composé d'éléments $x+ty_0$, a la propriété

$$\xi_0(x+ty_0)\geqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad x+ty_0 \epsilon R_2 D,$$

car on a $x+ty_0=t[y_0-(-x/t)]$ pour $t\neq 0$, donc

$$-\frac{1}{t}x \epsilon \begin{cases} R' & \text{quand} \quad t>0, \\ R'' & \text{quand} \quad t<0, \end{cases}$$

d'où

$$\xi_0\left(-\frac{1}{t}x\right) \begin{cases} \leqslant r_0 & \text{quand} \quad t>0, \\ \geqslant r_0 & \text{quand} \quad t<0. \end{cases}$$

En procédant ainsi de suite par l'induction transfinie, une fonctionnelle additive et homogène $\xi_0(x)$ se trouve définie dans X, telle que $\xi_0(b_0)=1$ et $\xi_0(x)\geqslant 0$ pour $x \epsilon D$, c'est-à-dire

$$\xi_0(a)\leqslant \xi_0(b) \quad \text{pour} \quad a \epsilon A \quad \text{et} \quad b \epsilon B.$$

Soit à présent v un nombre tel que

$$\xi_0(a)\leqslant v \leqslant \xi_0(b) \quad \text{pour} \quad a \epsilon A \quad \text{et} \quad b \epsilon B.$$

On a $v \geqslant \sup_{\omega(a)<1} \xi_0(a) > 0$, car $\xi_0 \neq 0$. Posons

$$\xi(x) = \frac{1}{v}\xi_0(x) \quad \text{pour} \quad x \in X.$$

Ainsi définie, $\xi(x)$ est une fonctionnelle additive homogène et telle que

$$\xi(a) \leqslant 1 \leqslant \xi(b) \quad \text{pour} \quad a \in A \quad \text{et} \quad b \in B.$$

La fonctionnelle $\xi(x)$ satisfait aux deux thèses qu'il s'agissait d'établir. En effet:

1° Si $c(\lambda) > 0$, on a $x(\lambda)/c(\lambda) \in B$, d'où $\xi(x(\lambda)/c(\lambda)) \geqslant 1$; pareillement, si $c(\lambda) < 0$, on a $\varepsilon x(\lambda)/c(\lambda) \in A$ pour tout $\varepsilon < 1$ positif, d'où $\xi(\varepsilon x(\lambda)/c(\lambda)) \leqslant 1$; enfin, si $c(\lambda) = 0$, on a $x(\mu)/c(\mu) + nx(\lambda) \in B$ pour tout $\mu \in \Lambda$ tel que $c(\mu) > 0$ et pour tout $n = 1, 2, \ldots$, de sorte que $\xi(x(\mu)/c(\mu) + nx(\lambda)) \geqslant 1$, d'où $\xi(x(\lambda)) \geqslant 0$. Il est ainsi établi que $\xi(x(\lambda)) \geqslant c(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.

2° Si $\omega(x) > 0$, on a $\omega(\varepsilon x/\omega(x)) < 1$ pour tout $\varepsilon < 1$ positif, de sorte que $\varepsilon x/\omega(x) \in A$, d'où $\xi(\varepsilon x/\omega(x)) \leqslant 1$; si, par contre, $\omega(x) = 0$, on a $\omega(nx) = 0$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$, de sorte que $nx \in A$ et par conséquent $\xi(nx) \leqslant 1$, d'où $\xi(x) \leqslant 0$. Il est ainsi établi que $\xi(x) \leqslant \omega(x)$ pour tout $x \in X$.

Le théorème se trouve donc démontré dans le cas envisagé, dans lequel $\omega(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in X$.

Passons au cas opposé. Soit, dans ce cas, $\varphi(x)$ une fonctionnelle additive, homogène et telle que

$$\varphi(x) \leqslant \omega(x) \quad \text{pour} \quad x \in X.$$

En posant

$$\bar{\omega}(x) = \omega(x) - \varphi(x) \quad \text{pour} \quad x \in X,$$

$$\bar{c}(\lambda) = c(\lambda) - \varphi(x(\lambda)) \quad \text{pour} \quad \lambda \in \Lambda,$$

$\bar{\omega}(x)$ devient une fonctionnelle de Banach non-négative qui satisfait à la condition (**) avec $\bar{c}$ et $\bar{\omega}$ substitués à c et ω respectivement. D'après le cas envisagé, il existe donc une fonctionnelle $\bar{\xi}(x)$ additive, homogène et satisfaisant aux relations

$$\bar{\xi}(x(\lambda)) \geqslant \bar{c}(\lambda) \quad \text{pour} \quad \lambda \in \Lambda,$$

$$\bar{\xi}(x) \leqslant \bar{\omega}(x) \quad \text{pour} \quad x \in X.$$

Alors la fonctionnelle $\xi(x) = \bar{\xi}(x) + \varphi(x)$ satisfait manifestement aux mêmes relations avec c et ω au lieu de $\bar{c}$ et $\bar{\omega}$, ce qui achève la démonstration.

2.42. On a le corollaire suivant:

Pour qu'il existe une fonctionnelle $\xi(x)$ additive, homogène et telle que

$$\xi(x(\lambda)) = c(\lambda) \quad \textit{pour} \quad \lambda \in \Lambda,$$

$$\xi(x) \leqslant \omega(x) \quad \textit{pour} \quad x \in X,$$

il faut et il suffit que l'on ait la condition (**) avec t_k réels arbitraires au lieu de $t_k \geqslant 0$.

C'est une conséquence immédiate de 2.41. En effet, pour avoir l'égalité $\xi(x(\lambda)) = c(\lambda)$ pour un $\lambda \in \Lambda$ donné, il faut et il suffit que l'on ait simultanément $\xi(x(\lambda)) \geqslant c(\lambda)$ et $\xi(-x(\lambda)) \geqslant -c(\lambda)$.

2.421. Maintenons les mêmes notations et admettons à présent que X est un espace B_0^*.

Pour qu'il existe une fonctionnelle $\xi(x)$ linéaire et telle que

$$\xi(x(\lambda)) \geqslant c(\lambda) \quad \textit{pour tout} \quad \lambda \in \Lambda,$$

il faut et il suffit que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{p=1}^{k_n} t_{np}\, c(\lambda_{np}) \leqslant 0$$

pour $t_{np} \geqslant 0$ et $\lambda_{np} \in \Lambda$ tels que

$$\left|\sum_{p=1}^{k_n} t_{np}\, x(\lambda_{np})\right| \to 0 \quad \textit{avec} \quad n \to \infty.$$

La condition est évidemment nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, admettons que les pseudonormes $|x|_k$ ont la propriété (*). Il existe un nombre $r > 0$ tel que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} t_k x(\lambda_k)\right| \leqslant r \quad \text{entraîne} \quad \sum_{k=1}^{n} t_k c(\lambda_k) \leqslant 1$$

pour $t_k \geqslant 0$ et $\lambda_k \in \Lambda$. En choisissant un $m > 0$ entier et un $\varepsilon > 0$ réel de façon que

$$\sup(|x|_1, |x|_2, \ldots, |x|_m) \leqslant \varepsilon \quad \text{entraîne} \quad |x| \leqslant r,$$

on vérifie aussitôt que la condition (**) se trouve satisfaite pour

$$\omega(x)=\frac{1}{\varepsilon}\sup\big(|x|_1,|x|_2,\ldots,|x|_m\big).$$

En vertu de 2.41, il existe donc une fonctionnelle linéaire d'ordre m, telle que $\xi\big(x(\lambda)\big)\geqslant c(\lambda)$ pour tout $\lambda\epsilon\Lambda$.

2.422. Un raisonnement analogue permet d'établir dans les mêmes hypothèses le théorème qui suit:

Pour qu'il existe une fonctionnelle $\xi(x)$ linéaire et telle que

$$\xi\big(x(\lambda)\big)=c(\lambda)\qquad \textit{pour tout}\quad \lambda\epsilon\Lambda,$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{p=1}^{k_n}t_{np}c(\lambda_{np})=0$$

pour t_{np} réels et $\lambda_{np}\epsilon\Lambda$ tels que

$$\Big|\sum_{p=1}^{k_n}t_{np}x(\lambda_{np})\Big|\to 0\qquad \textit{avec}\qquad n\to\infty.$$

2.423. Lorsque X est un espace B, on a le théorème:

Pour qu'il existe une fonctionnelle $\xi(x)$ linéaire et telle que

$$\|\xi\|\leqslant m\quad \textit{et}\quad \xi\big(x(\lambda)\big)\geqslant c(\lambda)\qquad \textit{pour tout}\quad \lambda\epsilon\Lambda,$$

il faut et il suffit que

$$\sum_{p=1}^{n}t_pc(\lambda_p)\leqslant m\Big|\sum_{p=1}^{n}t_px(\lambda_p)\Big|\qquad \textit{pour}\quad t_p\geqslant 0\quad \textit{et}\quad \lambda_p\epsilon\Lambda.$$

La démonstration est encore analogue à celle de 2.421.

2.43. Soit, pour un espace T abstrait, X un espace linéaire dont les éléments sont des fonctions bornées x à valeurs réelles $x(\tau)$ où $\tau\epsilon T$ (en particulier la fonction constante $x(\tau)=1$), les définitions des opérations étant habituelles; disons explicitement que X peut ne pas coïncider avec l'espace de toutes les fonctions bornées définies dans T. Désignons par Φ une famille de transformations f de l'espace T en sous-ensembles de lui-même pour lesquelles, en posant $x_f(\tau)=x\big(f(\tau)\big)$, on a $x_f\epsilon X$.

Pour qu'il existe une fonctionnelle $\int x(\tau)d\tau$ définie dans X et ayant les propriétés

$$\int\big(x_1(\tau)+x_2(\tau)\big)dt=\int x_1(\tau)d\tau+\int x_2(\tau)d\tau,$$

$$\int tx(\tau)d\tau=t\int x(\tau)d\tau\qquad \textit{pour } t \textit{ réels},$$

$$\int x(\tau)d\tau\geqslant 0\qquad \textit{pour}\quad x(\tau)\geqslant 0,$$

$$\int x_f(\tau)d\tau=\int x(\tau)d\tau\qquad \textit{pour}\quad f\epsilon\Phi\quad \textit{et}\quad \int 1\,d\tau=1,$$

il faut et il suffit que

(*) [4]
$$\sup_{\tau\epsilon T}\sum_{k=1}^{n}\big[x_k\big(f_k(\tau)\big)-x_k(\tau)\big]\geqslant 0$$

pour $x_k\epsilon X$ et $f_k\epsilon\Phi$.

En effet, il est facile de voir que l'existence de la fonctionnelle en question équivaut à celle d'une fonctionnelle $\xi(x)$ définie dans X, additive, homogène et ayant les propriétés

$$\xi(x)\geqslant 0\qquad \text{pour}\quad x(\tau)\geqslant 0,$$

$$\xi(x_f-x)\geqslant 0\leqslant\xi(x-x_f)\qquad \text{pour}\quad f\epsilon\Phi,$$

$$\xi(1)\geqslant 1,\quad \xi(-1)\geqslant -1\quad \text{et}\quad \xi(x)\leqslant\sup_{\tau\epsilon T}|x(\tau)|.$$

En vertu de 2.41, l'existence d'une telle fonctionnelle $\xi(x)$ équivaut à son tour à la condition

$$1\leqslant\sup_{\tau\epsilon T}\Big|1+x(\tau)+\sum_{k=1}^{n}\big[x_k\big(f_k(\tau)\big)-x_k(\tau)\big]\Big|$$

pour $x\epsilon X$, $x(\tau)\geqslant 0$, $\tau\epsilon T$, $x_k\epsilon X$ et $f_k\epsilon\Phi$, qui équivaut à (*).

2.431. Dans les mêmes notations:

Si la famille Φ est telle que

$$f_1\epsilon\Phi\quad \textit{et}\quad f_2\epsilon\Phi\quad \textit{entraînent}\quad f_1f_2=f_2f_1\epsilon\Phi,$$

on a (*).

---

[4]) La condition (*) a été trouvée indépendamment par J. Dixmier, *Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications*, Acta Scientiarum Mathematicarum 12 (1950), p. 213-227 (cf. p. 215). L'existence de l'intégrale invariante d'une fonction dont les valeurs sont des éléments d'un espace linéaire topologique a été étudiée par R. Sikorski dans les travaux: *On the existence of the generalized limit*, Studia Mathematica 12 (1951), p. 117-124 et *Generalized limits and means*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 25 (1952), p. 106-109.

Procédons par induction. En supposant que l'on ait

$$x_1(f_1(\tau))-x_1(\tau)\leqslant-\varepsilon \quad \text{pour un} \quad \varepsilon>0 \quad \text{et} \quad \tau\epsilon T,$$

on aurait

$$x_1(f_1^p(\tau))-x_1(f_1^{p-1}(\tau))\leqslant-\varepsilon \quad \text{pour} \quad p=1,2,\ldots,m,$$

donc, par l'addition membre à membre,

$$\frac{1}{m}\left(x_1(f_1^m(\tau))-x_1(\tau)\right)\leqslant-\varepsilon \quad \text{pour} \quad \tau\epsilon T \quad \text{et} \quad m=1,2,\ldots,$$

ce qui est impossible. On a donc $\binom{*}{*}$ pour $n=1$.

Admettons $\binom{*}{*}$ pour un $n\geqslant1$ et supposons que l'on ait

$$\sum_{k=1}^{n+1}\left(x_k(f_k(\tau))-x_k(\tau)\right)\leqslant-\varepsilon \quad \text{pour un} \quad \varepsilon>0 \quad \text{et} \quad \tau\epsilon T,$$

où $x_k\epsilon X$ et $f_k\epsilon\Phi$ pour $k=1,2,\ldots,n+1$. On aurait par suite

$$\sum_{k=1}^{n+1}\left(x_k(f_kf_{n+1}^{p-1}(\tau))-x_k(f_{n+1}^{p-1}(\tau))\right)\leqslant-\varepsilon \quad \text{pour} \quad p=1,2,\ldots,m,$$

donc, par l'addition membre à membre,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\bar{x}_k(f_k(\tau))-\bar{x}_k(\tau)\right)\leqslant-\varepsilon-\frac{1}{m}\left(x_{n+1}(f_{n+1}^m(\tau))-x_{n+1}(\tau)\right)$$

pour $\tau\epsilon T$ et $m=1,2,\ldots,$ où

$$\bar{x}_k(\tau)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_k(f_{n+1}^{i-1}(\tau));$$

c'est cependant contraire à la condition $\binom{*}{*}$, admise pour n, car on a à partir d'un m suffisamment élevé

$$-\varepsilon-\frac{1}{m}\left(x_{n+1}(f_{n+1}^m(\tau))-x_{n+1}(\tau)\right)\leqslant-\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tout} \quad \tau\epsilon T.$$

2.5. X étant un espace B_0^* avec la norme $|x|$, nous appelons *un plan* tout ensemble $H\subset X$ pour lequel il existe une fonctionnelle linéaire $\xi(x)$ non identiquement nulle et un nombre c tels que H est précisément l'ensemble de tous les $x\epsilon X$ qui satisfont à l'équation $\xi(x)-c=0$. Nous disons qu'un ensemble $E\subset X$ est *situé d'un côté du plan* H défini par cette équation lorsque la fonctionnelle $\xi(x)-c$ ne change pas de signe dans E. Nous disons enfin que le plan H *sépare* deux ensembles E_1 et E_2 dans X lorsque

$$\xi(x)-c\begin{cases}\leqslant0 & \text{pour tout} \quad x\epsilon E_1,\\ \geqslant0 & \text{pour tout} \quad x\epsilon E_2,\end{cases}$$

ou inversement.

Etant donnés dans l'espace X un ensemble linéaire R et un ensemble convexe V, l'existence d'un plan $H\subset X$ contenant R et ayant V d'un côté équivaut à la condition suivante: l'ensemble W de tous les éléments de la forme

$$tv+x \quad \text{où} \quad t\geqslant0, \quad v\epsilon V \quad \text{et} \quad x\epsilon R$$

n'est pas dense dans l'espace X.

En effet, il est facile de voir que l'existence d'un tel H équivaut à celle d'une fonctionnelle linéaire telle que

$$\xi(x)\begin{cases}\geqslant0 & \text{pour tout} \quad x\epsilon R,\\ \geqslant0 & \text{pour tout} \quad x\epsilon V,\\ \geqslant1 & \text{pour un} \quad x_0\epsilon X,\end{cases}$$

ce qui équivaut à son tour, en vertu de 2.421, à l'existence d'un $x_0\epsilon X$ tel que, pour $n\to\infty$, la convergence

$$|s_nx_0+x_n+t_nv_n|\to0 \quad \text{où} \quad s_n\geqslant0,\ t_n\geqslant0,\ x_n\epsilon R \ \text{et} \ v_n\epsilon V$$

entraîne la convergence $s_n\to0$; or, il est évident qu'un élément x_0 possède cette propriété lorsque l'élément $-x_0$ n'appartient pas à la fermeture de l'ensemble W et seulement alors.

2.51. *Etant donnés dans l'espace X une variété linéaire*[5] *R et un ensemble convexe V dont l'intérieur est disjoint de R et non vide, il existe dans cet espace un plan H contenant R et ayant V d'un côté.*

Il suffit de le démontrer dans le cas où R est un ensemble linéaire. Soit, comme précédemment, W l'ensemble de tous les éléments de la forme $tv+x$ où $t\geqslant0$, $v\epsilon V$ et $x\epsilon R$. Alors $x_0\epsilon X$ tel que $-x_0$ est un point intérieur de V n'appartient pas à la fermeture de W. En effet, si $t_nv_n+x_n\to x_0$ où $t_n\geqslant0$, $v_n\epsilon V$ et $x_n\epsilon R$, l'élément

[5]) c'est-à-dire un ensemble qui résulte d'un ensemble linéaire par translation.

$-t_n v_n - x_n$ est, pour n suffisamment grand, un point intérieur de V, et comme

$$\frac{1}{1+t_n}\left(-t_n v_n - x_n\right) + \frac{t_n}{1+t_n} v_n = -\frac{1}{1+t_n} x_n,$$

l'élément $-\frac{1}{1+t_n} x_n$ serait un point intérieur de V appartenant à R, contrairement à l'hypothèse. L'application de 2.5 achève la démonstration.

2.52. *Etant donnés dans l'espace X deux ensembles convexes A et B, l'existence d'un plan $H \subset X$ séparant A et B équivaut à la condition suivante: l'ensemble W de tous les éléments de la forme*

$$t(a-b) \quad \text{où} \quad t \geqslant 0,\ a \in A \ \text{et} \ b \in B$$

n'est pas dense dans l'espace X.

En effet, il est aisé de voir que l'existence du plan $H \subset X$ séparant A et B équivaut à celle d'une fonctionnelle linéaire $\xi(x)$ telle que

$$\xi(a-b) \geqslant 0 \quad \text{pour tous les } a \in A \text{ et } b \in B,$$

$$\xi(x_0) \geqslant 1 \quad \text{pour un } x_0 \in X,$$

ce qui équivaut à son tour, en vertu de 2.421, à la condition que

$$|s_n x_0 + t_n(a_n - b_n)| \to 0 \quad \text{où} \quad s_n \geqslant 0,\ t_n \geqslant 0,\ a_n \in A \ \text{et} \ b_n \in B$$

entraîne $s_n \to 0$, c'est-à-dire que l'élément $-x_0$ n'appartienne pas à la fermeture de l'ensemble W.

2.53. *Etant donnés dans l'espace X deux ensembles convexes A et B dont le premier a des points intérieurs et le second ne contient aucun d'eux, il existe dans cet espace un plan H séparant A et B.*

Soit en effet $x_0 = a_0 - b_0$, où a_0 est un point intérieur de A et $b_0 \in B$. Le point $-x_0$ n'appartient pas à la fermeture de l'ensemble W composé de tous les éléments de la forme $t(a-b)$ où $t \geqslant 0$, $a \in A$ et $b \in B$, car on aurait en cas contraire

$$x_0 + t_n(a_n - b_n) \to 0 \quad \text{où} \quad t_n \geqslant 0,\ a_n \in A \ \text{et} \ b_n \in B,$$

d'où, en posant $\bar{a}_n = b_0 - t_n(a_n - b_n)$, il viendrait $\bar{a}_n \to a_0$ et par conséquent les points $\bar{a}_n$ seraient, pour n suffisamment grands, des points intérieurs de A; il en serait donc de même des points

$$\frac{1}{1+t_n}\bar{a}_n + \frac{t_n}{1+t_n} a_n,$$

et comme

$$\frac{1}{1+t_n}\bar{a}_n + \frac{t_n}{1+t_n} a_n = \frac{1}{1+t_n} b_0 + \frac{t_n}{1+t_n} b_n,$$

l'ensemble B contiendrait des points intérieurs de l'ensemble A, contrairement à l'hypothèse.

2.54. Un ensemble E situé dans l'espace X est dit *faiblement fermé* lorsque la convergence faible des $x_n \in E$ vers un $x_0 \in X$ entraîne $x_0 \in E$.

2.541. *Tout ensemble convexe fermé est faiblement fermé.*

Supposons, en effet, qu'il existe dans X une suite $\{x_n\}$ faiblement convergente vers x_0 et que, B y étant un ensemble convexe fermé, $x_n \in B$ pour $n = 1, 2, \ldots$, mais $x_0 \text{ non} \in B$. Il existe donc un entourage convexe A de x_0, disjoint de B. Il en résulte d'après 2.53 l'existence d'un plan $H \subset X$ qui sépare A et B. Soit $\xi(x) - c = 0$ l'équation représentant ce plan. On a donc par exemple

$$\xi(x) - c \begin{cases} \geqslant 0 & \text{pour } x \in A, \\ \leqslant 0 & \text{pour } x \in B, \end{cases}$$

d'où $\xi(x_n) - c \leqslant 0$ et $\xi(x_0) - c > 0$, contrairement à la convergence $\xi(x_n) \to \xi(x_0)$.

2.542. Une conséquence immédiate de 2.541 est le corollaire suivant:

Si x_n converge faiblement vers x_0, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ des $t_k \geqslant 0$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n} t_k = 1 \quad \text{et} \quad \left|\sum_{k=1}^{n} t_k x_k - x_0\right| < \varepsilon.$$

2.6. Un ensemble S situé dans l'espace linéaire X s'appelle *un cône* (au sommet 0) lorsqu'il satisfait aux conditions:

1° $x_1 \in S$ et $x_2 \in S$ entraînent $x_1 + x_2 \in S$,

2° $x \in S$ et $t \geqslant 0$ entraînent $tx \in S$.

Alors, deux éléments x_1 et x_2 de X étant donnés, nous écrivons

$$x_1 \leqslant x_2 \quad \text{au lieu de} \quad x_2 - x_1 \in S.$$

2.61. De même, $\xi_1(x)$ et $\xi_2(x)$ étant deux fonctionnelles additives et homogènes définies dans X, convenons que

$$\xi_1 \leqslant \xi_2 \text{ équivaut à } \xi_1(x) \leqslant \xi_2(x) \text{ pour tous les } x \epsilon S.$$

Les éléments $x \geqslant 0$ seront dits *non-négatifs* et les fonctionnelles additives homogènes $\xi \geqslant 0$ — *non-négatives*.

Désormais, toutes les fois que les relations ainsi définies interviendront dans le texte, il sera sous-entendu qu'un cône $S \subset X$ est donné d'avance.

2.62. Soient $|x|$ une pseudonorme dans X linéaire et x_0 point intérieur du cône S. Alors, *si une fonctionnelle additive et homogène $\xi_0(x)$ est non-négative sans être identiquement nulle, on a $\xi_0(x_0) > 0$.*

Le cas est analogue lorsque X est un espace B_0^*.

Admettons, en effet, que $\xi_0(x_0)=0$. Si la sphère $|x-x_0|<r$ est contenue dans S, on a $\xi_0(x_0+y)=\xi_0(y)\geqslant 0$ lorsque $|y|<r$, c'est-à-dire $\xi_0(y)=0$, ce qui entraîne $\xi_0=0$ contrairement à l'hypothèse.

2.7. R étant un ensemble linéaire dans l'espace X dans lequel une pseudonorme homogène $|x|$ est donnée, soit $\xi_0(x)$ une fonctionnelle définie pour tout $x \epsilon R$, non-négative, additive et homogène. Nous allons établir quelques théorèmes sur le *prolongement* de cette fonctionnelle, à savoir sur l'existence d'une fonctionnelle $\xi(x)$ définie pour tout $x \epsilon X$, non-négative et linéaire avec la même pseudonorme $|x|$ et telle que

$$\xi(x)=\xi_0(x) \quad \text{pour tout} \quad x \epsilon R.$$

2.71. *X étant un espace linéaire, pour qu'une fonctionnelle $\xi_0(x)$ additive et homogène dans un ensemble linéaire $R \subset X$ ait un prolongement $\xi(x)$ linéaire dans X avec la pseudonorme $|x|$, tel que $|\xi| \leqslant c$ et $\xi \geqslant 0$, il faut et il suffit que l'on ait*

$$({}^{*}_{**}) \quad \xi_0(x) \leqslant c|x+z| \quad \text{pour tout} \quad x \epsilon R \text{ et tout } z \epsilon X \text{ tel que } z \geqslant 0.$$

En effet, il est facile de voir que pour qu'une fonctionnelle $\xi(x)$, additive et homogène dans X, soit un tel prolongement, il faut et il suffit que

$$\xi(x) \geqslant \xi_0(x) \quad \text{pour tout} \quad x \epsilon R,$$
$$\xi(z) \geqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad z \geqslant 0,$$
$$\xi(x) \leqslant c|x| \quad \text{pour tout} \quad x \epsilon X;$$

or, la réunion de ces conditions équivaut à $({}^{*}_{**})$ en vertu de 2.41.

2.72. *X étant un espace B_0^* avec la norme $|x|$, pour qu'une fonctionnelle $\xi_0(x)$ additive et homogène dans un ensemble linéaire $R \subset X$ ait un prolongement $\xi(x)$ linéaire dans X et tel que $\xi \geqslant 0$, il faut et il suffit que la convergence $x_n+z_n \to 0$ pour $x_n \epsilon R$ et $z_n \geqslant 0$ entraîne $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \xi_0(x_n) \leqslant 0$.*

La démonstration est analogue à la précédente, en appliquant 2.421.

2.73. *X étant un espace linéaire avec la pseudonorme homogène $|x|$, pour que toute fonctionnelle $\xi_0(x)$ linéaire avec cette pseudonorme dans un ensemble linéaire $R \subset X$ ait un prolongement $\xi(x)$ linéaire dans X avec la même pseudonorme, tel que $|\xi| \leqslant N|\xi_0|_R$* [6] *et $\xi \geqslant 0$, il faut et il suffit que l'on ait*

$$({}^{**}_{*}) \qquad |x+z| \geqslant \frac{1}{N}$$

pour tout $x \epsilon R$ tel que $|x|=1$ et pour tout $z \geqslant 0$.

La condition est nécessaire. Soient en effet: $x \epsilon R$, $|x|=1$ et $\xi_0(x)$ une fonctionnelle linéaire dans R, telle que $|\xi_0|_R=1$ et $\xi_0(x)=1$. Il s'ensuit de 2.71 que $\xi_0(x) \leqslant N|\xi_0|_R|x+z|$ pour $z \geqslant 0$, d'où $|x+z| \geqslant 1/N$.

La suffisance de la condition résulte trivialement de 2.71.

2.74. *X étant un espace B_0^* avec la norme $|x|$, pour que toute fonctionnelle $\xi_0(x)$ linéaire dans un ensemble linéaire $R \subset X$ ait un prolongement $\xi(x)$ linéaire dans X et non-négatif, il faut et il suffit que la convergence*

$$x_n+z_n \to 0 \quad \text{où} \quad x_n \epsilon R \quad \text{et} \quad z_n \geqslant 0$$

entraîne $x_n \to 0$.

En admettant, en effet, que $x_n+z_n \to 0$ pour $x_n \epsilon R$ et $z_n \geqslant 0$, il existe des t_n tels que

$$0 < t_n \to \infty \quad \text{et} \quad t_n x_n + t_n z_n \to 0.$$

En vertu de 2.72, on a donc

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \xi_0(t_n x_n) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} -\xi_0(t_n x_n) \leqslant 0$$

[6]) $|\xi_0|_R$ désigne ici la norme de la fonctionnelle ξ_0 dans l'ensemble R.

pour toute fonctionnelle $\xi_0(x)$ linéaire dans R, c'est-à-dire que la suite $\{t_n x_n\}$ y converge faiblement vers 0. En vertu de 2.31, cette suite est donc bornée, d'où

$$x_n = \frac{1}{t_n}(t_n x_n) \to 0.$$

Ainsi, la condition est nécessaire. Sa suffisance est une conséquence triviale de 2.72.

2.75. *Si un cône S situé dans un espace linéaire X avec la pseudonorme homogène $|x|$ contient des points intérieurs et s'il y en a qui appartiennent à un ensemble linéaire $R \subset X$, toute fonctionnelle $\xi_0(x)$ linéaire et non-négative dans R [7]) admet un prolongement $\xi(x)$ linéaire et non-négatif dans X.*

Soit, en effet, $x_0 \epsilon R$. Admettons que $|x - x_0| < r$ entraîne $x \epsilon S$. Nous allons montrer que $\xi_0(x)$ étant une fonctionnelle linéaire non-négative dans R, on a

$$\xi_0(x) \leqslant \frac{\xi_0(x_0)}{r}|x+z| \quad \text{pour} \quad x \epsilon R \quad \text{et} \quad z \geqslant 0.$$

On peut admettre que $\xi_0 \neq 0$. Par conséquent $\xi_0(x) > 0$ pour $|x - x_0| < r$. En supposant que $\xi_0(x) > |x+z|\xi_0(x_0)/r$ pour un $x \epsilon R$ et un $z \geqslant 0$, on aurait $|(x+z)\xi_0(x_0)/\xi_0(x)| < r$ et le point $x_0 - (x+z)\xi_0(x_0)/\xi_0(x)$ serait un point intérieur du cône S. Il en serait donc de même du point

$$x_0 - \frac{\xi_0(x_0)}{\xi_0(x)}x = x_0 - \frac{\xi_0(x_0)}{\xi_0(x)}(x+z) + \frac{\xi_0(x_0)}{\xi_0(x)}z,$$

ce qui est impossible, car

$$\xi_0\left(x_0 - \frac{\xi_0(x_0)}{\xi_0(x)}x\right) = 0.$$

Ceci établi, il suffit d'appliquer 2.71 pour achever la démonstration.

2.76. Le théorème correspondant à 2.75 subsiste lorsque X est un espace B_0^* avec la norme $|x|$.

La démonstration est analogue, mais basée sur 2.74.

[7]) c'est-à-dire telle que $\xi_0(x) \geqslant 0$ pour tout $x \epsilon RS$.

2.77. *Etant donnée, dans un espace linéaire X avec la pseudonorme homogène $|x|$, une fonctionnelle $\xi(x)$ linéaire dans cet espace avec la même pseudonorme, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y existe deux fonctionnelles non-négatives $\xi_1(x)$ et $\xi_2(x)$, linéaires avec la pseudonorme $|x|$ et telles que*

$$\xi = \xi_1 - \xi_2, \qquad |\xi_1| + |\xi_2| \leqslant c,$$

est la suivante:

$$(***) \qquad \xi(x) \leqslant c \quad \textit{pour} \quad a \leqslant x \leqslant b \quad \textit{où} \quad |a| = |b| = 1.$$

La condition est nécessaire. En effet,

$$\xi(x) = \xi_1(x) - \xi_2(x) \leqslant \xi_1(b) - \xi_2(a) \leqslant |\xi_1| + |\xi_2| \leqslant c$$

pour $a \leqslant x \leqslant b$ où $|a| = |b| = 1$. Nous allons montrer qu'elle est suffisante.

Soit Y le produit cartésien $X \times X$, c'est-à-dire l'espace linéaire des couples ordonnés $y = (x_1, x_2)$ où $x_1 \epsilon X$ et $x_2 \epsilon X$, entendu avec les définitions ordinaires des opérations et avec la pseudonorme homogène $|y| = \sup(|x_1|, |x_2|)$.

Désignons par R l'ensemble linéaire dans Y composé de tous les éléments $y = (x, x)$ où $x \epsilon X$ et par S le cône dans Y composé de tous les éléments $y = (x_1, x_2)$ où $x_1 \geqslant 0$ et $x_2 \leqslant 0$. L'égalité

$$\eta_0(y) = \xi(x) \quad \text{pour} \quad y = (x, x) \quad \text{et} \quad x \epsilon X$$

définit une fonctionnelle linéaire dans R avec la pseudonorme $|y|$. Nous allons établir l'existence d'un prolongement $\eta(y)$ de $\eta_0(y)$, linéaire avec la même pseudonorme, non-négatif dans Y et tel que $|\eta| \leqslant c$. En vertu de 2.71, il suffit de montrer que

$$\eta_0(y) \leqslant c|y+v| \quad \text{pour} \quad y \epsilon R \quad \text{et} \quad v \geqslant 0,$$

c'est-à-dire que

$$\xi(x) \leqslant c \sup(|x+z_1|, |x-z_2|) \quad \text{pour} \quad x \epsilon X \text{ et } z_1 \geqslant 0 \leqslant z_2.$$

Si $|z_1| = 0 = |z_2|$, on a $(|x+z_1|, |x-z_2|) = |x|$, de sorte que la dernière égalité résulte pour $|x| > 0$ de la condition (***) en y substi- $x/|x|$ à a, b et x.

Soit

$$\varrho = \sup(|x+z_1|, |x-z_2|).$$

S'il existe un $z_0 \geqslant 0$ tel que $|z_0| > 0$ et si $\varrho > 0$, posons

$$\bar{a} = \frac{1}{\varrho}(x - z_2), \qquad \bar{b} = \frac{1}{\varrho}(x + z_1);$$

alors $|\bar{a}| \leqslant 1$ et $|\bar{b}| \leqslant 1$. Il existe donc deux nombres non-négatifs, t_1 et t_2, tels qu'en posant

$$a = \bar{a} - t_2 z_0, \qquad b = \bar{b} + t_1 z_0,$$

il vient $|a| = |b| = 1$; comme

$$a \leqslant \bar{a} \leqslant \frac{1}{\varrho}\, x \leqslant \bar{b} \leqslant b,$$

la condition (***) entraîne $\xi(x/\varrho) \leqslant c$.

S'il existe, enfin, un $z_0 \geqslant 0$ tel que $|z_0| > 0$ et si $\varrho = 0$, posons pour $n = 1, 2, \ldots$

$$\bar{a}_n = n(x - z_2), \qquad \bar{b}_n = n(x + z_1);$$

on a alors $|\bar{a}_n| = 0$ et $|\bar{b}_n| = 0$. Il existe donc, pour tout $n = 1, 2, \ldots$, deux nombres non-négatifs, t_{n1} et t_{n2}, tels qu'en posant

$$a_n = \bar{a}_n - t_{n2} z_0, \qquad b_n = \bar{b}_n + t_{n1} z_0,$$

il vient $|a_n| = |b_n| = 1$; comme

$$a_n \leqslant \bar{a}_n \leqslant nx \leqslant \bar{b}_n \leqslant b_n,$$

la condition (***) entraîne $\xi(nx) \leqslant c$, d'où $\xi(x) \leqslant 0$.

Ceci établi, nous concluons que les fonctionnelles

$$\left.\begin{aligned} \xi_1(x) &= \eta((x, 0)) \\ \xi_2(x) &= -\eta((0, x)) \end{aligned}\right\} \quad \text{pour tout } x \in X$$

sont linéaires dans X, non-négatives et telles que $\xi = \xi_1 - \xi_2$, en même temps que $|\xi_1| + |\xi_2| \leqslant c$.

2.771. *Si X est un espace B_0^* avec la norme $|x|$ et si $\xi(x)$ y est une fonctionnelle linéaire, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de deux fonctionnelles non-négatives, $\xi_1(x)$ et $\xi_2(x)$, linéaires dans X et telles que $\xi = \xi_1 - \xi_1$, est la suivante:*

$$\xi(x_n) \to 0 \quad \textit{pour} \quad a_n \leqslant x_n \leqslant b_n \quad \textit{où} \quad a_n \to 0 \quad \textit{et} \quad b_n \to 0.$$

La nécessité de la condition est immédiate:

$$\xi(x_n) = \xi_1(x_n) - \xi_2(x_n) \leqslant \xi_1(b_n) - \xi_2(a_n),$$
$$\xi(-x_n) \leqslant \xi_1(-a_n) - \xi_2(-b_n).$$

Pour démontrer qu'elle est suffisante, définissons l'espace Y, l'ensemble linéaire $R \subset Y$, le cône $S \subset Y$ et la fonctionnelle $\eta_0(y)$ tout comme dans la démonstration du théorème 2.77. Il existe alors un prolongement $\eta(y)$ de $\eta_0(y)$, linéaire et non-négatif dans Y. Pour l'établir, il suffit de constater, en vertu de 2.72, que la convergence

$$y_n + v_n \to 0 \quad \text{pour} \quad y_n \in R \quad \text{et} \quad v_n \geqslant 0$$

entraîne $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \eta_0(y_0) \leqslant 0$, c'est-à-dire que la convergence

$$\sup\left(|x_n + z_{n1}|, |x_n - z_{n2}|\right) \to 0 \quad \text{pour} \quad x_n \in X \quad \text{et} \quad z_{n1} \geqslant 0 \leqslant z_{n2}$$

entraîne $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \xi(x_n) \leqslant 0$, ce qui résulte aussitôt de l'hypothèse admise sur ξ. Les fonctionnelles $\xi_1(x)$ et $\xi_2(x)$, définies comme dans la démonstration du théorème 2.77, satisfont à la thèse qu'il s'agissait de démontrer.

2.772. *Etant donné un espace linéaire X avec la pseudonorme homogène $|x|$, la condition nécessaire et suffisante pour que, quelle que soit la fonctionnelle $\xi(x)$ linéaire dans cet espace avec la même pseudonorme, il existe deux fonctionnelles non-négatives, $\xi_1(x)$ et $\xi_2(x)$, linéaires dans X avec la pseudonorme $|x|$ et telles que*

$$\xi = \xi_1 - \xi_2, \qquad |\xi_1| + |\xi_2| \leqslant N|\xi|,$$

est la suivante:

$$|x| \leqslant N \quad \textit{pour} \quad a \leqslant x \leqslant b \quad \textit{où} \quad |a| = |b| = 1.$$

C'est une conséquence de 2.77; la démonstration que la condition est nécessaire fait intervenir l'existence, pour x donné, d'une fonctionnelle $\xi_0(x)$, linéaire dans X avec la pseudonorme homogène $|x|$ et telle que $|\xi_0| = 1$ et $\xi(x) = |x|$.

2.773. *Si X est un espace B_0^* avec la norme $|x|$, la condition nécessaire et suffisante pour que, quelle que soit la fonctionnelle linéaire $\xi(x)$, il existe deux fonctionnelles non-négatives, $\xi_1(x)$ et $\xi_2(x)$, linéaires dans X et telles que $\xi = \xi_1 - \xi_2$, est la suivante:*

$$x_n \to 0 \quad \textit{pour} \quad a_n \leqslant x_n \leqslant b_n \quad \textit{où} \quad a_n \to 0 \quad \textit{et} \quad b_n \to 0.$$

Soient, en effet, $t_n > 0$ et $t_n \to \infty$ pour $n = 1, 2, \ldots$ des nombres tels que $t_n a_n \to 0$ et $t_n b_n \to 0$. Il s'ensuit de 2.771 que $\xi(t_n x_n) \to 0$, quelle que soit la fonctionnelle $\xi(x)$ linéaire dans X. La suite $\{t_n x_n\}$

y converge donc faiblement vers 0. Par conséquent, elle est bornée en vertu de 2.31, d'où

$$x_n = \frac{1}{t_n}(t_n x_n) \to 0.$$

Ainsi, la condition est nécessaire. Sa suffisance est une conséquence triviale de 2.771.

2.78. *X étant un espace linéaire avec la pseudonorme homogène $|x|$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes:*

(1) $x_n \to 0$ *pour* $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$ *où* $a_n \to 0$ *et* $b_n \to 0$,

(2) $a_n \to 0$ *pour* $a_n \geqslant 0$ *et* $b_n \geqslant 0$ *tels que* $a_n + b_n \to 0$,

(3) *il existe un nombre* $\varepsilon > 0$ *tel que* $|a+b| \geqslant \varepsilon$ *lorsque* $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ *et* $|a| = |b| = 1$.

L'équivalence (1)$\rightleftarrows$(2) et l'implication (2)$\to$(3) sont triviales. Pour établir l'implication (3)$\to$(2), considérons un $a_n \geqslant 0$ et un $b_n \geqslant 0$ tels que $a_n + b_n \to 0$. Soit $|a_n| \geqslant r > 0$. Alors $|b_n|/|a_n| \to 1$. Posons

$$\gamma_n = \frac{2a_n}{|a_n| + |b_n|}, \quad \delta_n = \frac{2b_n}{|a_n| + |b_n|}, \quad \bar{\gamma}_n = \frac{\gamma_n}{|\gamma_n|} \quad \text{et} \quad \bar{\delta}_n = \frac{\delta_n}{|\delta_n|}.$$

On a $|\gamma_n| \to 1$ et $|\delta_n| \to 1$, d'où $\gamma_n - \bar{\gamma}_n \to 0$ et $\delta_n - \bar{\delta}_n \to 0$. Comme $\gamma_n + \delta_n \to 0$, il vient $\bar{\gamma}_n + \bar{\delta}_n \to 0$. Or, c'est impossible, car

$$\bar{\gamma}_n \geqslant 0, \quad |\bar{\gamma}_n| = 1, \quad \bar{\delta}_n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad |\bar{\delta}_n| = 1,$$

d'où $|\bar{\gamma}_n + \bar{\delta}_n| \geqslant \varepsilon$ en vertu de (3).

2.8. X étant un espace B_0^* avec la norme $|x|$, on appelle *espace conjugué avec* X l'espace Ξ de toutes les fonctionnelles linéaires $\xi(x)$ définies dans X, les opérations étant entendues dans leur sens usuel et la convergence $\xi_n \to \xi$ étant définie comme la convergence $\xi_n(x) \to \xi(x)$ *uniforme* dans un entourage de l'élément 0 de X[8]).

[8]) La convergence ainsi définie est un point de départ pour la théorie des inégalités dans les espaces B_0 et leurs espaces conjugués; le cas particulier de cette théorie est celle des équations. J. Dieudonné et L. Schwartz (loco cit.), qui y développent aussi la théorie de l'équation linéaire dans les espaces B_0, s'y servent de la notion topologique de convergence dans les espaces conjugués. Une suite $\{\xi_n\}$ *converge* — selon ces auteurs — vers ξ_0 lorsque $\xi_n(x)$ tend uniformément à $\xi(x)$ dans tout ensemble borné. L'exemple 2.81 montre que les deux notions de convergence ne sont pas équivalentes.

2.81. L'espace conjugué Ξ est un espace L (au sens de Fréchet) linéaire. Toutefois, il peut ne pas être un espace L^*, c'est-à-dire satisfaire à l'axiome:

Si toute suite partielle $\{\xi_{p_n}\}$ extraite de la suite $\{\xi_n\}$ contient une suite $\{\xi_{p_{q_n}}\}$ convergente vers ξ, la suite $\{\xi_n\}$ converge vers ξ.

Considérons, en effet, l'exemple suivant, qui nous a été communiqué par M. Eidelheit en 1938:

Soit $N = K_1 + K_2 + \ldots$ une décomposition de l'ensemble N des entiers positifs en sous-suites infinies croissantes et disjointes. Définissons la suite double $\{n_{ik}\}$ par les conditions:

$$n_{ik} = \begin{cases} m & \text{pour } k \in K_m \text{ si } m \neq i, \\ j & \text{pour } k \in K_i \text{ si } k \text{ est le } j\text{-ième terme de la suite } K_i. \end{cases}$$

Il est facile de constater que

1° pour tout $i_0 = 1, 2, \ldots$, il existe une suite croissante d'indices $\{k_p\}$ pour lesquels toutes les suites $\{n_{ik_p}\}$, où $i = 1, 2, \ldots, i_0$, sont bornées;

2° toute suite croissante d'indices $\{k_p\}$ contient une suite partielle $\{k_{q_p}\}$ telle que la suite $\{n_{ik_{q_p}}\}$ croît indéfiniment pour un i.

Désignons par X l'espace B_0 de toutes les suites numériques $x = \{t_k\}$ telles que

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_{ik} |t_k| < \infty \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots,$$

avec les pseudonormes

$$|x|_i = \sum_{k=1}^{\infty} n_{ik} |t_k|.$$

La formule $\xi_k(x) = t_k$, où t_k est le k-ième terme de la suite x, définit les fonctionnelles linéaires dans X; il résulte de 1° que ξ_k ne converge pas vers 0 et de 2° que toute suite partielle $\{\xi_{r_k}\}$ contient une suite $\{\xi_{r_{s_k}}\}$ qui converge vers 0.

2.82. En particulier, X étant un espace B^* avec la norme $|x|$,

$$\xi_n \to \xi \quad \text{équivaut à} \quad |\xi_n - \xi| \to 0.$$

Alors l'espace Ξ est isomorphe à un espace B; il est donc de II$^{\text{me}}$ catégorie. On a cependant le théorème:

2.821. *Si l'espace X n'est isomorphe à aucun espace B^*, l'espace conjugué Ξ est de I$^{\text{re}}$ catégorie.*

Il est, par conséquent, non métrisable d'une façon complète.

Soit, en effet, Ξ_k l'ensemble de toutes les fonctionnelles $\xi \epsilon \Xi$ telles que

$$|\xi(x)| \leqslant k \sup\left(|x|_1, |x|_2, \ldots, |x|_k\right) \quad \text{pour tout} \quad x \epsilon X.$$

Les ensembles Ξ_k sont fermés et l'on a $\Xi = \sum_{k=1}^{\infty} \Xi_k$ en vertu de 2.21. Reste à prouver qu'aucun Ξ_k n'a de points intérieurs: or, si $\xi_0 \epsilon \Xi_k$, il existe en vertu de 2.22 une fonctionnelle $\bar{\xi}_0$ d'ordre au moins $k+1$, de sorte qu'en posant $\xi_n = \xi_0 + \bar{\xi}_0/n$, il vient $\xi_n \epsilon \Xi - \Xi_k$ et $\xi_n \to \xi_0$.

2.822. Une *suite* $\{\xi_n\}$ d'éléments de l'espace Ξ s'appelle *bornée* lorsque

$$t_n \to 0 \quad \text{entraîne} \quad t_n \xi_n \to 0;$$

un *ensemble* situé dans Ξ est dit *borné* lorsque toute suite de ses éléments est une suite bornée.

Il est aisé de voir que

Pour qu'un ensemble $\Omega \epsilon \Xi$ soit borné, il faut et il suffit que

$$\sup_{\xi \epsilon \Omega} |\xi(x)| < \infty \quad \textit{pour tout} \quad x \epsilon X,$$

ou bien qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$|x| \leqslant \varepsilon \quad \textit{entraîne} \quad |\xi(x)| \leqslant 1 \quad \textit{pour tout} \quad \xi \epsilon \Omega.$$

2.823. Soit

$$\Gamma = \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_m$$

un espace linéaire où tout Γ_m est un ensemble linéaire et $\Gamma_m \subset \Gamma_{m+1}$. Admettons que Γ_m est un espace B avec la norme $|\gamma|_m$ et que

$$|\gamma_n - \gamma|_m \to 0 \text{ entraîne } |\gamma_n - \gamma|_{m+1} \to 0 \text{ pour } \gamma_n \epsilon \Gamma_m \text{ et } \gamma \epsilon \Gamma_m.$$

Définissons la convergence $\gamma_n \to \gamma$ dans Γ par l'existence d'un m pour lequel $\gamma_n \epsilon \Gamma_m$, $\gamma \epsilon \Gamma_m$ et $|\gamma_n - \gamma|_m \to 0$. Alors Γ est un espace L (au sens de Fréchet) linéaire.

Or, X étant un espace B_0^*, l'espace conjugué Ξ est isomorphe à un espace L linéaire qui est un espace Γ de ce type, à savoir composé de toutes les fonctionnelles ξ linéaires dans X, où Γ_m est l'ensemble des fonctionnelles $\xi(x)$ continues avec la pseudonorme $\sup\left(|x|_1, |x|_2, \ldots, |x|_m\right)$ et dont les normes $|\xi|_m$ sont définies comme les plus petits h_m pour lesquels

$$|\xi(x)| \leqslant h_m \sup\left(|x|_1, |x|_2, \ldots, |x|_m\right).$$

L'existence de cette isomorphie fait intervenir l'équivalence entre la convergence $\xi_n \to \xi$ et l'existence d'un indice m pour lequel $\xi_n \epsilon \Gamma_m$, $\xi \epsilon \Gamma_m$ et $|\xi_n - \xi|_m \to 0$.

En recourant à la forme générale, établie dans 2.33, des fonctionnelles linéaires définies dans les espaces B_0 envisagés dans 1.3, il est facile de caractériser les espaces conjugués avec eux comme certains espaces L linéaires du type Γ qui vient d'être décrit.

2.83. Soient X et Y des espaces B_0^*, Ξ et H les espaces conjugués avec eux respectivement et $\eta = \Phi(\xi)$ une opération additive définie dans Ξ, les valeurs de cette opération appartenant à H.

On constate aisément que si l'opération $\Phi(\xi)$ est continue, l'image $\Phi(\Omega) \subset H$ de tout ensemble borné $\Omega \subset \Xi$ est bornée et que, réciproquement, si pour $\xi_n \to 0$ la suite $\{\Phi(\xi_n)\}$ est bornée, l'opération $\Phi(\xi)$ est continue.

2.831. Soit à présent Y un espace F, l'espace X étant, comme précédemment, un B_0^* et Ξ — l'espace conjugué avec X.

Si la suite $\{\Phi_n(\xi)\}$ d'opérations linéaires dans l'espace Ξ et dont les valeurs appartiennent à Y est bornée pour tout $\xi \epsilon \Xi$,

$$\xi_n \to 0 \quad \textit{entraîne} \quad \Phi_n(\xi_n) \to 0.$$

En effet, considérons d'abord le cas particulier où

$$\Phi_n(\xi) \to 0 \quad \text{pour tout} \quad \xi \epsilon \Xi.$$

Supposons qu'il existe une suite $\xi_n \to 0$ et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que $|\Phi_n(\xi_n)| \geqslant \varepsilon$ pour une infinité des valeurs de n. Définissons par induction une suite croissante d'indices $\{n_i\}$ telle que

$$\left.\begin{aligned} |\Phi_{n_i}(\xi_{n_j})| &\leqslant \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \\ |\Phi_{n_j}(\xi_{n_i})| &\leqslant \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad j < i = 2, 3, \ldots,$$

$$|\Phi_{n_i}(\xi_{n_i})| \geqslant \varepsilon \qquad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots$$

Comme $\xi_{n_i} \to 0$, la suite $\{n_i\}$ renferme une suite partielle $\{p_l\}$ pour laquelle la série $\sum_{l=1}^{\infty} \xi_{p_l}$ converge. Désignons-en la somme par ξ.

Alors

$$|\Phi_{p_m}(\xi)| = \left|\sum_{l=1}^{m-1}\Phi_{p_m}(\xi_{p_l}) + \Phi_{p_m}(\xi_{p_m}) + \sum_{l=m+1}^{\infty}\Phi_{p_m}(\xi_{p_l})\right|$$

$$\geqslant |\Phi_{p_m}(\xi_{p_m})| - \sum_{l=1}^{m-1}|\Phi_{p_m}(\xi_{p_l})| - \sum_{l=m+1}^{\infty}|\Phi_{p_m}(\xi_{p_l})| \geqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2},$$

contrairement à l'hypothèse.

Considérons à présent le cas général, où la suite $\{\Phi_n(\xi)\}$ est bornée pour tout $\xi \epsilon \Xi$ et admettons que $\xi_n \to 0$. Cette convergence entraîne l'existence d'une suite $\{t_n\}$ telle que $t_n > 0$ pour $n = 1, 2, \ldots$, $t_n \to \infty$ et $t_n \xi_n \to 0$. Comme

$$\frac{1}{t_n}\Phi_n(\xi) \to 0 \quad \text{pour tout} \quad \xi \epsilon \Xi,$$

on conclut, en appliquant le cas particulier envisagé, que

$$\Phi_n(\xi_n) = \frac{1}{t_n}\Phi_n(t_n \xi_n) \to 0,$$

c. q. f. d.

2.832. Dans les mêmes hypothèses:

Si la suite $\{\Phi_n(\xi)\}$ d'opérations linéaires est, en outre, convergente dans un ensemble Ω dense dans Ξ, elle converge dans l'espace Ξ vers une opération linéaire.

Supposons, en effet, qu'une suite $\{\Phi_n(\xi_0)\}$ soit divergente. Il existe donc un nombre $\varepsilon > 0$ et deux suites croissantes $\{m_i\}$ et $\{n_i\}$ telles que

$$|\Phi_{m_i}(\xi_0) - \Phi_{n_i}(\xi_0)| \geqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots$$

Soit $\xi_l \epsilon \Omega$ et $\xi_l \to \xi_0$. Choisissons une suite croissante d'indices $\{r_l\}$ tels que la relation $|\Phi_{p_l}(\xi_l) - \Phi_{q_l}(\xi_l)| \leqslant \varepsilon/2$, où $p_l = m_{r_l}$ et $q_l = n_{r_l}$, se présente pour tout $l = 1, 2, \ldots$ En vertu de la formule

$$|\Phi_{p_l}(\xi_0) - \Phi_{q_l}(\xi_0)| \leqslant |\Phi_{p_l}(\xi_0 - \xi_l)| + |\Phi_{p_l}(\xi_l) - \Phi_{q_l}(\xi_l)| + |\Phi_{q_l}(\xi_l - \xi_0)|,$$

où

$$\Phi_{p_l}(\xi_0 - \xi_l) \to 0 \quad \text{et} \quad \Phi_{q_l}(\xi_l - \xi_0) \to 0$$

par suite de 2.831, on a donc $|\Phi_{p_l}(\xi_0) - \Phi_{q_l}(\xi_0)| < \varepsilon$ à partir d'un l suffisamment grand, c'est-à-dire une contradiction avec la définition des suites $\{m_i\}$ et $\{n_i\}$.

Il est à remarquer que les théorèmes 2.831 et 2.832 subsistent avec leurs démonstrations lorsque Ξ est remplacé par un espace L linéaire quelconque dans lequel la convergence $\xi_n \to \xi$ satisfait aux conditions suivantes:

I. $\xi_n \to 0$ entraîne l'existence d'une suite $\{t_n\}$ telle que $t_n \to \infty$ et $t_n \xi_n \to 0$;

II. $\xi_n \to 0$ entraîne l'existence d'une suite croissante d'indices $\{p_n\}$ et d'un élément ξ tels que $\sum_{k=1}^{n} \xi_{p_k} \to \xi$.

2.9. X étant un espace linéaire avec la pseudonorme homogène $|x|$, posons pour tout ensemble $R \subset X$

$$\varrho(R) = \inf_{\substack{\xi \epsilon \Xi \\ |\xi| = 1}} \sup_{x \epsilon R} |\xi(x)|.$$

R est dit *ensemble normant* lorsque $\varrho(R) > 0$.

2.91. *Pour qu'un ensemble convexe $V \subset X$ ayant 0 pour centre de symétrie soit dense dans la sphère $|x| \leqslant \varrho$, il faut et il suffit que $\varrho(V) \geqslant \varrho$.*

La nécessité de la condition est immédiate:

$$\sup_{x \epsilon V} |\xi(x)| \geqslant \sup_{|x| \leqslant \varrho} |\xi(x)| = \varrho \quad \text{pour} \quad \xi \epsilon \Xi(|x|) \text{ et } |\xi| = 1.$$

Pour montrer qu'elle est suffisante, supposons que $|x_0| < \varrho$ et x_0 non $\epsilon \overline{V}$. Choisissons un tel $r > 0$ que la sphère K de centre x_0 et de rayon r soit disjointe de la fermeture $\overline{V}$. En vertu de 2.53, l'espace X contient un plan H qui y sépare les ensembles $\overline{V}$ et K; en d'autres termes, il existe une fonctionnelle $\xi \epsilon \Xi(|x|)$ telle que $\xi \neq 0$ et que

$$\xi(\bar{x}) \leqslant \xi(x) \quad \text{pour} \quad \bar{x} \epsilon V \quad \text{et} \quad x \epsilon K.$$

Il vient $\xi(x_0) \geqslant \xi(0) = 0$. Cependant $\xi(x_0) = 0$ entraînerait

$$\xi(z) = \xi(z + x_0) \geqslant \xi(0) = 0 \quad \text{pour} \quad |z| \leqslant r,$$

c'est-à-dire $\xi = 0$, contrairement à ce qui vient d'être établi. On a donc $\xi(x_0) > 0$ et en posant $\xi_0 = \xi/\xi(x_0)$, il vient $\xi_0(\bar{x}) \leqslant 1$ pour tout $\bar{x} \epsilon V$ et $\xi_0(x_0) = 1$, d'où en tenant compte de la symétrie de V,

$$\sup_{x \epsilon V} |\xi_0(x)| \leqslant 1 = \xi_0(x_0) < |\xi_0| \varrho.$$

Or, c'est impossible puisqu'on a d'autre part

$$\sup_{x \epsilon V} |\xi_0(x)| \geqslant |\xi_0| \varrho(V) \geqslant |\xi_0| \varrho.$$

2.92. *Pour qu'un ensemble $R\subset X$ soit tel que tout élément $x\epsilon X$ pour lequel $|x|<\varrho$ se laisse représenter dans la forme*

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}t_n x_n \quad \text{où} \quad x_n\epsilon R \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty}|t_n|\leqslant 1,$$

il faut et il suffit que $\varrho(R)\geqslant\varrho$.

La condition est nécessaire. Soient, en effet,

$$\xi\epsilon\Xi,\ |\xi|=1, \qquad x=\sum_{n=1}^{\infty}t_n x_n, \qquad |x|<\varrho,\ x_n\epsilon R \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty}|t_n|\leqslant 1.$$

Alors

$$|\xi(x)|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|t_n|\,|\xi(x_n)|\leqslant\sup_n|\xi(x_n)|\leqslant\sup_{x\epsilon R}|\xi(x)|,$$

d'où

$$\sup_{x\epsilon R}|\xi(x)|\geqslant\sup_{|x|<\varrho}|\xi(x)|=\varrho \quad \text{et} \quad \varrho(R)\geqslant\varrho.$$

Pour montrer que la condition en question est suffisante, soit V l'ensemble de tous les éléments de la forme

$$v=\sum_{k=1}^{p}s_k x_k \quad \text{où} \quad x_k\epsilon R \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{p}|s_k|\leqslant 1.$$

L'ensemble V est convexe, il a l'élément 0 pour centre de symétrie et on a $\varrho(V)\geqslant\varrho(R)\geqslant\varrho$. En vertu de 2.91, l'ensemble V est donc dense dans la sphère $|x|\leqslant\varrho$. Si $|x_0|<\varrho$, il existe[9]) des éléments $v_n\epsilon V$ et des nombres $t_n\geqslant 0$ tels que

$$x_0=\sum_{n=1}^{\infty}t_n v_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty}t_n\leqslant 1.$$

Comme $v_n\epsilon V$, on peut écrire

$$v_n=\sum_{k=1}^{p_n}s_{kn}x_{kn},$$

où

$$x_{kn}\epsilon R \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{p_n}|s_{kn}|\leqslant 1.$$

Alors

$$x_0=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{p_n}t_n s_{kn}x_{kn} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{p_n}|t_n s_{kn}|\leqslant 1.$$

---

[9]) Cf. J. Schauder, *Über die Umkehrung linearer stetiger Funktionaloperationen*, Studia Mathematica 2 (1930), p. 1-6.

2.93. Soient à présent X et Y des espaces linéaires avec les pseudonormes homogènes respectives $|x|$ et $|y|$, et $y=F(x)$ une opération linéaire définie dans X, les valeurs de cette opération appartenant à Y.

Appelons *opération conjuguée avec* $y=F(x)$ l'opération $\xi=\Phi(\eta)$ définie dans l'espace $H(|y|)$ par la condition

$$\xi(x)=\eta\big(F(x)\big) \quad \text{pour} \quad x\epsilon X.$$

Ses valeurs appartiennent donc à l'espace $\Xi(|x|)$ et elle est évidemment une opération linéaire.

Soit enfin T un cône situé dans l'espace Y, ce qui définit, conformément à 2.61, le sens des expressions telles que $\eta\geqslant 0$ etc. pour les fonctionnelles $\eta\epsilon H\equiv H(|y|)$.

2.94. *Etant donnée un $y_0\epsilon Y$ tel que $|y_0|\leqslant 1$, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence des $y_n\epsilon Y$ tels que $|y_n|\leqslant 1$, $y_n\to y_0$ et que les inégalites $F(x)\geqslant y_n$ (où $n=1,2,\ldots$) aient des solutions dans la sphère $|x|\leqslant N$, est la suivante:*

$$\eta\geqslant 0 \ \textit{entraîne} \ \eta(y_0)\leqslant N|\Phi(\eta)| \ \textit{pour tout} \ \eta\epsilon H.$$

La nécessité de la condition est manifeste: on a $\eta(y_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\eta(y_n)$ et en admettant que $F(x_n)\geqslant y_n$ où $|x_n|\leqslant N$, on voit $\eta\geqslant 0$ entraîner

$$\eta(y_n)\leqslant\eta\big(F(x_n)\big)\leqslant N|\Phi(\eta)|$$

pour tout $\eta\epsilon H$.

Pour montrer que la condition est suffisante, envisageons l'ensemble V de tous les $y\epsilon Y$ pour lesquels l'inégalité $F(x)\geqslant y$ a une solution dans la sphère $|x|\leqslant N$. Il s'agit de vérifier que $y_0\epsilon\overline{V}$. Or, s'il n'en était pas ainsi, il existerait un $r>0$ tel que la sphère K de centre y_0 et de rayon r serait disjointe de l'ensemble $\overline{V}$. Cet ensemble étant convexe, il existerait en vertu de 2.53 un plan $H\subset Y$ séparant $\overline{V}$ et K ou — ce qui revient au même — un $\eta\epsilon H$ non nul et un nombre c tels que

$$\eta(\overline{y})\leqslant c\leqslant\eta(y) \quad \text{pour} \quad \overline{y}\epsilon\overline{V} \quad \text{et} \quad y\epsilon K.$$

On a $0=\eta(0)\leqslant c\leqslant\eta(y_0)$ et l'égalité $\eta(y_0)=c$ est exclue, puisqu'elle entraînerait

$$\eta(y)=\eta(y_0+y)-c\geqslant 0 \quad \text{pour} \quad |y|\leqslant r,$$

ce qui est impossible. En choisissant donc un nombre c_0 de manière à avoir $c<c_0<\eta(y_0)$ et en posant $\eta_0=\eta/c_0$, il vient

$$\eta_0(y)\leqslant 1 \quad \text{pour tout} \quad y\,\epsilon\, V \quad \text{et} \quad \eta_0(y_0)>1.$$

On a $\eta_0\geqslant 0$, car $-py\,\epsilon\,V$ pour tout $y\geqslant 0$ et et pour tout $p=1,2,\ldots$, donc $\eta_0(-py)\leqslant 1$ d'où $\eta_0(y)\geqslant 0$. En vertu de l'hypothèse, on a par conséquent

$$\eta_0(y_0)\leqslant N\,|\Phi(\eta_0)|=\sup_{|x|\leqslant N}\left|\eta_0\big(F(x)\big)\right|$$

et comme $F(x)\,\epsilon\,V$ pour $|x|\leqslant N$, il vient $\eta_0(y_0)\leqslant 1$, contrairement à l'inégalité déduite à l'instant.

2.95. *Si l'espace X est complet et le cône T est fermé, la condition nécessaire et suffisante pour que, quel que soit $y\,\epsilon\,Y$ de pseudonorme $|y|<1$, l'inégalité $F(x)\geqslant y$ ait des solutions dans la sphère $|x|\leqslant N$, est la suivante:*

$$\eta\geqslant 0 \ \textit{entraîne}\ |\eta|\leqslant N\,|\Phi(\eta)| \ \textit{pour tout}\ \eta\,\epsilon\, H.$$

La nécessité de la condition résulte de 2.94.

En vertu du même théorème, étant donné un $\varrho>0$ arbitraire, l'ensemble V_ϱ de tous les $y\,\epsilon\,Y$ de norme $|y|\leqslant\varrho$ pour lesquels l'inégalité $F(x)\geqslant y$ a des solutions dans la sphère $|x|\leqslant N\varrho$ est dense dans la sphère $|y|\leqslant\varrho$. Soient $y_0\,\epsilon\,Y$, $\varrho_0=|y_0|<1$, $\varrho_n>0$ pour $n=1,2,\ldots$ et $\sum_{n=0}^{\infty}\varrho_n\leqslant 1$. Il existe des $y_n\,\epsilon\,V_{\varrho_{n-1}}$ tels que

$$\Big|y_0-\sum_{k=1}^{n}y_k\Big|\leqslant\varrho_n.$$

On a par conséquent $F(x_n)\geqslant y_n$ pour certains $x_n\,\epsilon\,X$ tels que $|x_n|\leqslant N\varrho_{n-1}$. En posant $x_0=\sum_{n=1}^{\infty}x_n$, il vient $|x_0|\leqslant N$ et $F(x_0)\geqslant y_0$, le cône T étant fermé par hypothèse. La condition est donc suffisante.

2.951. Il est à noter que l'hypothèse $|y|<1$ dans le théorème 2.95 ne peut pas être remplacée par l'hypothèse moins restrictive $|y|\leqslant 1$, même dans le cas particulier où le cône $T\subset Y$ se réduit à l'élément 0 et l'inégalité $F(x)\geqslant y$ devient en conséquence l'égalité $F(x)=y$.

Considérons, en effet, l'exemple suivant. Soient $R\subset Y$ un sous-ensemble dense de la sphère $|y|<1$ et X l'espace B formé de toutes les fonctions $x=x(r)$, où $r\,\epsilon\,R$, ayant les valeurs réelles et telles que $\sum_{r\epsilon R}|x(r)|<\infty$, les opérations étant entendues dans le sens usuel et la norme étant définie par la formule $|x|=\sum_{r\epsilon R}|x(r)|$. L'opération $F(x)$ définie dans X par la formule $F(x)=\sum_{r\epsilon R}rx(r)$ est linéaire et ses valeurs sont situées dans Y. En vertu de 2.92, l'équation $F(x)=y$ a des solutions dans la sphère $|x|\leqslant 1$ pour tout $y\,\epsilon\,Y$ de norme $|y|<1$, mais elle n'en a évidemment aucune lorsque $|y|=1$. Néanmoins, la condition de 2.95 est satisfaite, car pour tout $\eta\,\epsilon\,H$

$$|\Phi(\eta)|=\sup_{|x|\leqslant 1}\left|\eta\big(F(x)\big)\right|=\sup_{|x|\leqslant 1}\Big|\sum_{r\epsilon R}x(r)\,\eta(r)\Big|$$
$$=\sup_{r\epsilon R}|\eta(r)|=|\eta|.$$

2.952. *Si les deux espaces X et Y sont complets et le cône T est fermé, la condition nécessaire et suffisante pour que, quel que soit $y\,\epsilon\,Y$, l'inégalité $F(x)\geqslant y$ ait des solutions $x\,\epsilon\,X$, est l'existence d'un nombre N tel que*

$$\eta\geqslant 0 \ \textit{entraîne}\ |\eta|\leqslant N\,|\Phi(\eta)| \ \textit{pour tout}\ \eta\,\epsilon\, H.$$

Seule la nécessité de la condition exige une démonstration.

Soit R_k, où $k=1,2,\ldots$, l'ensemble de tous les $y\,\epsilon\,Y$ tels que

$\eta\geqslant 0$ entraîne $|\eta(y)|\leqslant k\,|\Phi(\eta)|$ pour tout $\eta\,\epsilon\,H$.

Les ensembles R_k sont fermés et l'on a

$$Y=\sum_{k=1}^{\infty}R_k$$

en vertu de 2.94. L'un d'eux contient une sphère; désignons par k_0 l'indice de cet ensemble, par y_0 le centre de la sphère et par ϱ son rayon. On a donc

$$|\eta(\varrho y+y_0)|\leqslant k_0\,|\Phi(\eta)|$$

pour tout $y\,\epsilon\,Y$ de norme $|y|\leqslant 1$, d'où

$$|\eta(y)|\leqslant 2k_0/\varrho\,|\Phi(\eta)|$$

pour tout $y\,\epsilon\,Y$ de norme $|y|\leqslant 1$ et pour tout $\eta\geqslant 0$ de H.

2.96. Soit $S\subset X$ un cône, ce qui définit, conformément à 2.61, la relation $\xi_1\leqslant\xi_2$ pour les fonctionnelles linéaires.

Etant donné un $\xi_0 \epsilon \Xi$, la condition nécessaire et suffisante pour que l'inégalité $\Phi(\eta) \geqslant \xi_0$ ait une solution dans la sphère $|\eta| \leqslant N$, est la suivante:

$$x \geqslant 0 \text{ entraîne } \xi_0(x) \leqslant N|F(x)| \text{ pour tout } x \epsilon X.$$

En effet, $\Phi(\eta) \geqslant \xi_0$ équivaut à $\eta(F(x)) \geqslant \xi_0(x)$ pour tout élément $x \geqslant 0$ de X. Il suffit donc d'appliquer 2.41 à $\omega(y) = N|y|$.

2.97. *Pour que, quel que soit $\xi \epsilon \Xi$ de norme $|\xi| \leqslant 1$, l'inégalité $\Phi(\eta) \geqslant \xi$ ait une solution dans la sphère $|\eta| \leqslant N$, il faut et il suffit que*

$$x \geqslant 0 \text{ entraîne } |x| \leqslant N|F(x)| \text{ pour tout } x \epsilon X.$$

C'est une conséquence évidente de 2.96, car

$$\sup_{|\xi| \leqslant 1} |\xi(x)| = |x|.$$

2.971. *Pour que, quel que soit $\xi \epsilon \Xi$, l'inégalité $\Phi(\eta) \geqslant \xi$ ait des solutions $\eta \epsilon H$, il faut et il suffit qu'il existe un nombre N tel que*

$$x \geqslant 0 \quad \text{entraîne} \quad |x| \leqslant N|F(x)| \quad \text{pour tout} \quad x \epsilon X.$$

La démonstration ne diffère de celle du théorème 2.952 que par l'application de 2.96 au lieu de 2.94.

2.972. Ajoutons deux corollaires suivants:

Ad 2.952. Dans le cas particulier dans lequel l'espace Y est de dimension finie, la condition nécessaire et suffisante pour que, quel que soit $y \epsilon Y$, l'inégalité $F(x) \geqslant y$ ait des solutions $x \epsilon X$, est la suivante:

$$(\ast\ast) \qquad \eta \geqslant 0 \text{ et } \Phi(\eta) = 0 \text{ entraînent } \eta = 0 \text{ pour tout } \eta \epsilon H.$$

Il en est de même lorsque le cône T a des points intérieurs.

En effet, si l'espace Y est de dimension finie, la compacité de l'espace H et la condition $(\ast\ast)$ entraînent aussitôt l'inégalité $|\eta| \leqslant N|\Phi(\eta)|$ pour $\eta \geqslant 0$ (voir le théorème 2.952).

Admettons à son tour que le cône T a des points intérieurs. Alors l'ensemble linéaire $R \subset Y$ composé de tous les éléments $F(x)$ où $x \epsilon X$ empiète sur l'intérieur de T, car en cas contraire il existerait dans H, en vertu de 2.51, un $\eta \neq 0$ tel que

$$\eta(F(x)) = 0 \quad \text{pour tout} \quad x \epsilon X$$

et

$$\eta(y) \geqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad y \epsilon T,$$

en contradiction avec $(\ast\ast)$. Il existe donc un $x_0 \epsilon X$ pour lequel $F(x_0)$ est un point intérieur de T. On a par conséquent

$$F(x_0) - \frac{1}{n} y \geqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad y \epsilon Y,$$

c'est-à-dire $F(nx_0) = nF(x_0) \geqslant y$ à partir d'un n suffisamment grand.

Ad 2.971. Dans le cas particulier dans lequel l'espace X est de dimension finie, la condition nécessaire et suffisante pour que, quel que soit $\xi \epsilon \Xi$, l'inégalité $\Phi(\eta) \geqslant \xi$ ait des solutions $\eta \epsilon H$, est la suivante:

$$x \geqslant 0 \quad \text{et} \quad F(x) = 0 \quad \text{entraînent} \quad x = 0 \quad \text{pour tout} \quad x \epsilon X.$$

La vérification est facile.

2.98. Soit X un espace B_0^* avec la norme $|x|$.

Appelons *ensemble normant* tout ensemble $R \subset X$ tel que toute suite $\{\xi_n\}$ d'éléments de Ξ pour laquelle

$$\sup_{x \epsilon R} |\xi_n(x)| < \infty$$

est bornée.

2.981. *Pour qu'un ensemble convexe $V \subset X$ ayant le point 0 pour centre de symétrie soit dense dans un entourage de ce point, il faut et il suffit que V soit un ensemble normant.*

La nécessité de la condition est triviale. Pour montrer qu'elle est suffisante, supposons qu'il existe une suite $\{x_n\}$ telle que $x_n \to 0$ et x_n non $\epsilon \overline{V}$ pour $n = 1, 2, \ldots$ Un raisonnement analogue à celui dont nous nous sommes servi dans la démonstration de 2.91 conduit à l'existence des $\xi_n \epsilon \Xi$ tels que

$$\xi_n(x) \leqslant 1 \quad \text{pour tout} \quad x \epsilon V \quad \text{et} \quad \xi_n(x_n) = 1.$$

Il en résulte que

$$\sup_{x \epsilon V} |\xi_n(x)| \leqslant 1,$$

donc que la suite $\{\xi_n\}$ est bornée. Il existe par conséquent deux nombres N et $\varepsilon > 0$ tels que

$$|x| \leqslant \varepsilon \text{ entraîne } |\xi_n(x)| \leqslant N \text{ pour } n = 1, 2, \ldots$$

En choisissant des nombres t_n de manière que $0 < t_n \to \infty$ et $t_n x_n \to 0$, on aurait

$$1=|\xi_n(x_n)|\leqslant\frac{1}{t_n}N$$

à partir d'un n suffisamment grand, ce qui est absurde.

2.99. La définition de l'opération $\xi=\Phi(\eta)$, où $\eta\epsilon H$ et $\xi\epsilon\Xi$, *conjuguée* avec l'opération linéaire $y=F(x)$, où $x\epsilon X$ et $y\epsilon Y$ (voir 2.93), étant la même dans le cas où X et Y sont des espaces B_0^* (donc où $\xi\epsilon\Xi$ et $\eta\epsilon H$), on a les théorèmes suivants pour les X et Y qui sont des espaces B_0:

2.991. *Si le cône $T\subset Y$ est fermé et l'inégalité $F(x)\geqslant y$ a pour tout $y\epsilon Y$ des solutions $x\epsilon X$, alors*

$$\eta_n\geqslant 0 \text{ et } \Phi(\eta_n)\to 0 \text{ entraînent } \eta_n\to 0 \text{ pour } \eta_n\epsilon H;$$

réciproquement, cette condition étant satisfaite et $r>0$ étant arbitraire, l'ensemble V_r des $y\epsilon Y$ pour lesquels l'inégalité $F(x)\geqslant y$ a des solutions dans la sphère $|x|\leqslant r$ contient une sphère de centre 0.

Admettons, en effet, que pour tout $y\epsilon Y$ l'inégalité en question se présente pour un $x\epsilon X$ et considérons des $\eta_n\epsilon H$ tels que $\eta_n\geqslant 0$ et $\Phi(\eta_n)\to 0$. Il existe des t_n tels que $0<t_n\to\infty$ et $t_n\Phi(\eta_n)\to 0$. On a donc

$$t_n\eta_n\big(F(x)\big)\to 0 \quad \text{pour tout} \quad x\epsilon X.$$

Etant donné un $y\epsilon Y$, choisissons deux éléments x' et x'' de X pour lesquels

$$F(x')\geqslant y \quad \text{et} \quad F(x'')>-y.$$

On a donc

$$|t_n\eta_n(y)|\leqslant\sup\left[\left|t_n\eta_n\big(F(x')\big)\right|, \left|t_n\eta_n\big(F(x'')\big)\right|\right],$$

d'où $t_n\eta_n(y)\to 0$. La suite $\{t_n\eta_n\}$ étant bornée, on conclut que $\eta_n\to 0$.

Pour établir la réciproque, il s'agit de montrer que l'ensemble V_r est dense dans un entourage de 0. Soient $|x|_i$ des pseudonormes satisfaisant à la condition (*). Considérons l'ensemble V_r^m de tous les $y\epsilon Y$ pour lesquels il existe un m tel que l'on a

$$F(x)\geqslant y \text{ pour un } x \text{ tel que } |x|_i\leqslant r \text{ pour } i=1,2,\dots,m.$$

L'ensemble V_r^m ainsi défini est dense dans un entourage de l'élément 0, car il existerait en cas contraire des $y_n\epsilon Y-\overline{V}_r^m$ tels que $y_n\to 0$. L'ensemble $\overline{V}_r^m$ est convexe; il existe d'autre part un ensemble convexe disjoint de $\overline{V}_r^m$ et dont y_n est un point intérieur. Un raisonnement analogue à celui qui nous a servi pour établir 2.94 permet alors de conclure sur l'existence des $\eta_n\epsilon H$ tels que

$$\eta_n\geqslant 0, \quad \eta_n(y)\leqslant 1 \quad \text{pour} \quad y\epsilon V_r^m \quad \text{et} \quad \eta_n(y_n)=1.$$

On a donc, en particulier, $\eta_n\big(F(x)\big)\leqslant 1$ lorsque $|x|_i\leqslant r$ pour $i=1,2,\dots,m$. En choisissant des t_n tels que $0<t_n\to\infty$ et $t_ny_n\to 0$, on a par suite

$$\Phi\left(\frac{1}{t_n}\eta_n\right)=\frac{1}{t_n}\Phi(\eta_n)\to 0,$$

d'où $\eta_n/t_n\to 0$ en vertu de l'hypothèse et par conséquent

$$\eta_n(y_n)=\frac{1}{t_n}\eta_n(t_ny_n)\to 0,$$

contrairement à l'égalité $\eta_n(y_n)=1$ de tout-à-l'heure.

Ceci établi, choisissons un $\delta>0$ et un m de façon que

$$|x|_i\leqslant\delta \text{ pour } i=1,2,\dots,m \quad \text{entraîne} \quad |x|\leqslant r.$$

En outre, choisissons des $r_n>0$ et des $\varrho_n>0$ tels que

$$\sum_{n=0}^{\infty}r_n\leqslant\delta, \qquad \varrho_n\to 0$$

(où $\varrho_0=\varrho$) et que l'ensemble $V_{r_n}^{m+n}$ soit dense dans la sphère $|y|\leqslant\varrho_n$. Il est aisé de voir que, pour tout $y_0\epsilon Y$ de norme $|y_0|<\varrho$, il existe des $y_n\epsilon Y$ tels que

$$y_n\epsilon V_{r_{n-1}}^{m+n-1} \quad \text{et} \quad \left|y_0-\sum_{k=1}^{n}y_k\right|\leqslant\varrho_n.$$

En choisissant des $x_n\epsilon X$ tels que $F(x_n)\geqslant y_n$ et $|x_n|_i\leqslant r_{n-1}$ pour $i=1,2,\dots,m+n-1$ et en posant

$$x_0=\sum_{n=1}^{\infty}x_n,$$

il vient $F(x_0)\geqslant y_0$ et $|x_0|\leqslant r$, c. q. f. d.

2.992. Soit $S\subset X$ un cône servant à définir, conformément à 2.6 et 2.61, la relation $\leqslant$ dans X et Ξ.

Si, quel soit $\xi\epsilon\Xi$, l'inégalité $\Phi(\eta)\geqslant\xi$ a des solutions $\eta\epsilon H$, alors

$$x_n\geqslant 0 \text{ et } F(x_n)\to 0 \text{ entraînent } x_n\to 0 \text{ pour } x_n\epsilon X;$$

réciproquement, cette condition étant satisfaite et la suite $\{\xi_n(x)\}$, *où* $\xi_n \epsilon \Xi$, *convergeant uniformément vers* 0 *pour tout* $x \epsilon X$ *non-négatif situé dans un entourage* U *de* 0, *il existe des* $\eta_n \epsilon H$ *tels que*

$$\Phi(\eta_n) \geqslant \xi_n \quad \textit{et} \quad \eta_n \to 0.$$

Il est à remarquer que, en vertu de ce théorème, la condition dont il s'agit garantit en particulier l'existence des solutions de l'équation $\Phi(\eta) \geqslant \xi$ pour tout $\xi \epsilon \Xi$.

Admettons, pour démontrer le théorème, que $F(x_n) \to 0$, où $x_n \epsilon X$ et $x_n \geqslant 0$. Il existe des t_n tels que

$$0 < t_n \to \infty \quad \text{et} \quad F(t_n x_n) = t_n F(x_n) \to 0.$$

Si l'inégalité $\Phi(\eta) \geqslant \xi$ a des solutions $\eta \epsilon H$ pour tout $\xi \epsilon \Xi$, nous concluons de 2.421 que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \xi(t_n x_n) \leqslant 0,$$

d'où $\xi(t_n x_n) \to 0$ pour tout $\xi \epsilon \Xi$. La suite $\{t_n x_n\}$ est donc bornée, d'où $x_n \to 0$.

Pour établir la réciproque, choisissons des t_n tels que $0 < t_n \to \infty$ et que $t_n \xi_n(x)$ converge uniformément vers 0 dans SU. Il existe un N et un k tels que

$$t_n \xi_n(x) \leqslant N \sup\left(|x|_1, |x|_2, \ldots, |x|_k\right) \quad \text{pour} \quad x \geqslant 0.$$

D'autre part, en posant $|x|^* = \sup\left(|x|_1, |x|_2, \ldots, |x|_k\right)$, l'hypothèse implique l'existence d'un M et d'un l tels que

$$|x|^* \leqslant M \sup\left(|F(x)|_1, |F(x)|_2, \ldots, |F(x)|_l\right) \quad \text{pour} \quad x \geqslant 0,$$

car en cas contraire il existerait dans X des $x_n \geqslant 0$ tels que

$$|x_n|^* > n \sup\left(|F(x_n)|_1, |F(x_n)|_2, \ldots, |F(x_n)|_n\right),$$

de sorte qu'en posant

$$x_n' = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sup\left(|F(x_n)|_1, |F(x_n)|_2, \ldots, |F(x_n)|_n\right)} x_n,$$

on aurait

$$x_n' \geqslant 0, \quad F(x_n') \to 0 \quad \text{et} \quad |x_n'|^* \geqslant \sqrt{n} \to \infty,$$

contrairement à l'hypothèse. On a par conséquent

$$t_n \xi_n(x) \leqslant NM \sup\left(|F(x)|_1, |F(x)|_2, \ldots, |F(x)|_l\right) \quad \text{pour} \quad x \geqslant 0.$$

Posons

$$\omega(y) = \frac{NM}{t_n} \sup\left(|y|_1, |y_2|, \ldots, |y|_l\right) \quad \text{pour} \quad y \epsilon Y.$$

En vertu de 2.41, il existe donc des $\eta_n \epsilon H$ tels que

$$\eta_n(F(x)) \geqslant \xi_n(x) \quad \text{pour tout} \quad x \geqslant 0$$

et

$$\eta_n(y) \leqslant \frac{NM}{t_n} \sup\left(|y|_1, |y|_2, \ldots, |y|_l\right) \quad \text{pour tout} \quad y \epsilon Y.$$

Ainsi, $\eta_n \epsilon H$, $\Phi(\eta_n) \geqslant \xi_n$ et $\eta_n \to 0$, c. q. f. d.

2.993. *Dans le cas particulier dans lequel l'espace* X *est de dimension finie, la condition nécessaire et suffisante pour que, quel soit* $\xi \epsilon \Xi$, *l'inégalité* $\Phi(\eta) \geqslant \xi$ *ait des solutions* $\eta \epsilon H$ *est la suivante:*

$$x \geqslant 0 \ \textit{et} \ F(x) = 0 \ \textit{entraînent} \ x = 0 \ \textit{pour tout} \ x \epsilon X.$$

C'est une conséquence facile de 2.992.

2.994. Les théorèmes 2.93 - 2.993 concernent les inégalités, mais on peut en déduire, comme des cas particuliers, ceux sur les équations $F(x) = y$ et $\Phi(\xi) = \eta$.

En considérant comme le cône S dans l'espace X l'ensemble composé d'élément 0 seul, $x \geqslant y$ équivaut à $x = y$ et tout couple d'éléments de l'espace conjugué Ξ est en relation $\geqslant$.

En considérant comme le cône S l'espace X tout entier, tout couple d'éléments de cet espace est en relation $\geqslant$ et, dans l'espace conjugué Ξ, $\xi \geqslant \eta$ équivaut à $\xi = \eta$.

Si l'on interprète, dans ces deux cas extrêmes, les théorèmes 2.93 - 2.993 sur les inégalités conformément aux deux remarques ci-dessus, les théorèmes correspondants sur les équations linéaires se laissent facilement formuler d'après eux.

(Reçu par la Rédaction le 5. 3. 1952).