et

$$G(t_1,\dots,t_n)=\int\limits_0^{t_1} d\tau_1\dots\int\limits_0^{t_n} d\tau_n g(\tau_1,\dots,\tau_n)$$

qui sont évidemment des fonctions continues.

Ouvrages cités.

[1] J. Dufresnoy, *Sur le produit de composition de deux fonctions*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 225 (1947), p. 857-859.

[2] J. L. Lions, *Supports de produit de composition*, C. R. 232 (1951), p. 1530-1532.

[3] — *Supports de produits de composition*, C. R. 232 (1951), p. 1622-1624.

[4] J. G.-Mikusiński, *Sur les fondements du calcul opératoire*, Studia Mathematica 11 (1950), p. 41-70.

[5] — *A new proof of Titchmarsh's theorem on convolution*, ce volume.

[6] J. G.-Mikusiński and C. Ryll-Nardzewski, *A theorem on bounded moments*, ce volume.

[7] J. Radon, *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*, Berichte der Mathematisch-Physischen Klasse der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 69 (1917), p. 262-277.

[8] E. C. Titchmarsh, *The zeros of certain integral functions*, Proceedings of the London Mathematical Society 25 (1926), p. 283-302.

PAŃSTWOWY INSTYTUT MATEMATYCZNY
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ÉTAT

(Reçu par la Rédaction le 10. 1. 1952)

Sur les fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz généralisée (II)

par

W. ORLICZ (Poznań).

1. On doit à Denjoy et Khintchine les premiers exemples de fonctions continues dépourvues presque partout de dérivée approximative. Ils ont démontré l'existence de fonctions continues $f(x)$ telles que

$$\overline{\lim_{t\to x}}\ \mathrm{as}\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right|=\infty \tag{1}$$

pour presque tout x. La première partie de notre travail, publiée dans le X-ième volume de ce journal et citée dans la suite comme LI, était consacrée à l'étude de fonctions continues pourvues de certaines singularités (par exemple, non-dérivabilité). La partie présente[1]) suit les idées de LI, la notion de limite ordinaire étant remplacée par celle de limite asymptotique. Citons, comme exemple des résultats obtenus, le théorème suivant:

Il existe une fonction satisfaisant à la condition de Lipschitz avec chaque exposant entre 0 et 1, telle que l'on ait (1) pour presque tout x.

2. La suite $\{f_n(x)\}$ composée de fonctions mesurables est dite *asymptotiquement bornée* dans l'ensemble E lorsque $\vartheta_n\to 0$ entraîne la convergence asymptotique sur E de la suite $\{\vartheta_n f_n(x)\}$ vers 0. Cette condition équivaut à la suivante[2]):

[1]) Les résultats du travail ont été présentés le 10 avril 1945 à la Société Polonaise de Mathématique, Section de Cracovie.

[2]) Voir W. Orlicz, *On a class of asymptotically divergent sequences of functions*, Studia Mathematica 12 (1951), p. 286-307.

(w) pour tout $\eta>0$, il existe une constante K telle que

$$|\underset{x}{E}\{|f_n(x)|\geqslant K,\ x\in E\}|<\eta \quad \text{pour} \quad n=1,2,\ldots$$

Nous allons désigner dans la suite par $\omega(h)$ et $\omega_1(h)$ deux fonctions non décroissantes, définies pour $0\leqslant h\leqslant l$, qui ne s'annulent que pour $h=0$ et tendent vers 0 avec h.

Lemme 1. *La fonction $f(x)$ de période l étant mesurable pour $-\infty<x<+\infty$ et les nombres h_n différents de 0, tendant vers 0, posons*

$$E=\underset{x}{E}\left\{\overline{\lim_{t\to x}}\ \text{as}\ \frac{|f(t)-f(x)|}{\omega_1(|t-x|)}<\infty\right\},$$

$$t_n=x+h_n.$$

La suite

$$\{\varphi(t_n,x)\}=\left\{\frac{f(t_n)-f(x)}{\omega_1(2|t_n-x|)}\right\}$$

est alors asymptotiquement bornée dans E.

Démonstration[3]. On peut admettre sans restreindre la généralité que $|E|>0$. η étant un nombre positif arbitraire, la fonction $f(x)$ est bornée dans un ensemble mesurable $E^*\subset E$ tel que

$$|E^*|>|E|-\frac{\eta}{3}.$$

Pour tout $x\in E^*$, il existe un nombre naturel n tel que x est un point de dispersion de l'ensemble

$$\underset{t}{E}\{|f(t)-f(x)|\geqslant n\omega_1(|t-x|),\quad x\leqslant t\leqslant x+h\}.$$

Désignons par E_n l'ensemble des $x\in E^*$ pour lesquels on ait

$$(2)\qquad |\underset{t}{E}\{|f(t)-f(x)|\geqslant n\omega_1(|t-x|),\quad x\leqslant t\leqslant x+h\}|\leqslant\frac{h}{4},$$

où $0<h<2/n$. On vérifie aisément que cet ensemble est mesurable et que

$$|E^*-E_n|<\frac{\eta}{3},$$

n étant suffisamment élevé. Choisissons à présent deux éléments $x_1,x_2\in E_n$, tels que $x_1<x_2$, $x_2-x_1<1/n$ et posons $x_3=2x_2-x_1$. On a

$$0<x_3-x_1=2(x_3-x_2)<2/n$$

et, en substituant $x=x_1$, $h=x_3-x_1$ dans (2),

$$(3)\qquad |\underset{t}{E}\{|f(t)-f(x_1)|\geqslant n\omega_1(|t-x_1|),x_1\leqslant t\leqslant x_3\}|\leqslant\frac{x_3-x_1}{4}=\frac{x_3-x_2}{2}.$$

On a, de plus,

$$0<x_3-x_2=x_2-x_1<\frac{1}{n},$$

et il résulte de (2), pour $x=x_2$, $h=x_3-x_2$,

$$(4)\qquad |\underset{t}{E}\{|f(t)-f(x_2)|\geqslant n\omega_1(|t-x_2|),x_2\leqslant t\leqslant x_3\}|\leqslant\frac{x_3-x_2}{4}.$$

Les inégalités (3) et (4) entraînent l'existence d'un $t_0\in\langle x_2,x_3\rangle$ tel que

$$|f(t_0)-f(x_1)|<n\omega_1(|t_0-x_1|)\leqslant n\omega_1(x_3-x_1)=n\omega_1(2(x_2-x_1)),$$

$$|f(t_0)-f(x_2)|<n\omega_1(|t_0-x_2|)\leqslant n\omega_1(x_3-x_1)=n\omega_1(2(x_2-x_1)),$$

d'où

$$|f(x_2)-f(x_1)|<2n\omega_1(2(x_2-x_1)).$$

Il vient, pour $x_1,x_2\in E_n$, $x_2-x_1\geqslant 1/n$,

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant\frac{2\sup\limits_{E^*}|f(x)|\,\omega_1(2(x_2-x_1))}{\omega_1(2/n)}.$$

En choisissant un m tel que $|E^*-E_m|<\eta/3$, on obtient

$$|E_m|>|E|-\frac{2\eta}{3}$$

et, pour $x_1,x_2\in E_m$,

$$(5)\qquad |f(x_2)-f(x_1)|\leqslant K\omega_1(2(x_2-x_1))$$

avec

$$K=\max\left[2m,\ \frac{2\sup\limits_{E^*}|f(x)|}{\omega_1(2/m)}\right].$$

[3]) L'idée de cette démonstration est due à Saks, *Theory of the integral*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Lwów 1937, p. 239-240.

En désignant par E_{mh} l'ensemble des éléments de la forme $x-h$, où $x \epsilon E_m$, on a, pour $|h|<\delta$, δ étant un nombre positif suffisamment petit,

$$|E_m E_{mh}| > |E_m| - \frac{\eta}{3}.$$

La mesure de l'ensemble $A_n = E_m E_{mh_n}$ satisfait à l'inégalité $|A_n| > |E| - \eta$ pour $|h_n| < \delta$, de plus, $x \epsilon A_n$ entraîne $t_n = x + h_n \epsilon E_m$. Il en résulte en vertu de (5) $|\varphi(t_n, x)| \leqslant K$ pour $x \epsilon A_n$, n étant suffisamment élévé. La suite $\{\varphi(t_n, x)\}$ jouit donc de la propriété (w).

Théorème 1. *Posons* $\gamma(h) = \sup_{0<k\leqslant h} k/\omega(k)$ *et admettons que*

$$\lim_{h\to+0} \frac{\omega_1(h)}{h}\gamma(h) = 0, \tag{6}$$

$$0 < \varliminf_{h\to+0} \frac{\omega_1(h)}{h}. \tag{6'}$$

La fonction $\varphi(x)$ *soit non constante et de période* l *satisfaisant à la condition de Lipschitz avec une constante* K; *soit*

$$r = \max_{0\leqslant x<y\leqslant l} |\varphi(x)-\varphi(y)|, \quad s = |x_1 - x_2|,$$

où x_1, x_2 *sont des nombres de l'intervalle* $\langle 0, l\rangle$ *tels que* $r = |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|$.

Soient de plus $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ *des suites dont les termes sont assujettis aux conditions suivantes* [4]):

$$\alpha_n > 0, \quad 0 < \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n < \ldots, \quad \beta_n \to \infty, \tag{7}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\omega_1(2s\beta_n^{-1})} = \infty, \tag{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n \gamma(2l\beta_n^{-1}) < \infty, \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} &\varlimsup_{n\to\infty} (\alpha_n\beta_n)^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \beta_k < \frac{r}{s}\,\frac{1}{K}(1-c), && (10)\\ &\varlimsup_{n\to\infty} \alpha_n^{-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k < c, && (11) \end{aligned}\right\} \quad \text{où} \quad 0<c<1.$$

---

[4]) L'existence de suites satisfaisant à ces conditions se démontre comme dans LI.

Dans ces hypothèses la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi(\beta_n x) \tag{12}$$

jouit des propriétés suivantes:

(a) *il existe une constante* M *telle que pour tout* x

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant M\omega(|h|), \quad \text{où} \quad |h| \leqslant l,$$

(b) *on a pour presque tout* x

$$\varlimsup_{t\to x} \operatorname{ap} \frac{|f(t)-f(x)|}{\omega_1(|t-x|)} = \infty.$$

Démonstration. La convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ étant une conséquence immédiate de la condition (9), la fonction $f(x)$ est continue. On démontre d'une façon analogue que dans LI qu'elle jouit de la propriété (a) Pour démontrer (b), posons

$$h_n = \frac{s}{\beta_n}, \quad t_n = x + h_n;$$

alors

$$\alpha_n \frac{|\varphi(\beta_n(x+h_n)) - \varphi(\beta_n x)|}{\omega_1(2h_n)} = \frac{\alpha_n}{\omega_1(2s\beta_n^{-1})} |\varphi(\beta_n x + s) - \varphi(\beta_n x)|,$$

et

$$\frac{1}{\omega_1(2h_n)} \left| \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k [\varphi(\beta_k(x+h_n)) - \varphi(\beta_k x)] \right| \leqslant \frac{sK}{\beta_n \omega_1(2s\beta_n^{-1})} \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \beta_k,$$

$$\frac{1}{\omega_1(2h_n)} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k [\varphi(\beta_k(x+h_n)) - \varphi(\beta_k x)] \right| \leqslant \frac{r}{\omega_1(2s\beta_n^{-1})} \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k.$$

Il en résulte

$$|\varphi(t_n, x)| = \frac{|f(x+h_n) - f(x)|}{\omega_1(2|h_n|)} \tag{13}$$

$$\geqslant r \frac{\alpha_n}{\omega_1(2s\beta_n^{-1})} \left[\frac{|\varphi(\beta_n x + s) - \varphi(\beta_n x)|}{r} - \frac{sK}{r}\,\frac{1}{\alpha_n\beta_n} \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \beta_k - \frac{1}{\alpha_n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \right].$$

Nous allons démontrer maintenant que la suite $\{\varphi(t_n, x)\}$ n'est asymptotiquement bornée sur aucun ensemble de mesure positive. En effet, choisissons une suite $\{\vartheta_n\}$ de manière que $\vartheta_n \to 0$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\vartheta_n a_n}{\omega_1(2s\beta_n^{-1})} = \infty,$$

et supposons que la suite $\{\varphi(t_n, x)\}$ soit asymptotiquement bornée sur un ensemble E de mesure positive. Il existerait alors une suite d'indices $\{n_i\}$ pour laquelle on aurait

$$\vartheta_{n_i} |\varphi(t_{n_i}, x)| \to 0$$

presque partout dans E, et telle que

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\vartheta_{n_i} a_{n_i}}{\omega_1(2s\beta_{n_i}^{-1})} = \infty.$$

D'autre part, la relation

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\varphi(\beta_{n_i} x + s) - \varphi(\beta_{n_i} x)| = r$$

étant remplie presque partout[5]), il vient, en vertu de (10), (11) et (13),

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} \vartheta_{n_i} |\varphi(t_{n_i}, x)| = \infty$$

pour presque tout x, ce qui est impossible.

On achève la démonstration de la condition (b) en applicant le lemme 1.

Théorème 2. *Remplaçons dans les hypothèses du théorème* 1 *la condition* (9) *par*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty; \tag{9'}$$

alors la fonction définie par la formule (12) *est continue et jouit de la propriété* (b).

Démonstration. En examinant la démonstration du théorème 1, on voit que la condition (9) n'y sert que pour démontrer la condition (a) et que (9′) implique la continuité de la fonction $f(x)$.

---

[5]) Voir S. Mazur et W. Orlicz, *Sur quelques propriétés de fonctions périodiques et presque périodiques*, Studia Mathematica 9 (1940), p. 1-16, théorème 1.

Théorème 3. *La condition* (6) *est nécessaire et suffisante pour l'existence d'une fonction jouissant des propriétés* (a) *et* (b).

Démonstration. La nécessité de la condition (6) résulte du théorème 1 de LI (p. 22).

Si l'on a

$$\underline{\lim_{h\to+0}} h^{-1}\omega_1(h) > 0,$$

le théorème 2 implique que cette condition est suffisante.

Supposons maintenant que

$$\underline{\lim_{h\to+0}} h^{-1}\omega_1(h) = 0.$$

Choisissons une suite $\{h_n\}$ telle que $n\omega_1(2h_n)h_n^{-1} \to 0$, et une fonction $f(x)$ de période l satisfaisant à la condition de Lipschitz et telle que

$$\underline{\lim_{h\to 0}} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| > 0$$

pour tout x. On voit aisément que cette fonction satisfait à la condition (a). Si l'on avait

$$\overline{\lim_{t\to x}} \text{ as } \frac{|f(t) - f(x)|}{\omega_1(|t-x|)} < \infty,$$

dans un ensemble E, la suite

$$\frac{|f(x+h_n) - f(x)|}{\omega_1(2|h_n|)}$$

serait en vertu du lemme 1 bornée asymptotiquement dans E, ce qui impliquerait pour presque tout x,

$$\frac{1}{n_i} \frac{|f(x+h_{n_i}) - f(x)|}{\omega_1(2|h_{n_i}|)} \to 0,$$

$\{h_{n_i}\}$ étant une suite extraite de la suite $\{h_n\}$. C'est pourtant impossible, car

$$\left| \frac{f(x+h_{n_i}) - f(x)}{h_{n_i}} \right| = \frac{1}{n_i} \frac{|f(x+h_{n_i}) - f(x)|}{\omega_1(2|h_{n_i}|)} n_i \frac{\omega_1(2|h_{n_i}|)}{|h_{n_i}|};$$

donc la fonction $f(x)$ jouit de la propriété (b).

On a aussi le corollaire suivant relatif aux théorèmes 1 et 3 et aux théorèmes 1 et 2 de LI:

S'il existe, étant données des fonctions $\omega(x)$ *et* $\omega_1(x)$, *une fonction satisfaisant aux conditions* (a) *et* (b), *il en existe aussi une fonction* $f(x)$ *qui jouit de la propriété* (a) *et de la suivante*:

(b′) *pour tout* x

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{|f(x+h)-f(x)|}{\omega_1(|h|)}=\infty.$$

La réciproque est aussi vraie.

3. Nous avons considéré dans LI quelques cas particuliers de la condition (6), en substituant à $\omega(h)$ et $\omega_1(h)$ des fonctions spéciales. Si l'on remplace maintenant les conditions (a) et (b′), y considérées, respectivement par (a) et (b), on obtient par des raisonnements analogues les résultats suivantes:

Pour qu'il existe une fonction continue jouissant de la propriété (a) *et dépourvue presque partout de la dérivée approximative, il faut et il suffit que l'on ait*

$$\lim_{h\to+0} h^{-1}\omega(h)=0.$$

La fonction $\omega_1(h)$ *étant arbitraire, il existe une fonction continue satisfaisant à la condition* (b).

Pour qu'il existe une fonction jouissant de la propriété (b) *et satisfaisant à la condition de Hölder avec l'exposant* γ, *il faut et il suffit que l'on ait*

$$\underline{\lim_{h\to+0}} h^{-\gamma}\omega_1(h)=0.$$

Nous avons construit dans LI des séries de forme (12) qui fournissent des exemples de fonctions jouissant pour certaines fonctions $\omega(h)$ de la condition (a) et en même temps satisfaisant à la condition (b′) pour certaine fonction $\omega_1(h)$. En considérant à présent les conditions (a) et (b), on obtient des résultats analogues — on peut, même, imposer aux coefficients a_n et β_n des conditions un peu plus générales que dans LI. Par exemple, on obtient, à l'aide du théorème 1,

(α) *Si* $q>1+\frac{s}{r}K$, *la fonction*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}q^{-n^2}\varphi(q^{n(n+1)}x),$$

satisfait à la condition de Hölder avec tout exposant γ *tel que* $0<\gamma<1$, *et est privée presque partout de la dérivée approximative.*

(β) *Si* $\alpha\beta>1+\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{1-c}K$, $0<\alpha<\frac{c}{1+c}$ *et* $0<c<1$, *la fonction continue*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\varphi(\beta^n x)$$

est dépourvue de la dérivée approximative presque partout. De plus, elle satisfait à la condition de Hölder avec tout exposant positif

$$\gamma<\log\frac{1}{\alpha}(\log\beta)^{-1}=\sigma,$$

et l'on a pour presque tout x

(14)
$$\overline{\lim_{t\to x}}\,\mathrm{ap}\frac{|f(t)-f(x)|}{|t-x|^{\delta}}=\infty,$$

si $\delta>\sigma$.

Le sens de r, s, K, $\varphi(x)$ est, dans les énoncés ci-dessus, le même que dans le théorème 1.

4. Nous allons envisager maintenant certaines classes de séries trigonométriques lacunaires jouissant des propriétés (a) et (b).

Lemme 2. *Soit donnée une suite* $\{\beta_n\}$ *de nombres naturels tels que*

(15)
$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}>k>1.$$

Si

$$(*)\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_{in}^2<\infty,\qquad (**)\quad \sum_{n=1}^{\infty}b_{in}^2<\infty\quad \textit{pour}\quad i=1,2,\ldots,$$

et si la suite

$$T_i(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{in}\cos\beta_n x+b_{in}\sin\beta_n x)$$

converge asymptotiquement dans un ensemble $E\subset\langle 0,2\pi\rangle$ *de mesure positive, il existe des nombres* a_n *et* b_n *tels que*

(16)
$$\lim_{i\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[(a_{in}-a_n)^2+(b_{in}-b_n)^2]=0.$$

Si la suite $\{T_i(x)\}$ *est asymptotiquement bornée dans l'ensemble* $E\subset\langle 0,2\pi\rangle$ *de mesure positive, les sommes* (*) *et* (**) *ne surpassent pas une constante pour* $i=1,2,\ldots$

Démonstration. On démontre ce lemme comme pour le système orthogonal de Rademacher, en faisant appel aux propriétés bien connues de séries trigonométriques lacunaires[6]).

Théorème 4. *La condition* (6) *étant remplie, soit* $\{a_n\}$ *et* $\{\beta_n\}$ *deux suites dont la seconde soit composée de nombres naturels satisfaisant aux conditions* (7), (15) *et* (9) *et telles que*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{\omega_1(2\beta_n^{-1})}=d. \tag{17}$$

Si $d=\infty$, *la fonction*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\beta_n x \tag{18}$$

jouit des propriétés (a) *et* (b).

Si $d>0$, *la fonction* (18) *jouit de la propriété* (a) *et de la suivante:*

(b') *il existe une suite* $0<h_n\to 0$ *telle que la suite*

$$\frac{f(x+h_n)-f(x)}{\omega_1(2h_n)}$$

ne converge asymptotiquement dans aucun ensemble de mesure positive.

Démonstration. Pour démontrer la seconde partie du théorème posons

$$h_i=\beta_i^{-1},\qquad a_{in}=\frac{a_n[\cos\beta_n h_i-1]}{\omega_1(2h_i)},\qquad b_{in}=\frac{-a_n[\sin\beta_n h_i]}{\omega_1(2h_i)},$$

$$T_i(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{\cos\beta_n(x+h_i)-\cos\beta_n x}{\omega_1(2h_i)}=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{in}\cos\beta_n x+b_{in}\sin\beta_n x).$$

Nous allons démontrer que la suite $\{T_i(x)\}$ n'est pas asymptotiquement convergente sur E, $E\subset\langle 0,2\pi\rangle$ étant un ensemble de mesure positive. En effet, la convergence asymptotique de cette suite dans un ensemble de mesure positive entraîne (16) d'après le lemme 2. La convergence $b_{in}\to b_n$ pour $i\to\infty$ implique l'existence de la limite

$$\lim_{i\to\infty}h_i[\omega_1(2h_i)]^{-1}=a$$

[6]) Cf., par exemple, W. Orlicz, *Sur les fonctions continues non dérivables*, Fundamenta Mathematicae 34 (1947), p. 45-60, lemme 1.

et on a

$$b_n=-a_n\beta_n a.$$

Si $a>0$, on aurait en vertu de (17)

$$a_n\beta_n=\frac{a_n}{\omega_1(2\beta_n^{-1})}\,\frac{\omega_1(2h_n)}{h_n}>c>0$$

pour une infinité d'indices, d'où $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2=\infty$, ce qui ne se peut pas. D'autre part, $a=0$ implique $b_n=0$ pour $n=1,2,\ldots$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_{in}-b_n)^2=\sum_{n=1}^{\infty}b_{in}^2\geqslant\left[\frac{a_i}{\omega_1(2\beta_i^{-1})}\right]^2\sin^2 1;$$

on voit, en vertu de (17), que la condition (16) n'est pas satisfaite, ce qui est une contradiction.

Si $d=\infty$, on démontre d'une façon analogue que la suite $\{T_i(x)\}$ n'est pas asymptotiquement bornée dans aucun ensemble de mesure positive. Pour achever la démonstration, il suffit d'appliquer le lemme 1.

On démontre pareillement le

Théorème 5. *Remplaçons dans les hypothèses du théorème* 4 *la condition* (9) *par* (9'); *alors si* $d=\infty$ *la fonction* $f(x)$, *définie par la formule* (18), *est continue et jouit de la propriété* (b).

Théorème 6. *La condition* (9') *étant satisfaite et les nombres* β_n *satisfaisant aux mêmes conditions que dans le lemme* 2 *et à* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\beta_n^2=\infty$, *la fonction* (18) *est continue et dépourvue presque partout de dérivée approximative.*

Démonstration. En posant

$$a_{in}=a_n h_i^{-1}(\cos\beta_n h_i-1),$$
$$b_{in}=-a_n h_i^{-1}\sin\beta_n h_i,$$

on a

$$T_i(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{\cos\beta_n(x+h_i)-\cos\beta_n x}{h_i}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{in}\cos\beta_n x+b_{in}\sin\beta_n x).$$

On prouve, comme dans la démonstration du théorème précédent, en s'appuyant sur le fait que $\lim_{i\to\infty} a_{in}=0$, $\lim_{i\to\infty} b_{in}=-\alpha_n\beta_n=b_n$ (pour $n=1,2,\ldots$), $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2=\infty$, que la suite $\{T_i(x)\}$ n'est pas asymptotiquement bornée sur aucun ensemble de mesure positive. Il suffit d'appliquer le lemme 1.

On obtient, comme application du théorème 4:

Si $0<\alpha<1$, $\alpha\beta>1$, *la fonction*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\cos\beta^n\pi x$$

satisfait à la condition de Hölder avec tout exposant positif $\gamma\leqslant\sigma$, *et, pour tout* x, *à la condition* (14) *avec tout exposant* $\delta>\sigma$, *où*

$$\sigma=\log\frac{1}{\alpha}\cdot(\log\beta)^{-1}.$$

Remarquons que la proposition finale (β) du paragraphe 3 donne un résultat analogue sous des hypothèses plus spéciales, relatives aux α et β, et le cas $\gamma=\sigma$ y est exclu. Par exemple, en posant $c=2/3$, il faudrait supposer $\alpha\beta>1+3\pi/2$ et $0<\alpha<2/5$. La restriction $\gamma<\sigma$ n'y est d'ailleurs pas essentielle, mais le cas $\gamma=\sigma$ exige une autre méthode que celle appliquée dans LI.

5. Dans les paragraphes 3 et 4, nous avons présenté des exemples effectifs de fonctions pourvues de certaines singularités. Or, on peut aussi démontrer l'existence de fonctions jouissant de singularités mentionnées à l'aide de méthodes de la théorie des opérations linéaires. Nous allons dès lors appliquer ces méthodes.

Soit Ξ un espace de Banach, $U_n(\xi;x)=F_n(\xi)$ une suite d'opérations linéaires définies dans Ξ, à valeurs dans l'espace de fonctions mesurables définies dans un ensemble mesurable I. Nous allons nous baser sur le

Théorème de Saks[7]). *Il existe une décomposition* $I=A+B$ *de l'ensemble* I *telle que*

1° *la suite* $\{U_n(\xi;x)\}$ *est asymptotiquement bornée sur* A *pour tout* ξ,

2° *si* $\xi_n\to 0$, *la suite* $\{U_n(\xi_n;x)\}$ *converge asymptotiquement vers* 0 *sur* A,

3° *pour tout* $\xi\in\Xi$, *à l'exception d'un ensemble de première catégorie, la suite* $\{U_n(\xi;x)\}$ *n'est asymptotiquement bornée sur aucun ensemble de mesure positive et contenu dans* B.

Soit L^ω l'espace linéaire composé de fonctions $f=f(x)$ de période l qui satisfont à l'inégalité (a) du théorème 1 avec la constante M dépendant de f; l'addition des éléments et la multiplication par des nombres étant définies comme d'habitude, et la norme par la formule

$$\|f\|=\max|f(x)|+\sup_{x_1\neq x_2}\frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{\omega(|x_1-x_2|)};$$

L^ω constitue un espace de Banach.

Théorème 7. *La condition* (6) *étant satisfaite, la condition* (b) *l'est également presque partout pour toute fonction* L^ω, *à l'exception d'un ensemble de première catégorie.*

Démonstration. Indiquons par $\varphi(x)$ la fonction du théorème 1, et soit s la même constante que dans ce théorème. Choisissons une suite $\{h_n\}$ telle que $h_n>0$, $h_n\to 0$ et que le nombre sh_n^{-1} soit entier et

$$nh_n^{-1}\omega_1(2h_nls^{-1})\gamma(2h_nls^{-1})\to 0;$$

posons

$$U_n(f;x)=\frac{f(x+h_n)-f(x)}{\omega_1(2h_n)}. \tag{19}$$

En posant $\Xi=L^\omega$ et appliquant le théorème de Saks, on obtient une décomposition satisfaisant à 1°, 2° et 3°. Or, supposons $|A|>0$. En vertu du lemme 2 de LI, la fonction

$$f(x)=\alpha\varphi(\beta x)$$

satisfait, pour $|h|\leqslant l$, à l'inégalité

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant K\alpha\beta\gamma(l\beta^{-1})\,\omega(|h|)\leqslant K\alpha\beta\gamma(2l\beta^{-1})\,\omega(|h|). \tag{20}$$

Posons

$$\beta_n=sh_n^{-1},\qquad \alpha_n=n\omega_1(2s\beta_n^{-1}),\qquad f_n(x)=\alpha_n\varphi(\beta_nx).$$

[7]) S. Saks, *On some functionals II*, Transactions of the American Mathematical Society 41 (1937), p. 160-170.

L'inégalité (20), appliquée à la fonction $f_n(x)$, donne pour $|h|\leqslant l$,

$$|f_n(x+h)-f_n(x)|\leqslant M_n\omega(|h|),$$

où

$$M_n=K\alpha_n\beta_n\gamma(2l\beta_n^{-1})<2Ksh_n^{-1}n\omega_1(2h_nls^{-1})\gamma(2h_nls^{-1})\to 0.$$

La norme $\|f_n\|$ tend vers 0, car on a de plus

$$2Kl\alpha_n<M_n\omega(2l\beta_n^{-1})\to 0.$$

Mais, d'autre part,

$$|U_n(f_n;x)|=\frac{|f_n(x+h_n)-f_n(x)|}{\omega_1(2h_n)}=n|\varphi(\beta_nx+s)-\varphi(\beta_nx)|,$$

et on démontre, comme au cas du théorème 1, à l'aide d'un théorème cité [8]), que la suite

$$\{U_n(f_n;x)\}$$

ne tend pas asymptotiquement vers 0 sur A, contrairement à la propriété 2°. L'ensemble A est par conséquent de mesure 0, donc la propriété 3° et le lemme 1 impliquent la thèse du théorème.

La fonction $\omega_1(h)$ étant donnée d'avance, on peut construire une fonction $\omega(h)$ telle que la condition (6) soit satisfaite. Toutes les fonctions de l'espace $\boldsymbol{L}^{\omega}$ correspondantes à la fonction $\omega(h)$, à l'exception d'un ensemble de première catégorie, jouissent de la propriété (b). Mais l'espace $\boldsymbol{L}^{\omega}$, considéré comme sous-ensemble de l'espace $\boldsymbol{C}$ de fonctions continues de période l, est de première catégorie dans $\boldsymbol{C}$. Or, l'argument appliqué pour démontrer le théorème 7 donne le

Théorème 8. *La fonction $\omega_1(h)$ étant fixée, toutes les fonctions de l'espace $\boldsymbol{C}$, à l'exception d'un ensemble de première catégorie, satisfont à la condition* (b).

[8]) l. c. [5]).

(Reçu par la Rédaction le 12. 6. 1951)

On Parseval equation for almost periodic vectors

by

K. MAURIN (Warszawa).

1. Introduction. The Parseval equation is the kernel of H. Weyl's theory of almost periodic vectors[1]). In this paper I give a proof which is much simpler than Weyl's original proof of this basic relation. The proof is based on some quite elementary properties of hermitian operators in Hilbert space.

2. Definitions and notations. We recall some fundamental notions of Weyl's theory[2]). Let $\mathfrak{H}$ be a (non-complete) Hilbert space, i. e. a complex linear space with the scalar product (f,g) defined for all $f,g,h\in\mathfrak{H}$ and such that

$$(f,g)=\overline{(g,f)},\qquad (f+g,h)=(f,h)+(g,h),$$

$$(af,g)=a(f,g)\text{ for each complex number } a,$$

$$(f,f)\neq 0\quad\text{for}\quad f\neq 0,\quad (f,f)\geqslant 0.$$

Following Weyl we suppose that, besides the usual Hilbert norm $\|f\|=\sqrt{(f,f)}$, there is defined another norm $|f|$, called *length* of f, which satisfies the usual conditions:

$$|f+g|\leqslant|f|+|g|;\qquad |af|=|a||f|.$$

The two norms $\|\ \|$ and $|\ |$ are related as follows:

$$\|f\|\leqslant|f|.$$

[1]) H. Weyl, *Almost periodic invariant vector sets in metric vector space*, American Journal of Mathematics 71 (1949), p. 178-205.

[2]) Ibidem, p. 178-180.