We suppose that $\mathfrak{H}_1$ is spanned by mutually orthogonal unit vectors $g_1,\ldots,g_{n_2}\epsilon\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_2$ is spanned by mutually orthogonal unit vectors $g_{n_2+1},\ldots,g_{n_3}\epsilon\mathfrak{H}$ etc.

Each vector of the form $\mathfrak{F}g$ has an expansion in Fourier series

$$\mathfrak{F}g=\sum_\nu(\mathfrak{F}g,g)g_\nu.$$

In particular

$$\mathfrak{F}f=\sum_\nu(\mathfrak{F}f,g_\nu)g_\nu=\sum_\nu(f,\mathfrak{F}g_\nu)g_\nu=\sum_\nu(f,g_\nu)\gamma_\nu g_\nu=\sum_\nu(f,g_\nu)\mathfrak{F}g_\nu.$$

Now we extend the space $\mathfrak{H}$ to a complete Hilbert space $\overline{\mathfrak{H}}$. We may assume that F^* and, consequently, $\mathfrak{F}$ are defined on $\overline{\mathfrak{H}}$ (see (2.2) and (2.4)). We have in $\overline{\mathfrak{H}}$

$$\mathfrak{F}f=\sum_\nu(f,g_\nu)\mathfrak{F}g_\nu=\mathfrak{F}\big(\sum_\nu(f,g_\nu)g_\nu\big).$$

Consequently

$$f=\sum_\nu(f,g_\nu)g_\nu+h, \tag{3.3}$$

where $h\epsilon\overline{\mathfrak{H}}$ and $\mathfrak{F}h=0$. Since $0=(\mathfrak{F}h,h)=(FF^*h,h)=(F^*h,F^*h)$, we obtain $F^*h=0$ and, by (2.2),

$$(f,h)=0. \tag{3.4}$$

Hence, by (3.4) and (3.3),

$$(h,h)=(f,h)-\sum_\nu(f,g_\nu)(g_\nu,h)=0$$

since, by (3.3), $(f,g_\nu)=(f,g_\nu)+(h,g_\nu)$, i. e. $(h,g_\nu)=0$.

We infer that $h=0$, i. e., by (3.3),

$$f=\sum_\nu(f,g_\nu)g_\nu$$

which completes the proof of Parseval's equation.

The invariance of $\mathfrak{H}_\varkappa$ follows immediately from (2.6). In fact, if $g\epsilon\mathfrak{H}_\varkappa$, i. e. $\mathfrak{F}g=\gamma_\varkappa g$, then, by (2.6), $\mathfrak{F}\sigma g=\sigma\mathfrak{F}g=\sigma\gamma_\varkappa g=\gamma_\varkappa\sigma g$. Therefore $\sigma g\epsilon\mathfrak{H}_\varkappa$*.

---

* I am gratefully indebted to R. Sikorski for his valuable suggestions.

(Reçu par la Rédaction le 18. 4. 1952)

Zur Gitterpunktverteilung bei Verschiebungen von Mengen

von

S. HARTMAN (Wrocław).

1. $x=(x_i)$ bedeute einen Punkt oder einen Vektor des Euklidischen Raumes R^n mit den Koordinaten $x_1,\ldots,x_n$. Der Würfel $0\leqslant x_i\leqslant 1$ heiße W. $|E|$ bedeute das Lebesguesche Maß der Menge E. Ist $\{a_k\}$ irgendeine Folge, P irgendeine Eigenschaft, N' die Anzahl der a_k mit dieser Eigenschaft und mit $k\leqslant N$, so werde der gegebenenfalls vorhandene Grenzwert $\lim\limits_{N\to\infty}N'/N$ mit $\operatorname*{fr}\limits_k\big(P(a_k)\big)$ bezeichnet; in Worten heißt $\operatorname*{fr}\limits_k\big(P(a_k)\big)$ die *Häufigkeit* derjenigen a_k, welchen die Eigenschaft P zukommt. Wir setzen noch $\overline{\lim\limits_{N\to\infty}}N'/N=\overline{\operatorname*{fr}}\limits_k\big(P(a_k)\big)$.

Es sei nun E eine beliebige bis auf Veschiebungen bestimmte L-meßbare Menge von endlichem Maße in R^n. Kommt bei einer Verschiebung ein in E festgehaltener Punkt A in den Raumpunkt x zu liegen, so deuten wir x als die *Lage* von E. Dann soll

$$g(x)=g(x_1,\ldots,x_n)$$

die (vielleicht unendliche) Anzahl der Gitterpunkte in E bedeuten.

2. Man denke sich E in punktfremde L-meßbare Teile I_j $(j=1,2,\ldots)$ vom Durchmesser <1 zerlegt. Die Menge T_j der Lagen x von E, bei welchen sich in I_j ein (und dann genau ein) Gitterpunkt befindet, ist offenbar eine Summe von auseinander durch Verschiebung um Vektoren (r_i) $(r_1=0,\ldots,r_p=\pm1,\ldots,r_n=0;\ p=1,2,\ldots$ oder n) entstehenden, zu I_j kongruenten Mengen. Weiter besteht für $s=0,1,2,\ldots,\infty$ die Menge $M_s=\mathop{E}\limits_{x\epsilon W}[g(x)=s]$ aus allen $x\epsilon W$, die für genau s verschiedene j-Werte zu T_j gehören.

3. Nachstehend werden mehrere Eigenschaften der Funktion $g(x)$ untersucht.

Satz I. *Sind $\xi_1,\dots,\xi_n$ so beschaffen, daß für jedes System $t_1,\dots,t_n,t_{n+1}$ ganzer nicht sämtlich verschwindender Zahlen $\sum_{j=1}^{n} t_j\,\xi_j \neq t_{n+1}$ ist, so gilt für fast jede Anfangslage x*

(i) $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} g(x+k\xi)=|E|$,

(ii) $\operatorname*{fr}\limits_{k}\big(g(x+k\xi)=s\big)=|M_s|$ *für* $s=0,1,2,\dots,\infty$,

(iii) $\sum\limits_{s=1}^{\infty} s\operatorname*{fr}\limits_{k}\big(g(x+k\xi)=s\big)=|E|$.

Beweis[1]). Man setze $f(y_1,\dots,y_n)$ gleich der charakteristischen Funktion der Menge E in der Lage 0. Man hat

$$g(x_1,\dots,x_n)=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=-\infty}^{\infty} f(-x_1+m_1,\dots,-x_n+m_n). \tag{1}$$

Die Funktion $g(x)$ hat somit die Periode 1 in Bezug auf jede Achse. Der Ausdruck $\int\limits_W f(-x_1+m_1,\dots,-x_n+m_n)\,dx$ ist gleich dem Maße des in dem Würfel $m_i-1\leqslant x_i\leqslant m_i$ $(i=1,\dots,n)$ gelegenen Stückes von E in der Lage 0. Darum ist wegen (1)

$$\int\limits_W g(x)\,dx=|E|. \tag{2}$$

Da aus der Voraussetzung folgt, daß die Verschiebung mod 1 um $\xi=(\xi_i)$ eine ergodische (d. h. unzerlegbare) Transformation des Würfels W auf sich ist, so erhält man (i) aus (2) und dem auf die Funktion g angewandten ergodischen Satze von G. D. Birkhoff[2]). Es könnte auch ein von Khintchine behandelter Spezialfall dieses Satzes[3]) genügen. Besonders für beschränkte Mengen ist (i) dem Khintchine'schen Ergebnis fast unmittelbar zu entnehmen.

---

[1]) In diesem Beweise hat der Verfasser einen Gedanken von C. Ryll-Nardzewski ausgenutzt.

[2]) S. z. B. F. Riesz, *Sur la théorie ergodique*, Commentarii Mathematici Helvetici 17 (1944/5), S. 221-239.

[3]) A. Khintchine, *Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse*, Mathematische Annalen 109 (1934), S. 604-615.

Nun sei $\psi_s(x)=1$ oder 0, je nachdem $g(x)=s$ oder $g(x)\neq s$ $(s=0,1,2,\dots,\infty)$. Die Funktionen ψ_s haben in R^n die Periode 1 in Bezug auf jede Achse. Im Variablenbereich W ist ψ_s die charakteristische Funktion der Menge M_s. Unter nochmaliger Benutzung des Satzes von Birkhoff hat man für fast jedes x

$$\operatorname*{fr}_{k}\big(g(x+k\xi)=s\big)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{\infty}\psi_s(x+k\xi)=\int\limits_W\psi_s(x)\,dx=|M_s|.$$

Damit ist (ii) bewiesen. Es sei noch bemerkt, daß wegen (2)

$$\operatorname*{fr}_{k}\big(g(x+k\xi)=\infty\big)=0 \text{ für fast jedes } x.$$

(iii) ist für beschränkte Mengen eine unmittelbare arithmetische Konsequenz von (i) und (ii), weil dann auch die Folge $\{g(x+k\xi)\}$ $(k=1,2,\dots)$ beschränkt ist. Um (iii) auch für unbeschränkte Mengen zu beweisen, brauchen wir einen Hilfssatz.

Es sei Z eine beschränkte L-meßbare Untermenge von E. Der in E festgehaltene Punkt A liege im Raumpunkt x. Ist die Anzahl der dabei in Z befindlichen Gitterpunkte größer als μ, so bezeichne man sie mit $\bar g(x)$; andernfalls setze man $\bar g(x)=0$.

Hilfssatz. *Für fast jedes x und jedes ganze $\mu\geqslant 0$ gilt*

$$\sum_{s=\mu+1}^{\infty} s\operatorname*{fr}_{k}\big(\bar g(x+k\xi)=s\big)\leqslant\sum_{s=\mu+1}^{\infty} s\operatorname*{fr}_{k}\big(g(x+k\xi)=s\big). \tag{3}$$

Man fixiere x so, daß die Häufigkeiten beiderseits in (3) existieren und daß

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} g(x+k\xi)=|E|. \tag{4}$$

Wegen (i) und (ii) ist das für fast jedes x der Fall. Es sei K die größtmögliche Anzahl von Gitterpunkten in Z bei beliebiger Lage. Der Kürze halber setze man $\bar g(x+k\xi)=a_k$. Dann ist

$$a_k\leqslant K \qquad (k=1,2,\dots) \tag{5}$$

und

$$\sum_{s=\mu+1}^{\infty} s\operatorname*{fr}_{k}(a_k=s)=\sum_{s=\mu+1}^{K} s\operatorname*{fr}_{k}(a_k=s)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_k. \tag{6}$$

Ist nun $L>\mu$ eine beliebige natürliche Zahl und setzt man $g^*(x)=g(x)$, falls $\mu<g(x)\leqslant L$, und sonst $g^*(x)=0$, so ist mit der Abkürzung $g(x+k\xi)=g_k$, $g^*(x+k\xi)=b_k$,

$$(7)\qquad \sum_{s=\mu+1}^{L} s\,\mathrm{fr}_k(g_k=s)=\sum_{s=\mu+1}^{L} s\,\mathrm{fr}_k(b_k=s)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} b_k.$$

Es folgt aus $Z\subset E$, daß $a_k\leqslant b_k$, falls nur $g_k\leqslant L$. Wegen (4) ist nun $\mathrm{fr}_k(L<g_k)<|E|/L$ und umsomehr

$$\overline{\mathrm{fr}}_k(a_k>b_k)<|E|/L.$$

Infolge (5) ist aber auf jeden Fall $b_k-a_k\geqslant -K$. Daher hat man

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} b_k-\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_k=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(b_k-a_k)$$

$$\geqslant -K\,\overline{\mathrm{fr}}_k(a_k>b_k)>-K\,|E|/L,$$

also wegen (7) und (6),

$$\sum_{s=\mu+1}^{\infty} s\,\mathrm{fr}_k\big(g(x+k\xi)=s\big)-\sum_{s=\mu+1}^{\infty} s\,\mathrm{fr}_k\big(\bar g(x+k\xi)=s\big)$$

$$\geqslant \sum_{s=\mu+1}^{N} s\,\mathrm{fr}_k(b_k=s)-\sum_{s=\mu+1}^{K} s\,\mathrm{fr}_k(a_k=s)\geqslant -K\,|E|/L.$$

Da L beliebig war, erhält man daraus (3).

Wir führen den Beweis von (iii) zu Ende. Man stelle E als Summe $\sum_{i=1}^{\infty}E_i$ einer nicht abnehmenden Folge beschränkter, L-meßbarer Mengen dar. Man wähle x so, daß (i) und (ii) für E und für alle E_i gelte. Dann besteht auch die Behauptung des Hilfssatzes für jedes E_i als Untermenge von E. Offenbar genügt fast jedes x diesen Bedingungen. Ein solches x erfüllt (i) und (ii) ebenso für $\sum_{i=\nu}^{\infty}E_i=E-E_\nu$ bei jedem ν.

Man bemerke zuerst, daß

$$\sum_{s=1}^{\infty} s\,\mathrm{fr}_k(g_k=s)\leqslant |E|.$$

In der Tat: bei jedem natürlichen L ist

$$\sum_{s=1}^{L} s\,\mathrm{fr}_k(g_k=s)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} c_k\leqslant \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} g(x+k\xi)=|E|,$$

wo $c_k=g_k$, wenn $g_k\leqslant L$ und $c_k=0$ andernfalls. Wir setzen noch $\sum_{s=1}^{\infty} s\,\mathrm{fr}_k(g_k=s)=S$.

Somit bleibt zu beweisen, daß

$$(8)\qquad S=|E|.$$

Ist $\varepsilon>0$ beliebig gewählt, so bestimme man μ aus der Bedingung

$$(9)\qquad S-\sum_{s=1}^{\mu} s\,\mathrm{fr}_k(g_k=s)<\varepsilon$$

und wähle ν so, daß

$$(10)\qquad |E_\nu|>|E|-\frac{\varepsilon}{\mu^2}$$

sei. Liegt der Punkt A von E im Raumpunkt $(x_i+k\xi_i)$ $(i=1,\dots,n)$, so bedeute a_k die Anzahl der Gitterpunkte in dem Teil E_ν von E. Unter Benutzung von (i) und (ii) schließt man für fast jedes x

$$\mathrm{fr}_k(g_k\neq a_k)=\mathrm{fr}_k(g_k-a_k\geqslant 1)$$

$$\leqslant \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\big(g(x+k\xi)-a_k\big)=|E-E_\nu|=|E|-|E_\nu|.$$

Daraus folgt wegen (10)

$$(11)\qquad |\mathrm{fr}_k(g_k=s)-\mathrm{fr}_k(a_k=s)|\leqslant \mathrm{fr}_k(g_k\neq a_k)<\varepsilon/\mu^2\quad \text{für } s=0,1,\dots,\infty.$$

Man hat nun

$$(12)\qquad \begin{aligned}&\Big|\sum_{s=1}^{\infty} s\,\mathrm{fr}_k(g_k=s)-\sum_{k=1}^{\infty} s\,\mathrm{fr}_k(a_k=s)\Big|\\ &\leqslant \sum_{s=1}^{\mu} s\,\mathrm{fr}_k|(g_k=s)-\mathrm{fr}_k(a_k=s)|+\sum_{s=\mu+1}^{\infty} s\,\mathrm{fr}_k(g_k=s)+\sum_{s=\mu+1}^{\infty} s\,\mathrm{fr}_k(a_k=s).\end{aligned}$$

Wendet man den Hilfssatz auf E_ν an Stelle von Z an und schreibt man dementsprechend a_k für $\bar g(x+k\xi)$, so folgt

$$\sum_{s=\mu+1}^{\infty} s\,\mathrm{fr}_k(a_k=s)\leqslant \sum_{s=\mu+1}^{\infty} s\,\mathrm{fr}_k(g_k=s);$$

da aber

$$\sum_{s=1}^{\infty} s \operatorname*{fr}_{k}(a_k = s) = |E_\nu|,$$

so ist schließlich wegen (12), (11) und (9)

$$|S - |E_\nu|| < 3\varepsilon.$$

Der Vergleich mit (10) ergibt $|S-|E||<4\varepsilon$, woraus (8) folgt, weil $\varepsilon>0$ beliebig war.

Satz II. *Ist die Menge E beschränkt und nach Jordan meßbar, und bleibt die Voraussetzung über ξ aufrechterhalten, so gilt* (i)-(iii) *für jede Anfangslage x.*

(i) ist dann wohlbekannt; es wird zum Beispiel sofort durch einen Satz von Hardy und Littlewood geliefert, wenn auch dieser Satz von den Verfassern mit (unwesentlich) schärferen Voraussetzungen als die Jordansche Meßbarkeit formuliert wurde[4]). Unter Benutzung unserer Beweisideen ergibt sich (i) folgendermaßen:

Aus der Jordanschen Meßbarkeit von E folgt, daß im Variablenbereich W jeder Summand $f(-x_1+m_1, \ldots, -x_n+m_n)$ auf der rechten Seite von (1) als charakteristische Funktion des in dem Würfel $m_i-1 \leqslant x_i \leqslant m_i$ gelegenen Stückes von E nach Riemann integrierbar ist. Das ist also auch für $g(x_1, \ldots, x_n)$ der Fall, weil die n-fache Summe in (1) nur endlichviele von Null verschiedene Glieder enthält. Nun folgt (i) aus (2) und dem bekannten Satze von H. Weyl: hat eine R-integrierbare Funktion $g(x_1, \ldots, x_n)$ die Periode 1 in Bezug auf jede Achse und genügt ξ der in der Voraussetzung von Satz I formulierten Bedingung, so besteht für jedes x die Gleichheit

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} g(x+k\xi) = \int_W g(x)\,dx.$$

Um auch (ii) für beliebiges x nachzuweisen[5]), benutze man die in 2 behandelte Zerlegung von E, diesmal in endlichviele Teile I_j, wobei man dafür sorge, daß alle I_j nach Jordan meßbar seien. Dann sind es auch die Mengen M_s. Daher sind ihre charakteristischen Funktionen φ_s nach Riemann integrierbar. Wird auf dieselben der oben erwähnte Weylsche Satz angewendet, so ist man am Ziel.

Endlich ist (iii) dank der Beschränktheit von E eine arithmetische Folgerung aus (i) und (ii).

[4]) Vgl. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some Problems of Diophantine Approximation I*, Acta Mathematica 37 (1914), S. 155-190, insbesondere S. 164.

[5]) Die Frage nach der Existenz der $\operatorname*{fr}_{k}(g(x+k\xi)=s)$ in diesem Falle rührt von H. Steinhaus her.

PAŃSTWOWY INSTYTUT MATEMATYCZNY
STAATLICHES MATHEMATISCHES INSTITUT

(Reçu par la Rédaction le 15. 3. 1952)