STUDIA MATHEMATICA 128 (2) (1998)

Sur les isométries partielles maximales essentielles

by

HAÏKEL SKHIRI (Lille)

Abstract. We study the problem of approximation by the sets $\mathcal{S}+K(H)$, $\mathcal{S}_e$, $\mathcal{V}+K(H)$ and $\mathcal{V}_e$ where H is a separable complex Hilbert space, $K(H)$ is the ideal of compact operators, $\mathcal{S} = \{L \in B(H) : L^*L = I\}$ is the set of isometries, $\mathcal{V} = \mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*$ is the set of maximal partial isometries, $\mathcal{S}_e = \{L \in B(H) : \pi(L^*)\pi(L) = \pi(I)\}$ and $\mathcal{V}_e = \mathcal{S}_e \cup \mathcal{S}_e^*$ where $\pi : B(H) \to B(H)/K(H)$ denotes the canonical projection. We also prove that all the relevant distances are attained. This implies that all these classes are closed and we remark that $\mathcal{V}_e = \mathcal{V} + K(H)$. We also show that $\mathcal{S} + K(H)$ is both closed and open in $\mathcal{S}_e$. Finally, we prove that $\mathcal{V}_e$, $\mathcal{S} + K(H)$ and $\mathcal{S}_e$ coincide with their boundaries $\partial(\mathcal{V}_e)$, $\partial(\mathcal{S} + K(H))$ and $\partial(\mathcal{S}_e)$ respectively.

1. Préliminaires. Soit H un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie et $B(H)$ l'algèbre des opérateurs bornés de H dans lui-même.

Pour $T \in B(H)$, notons T^*, $N(T)$ et $R(T)$ respectivement l'adjoint, le noyau et l'image de T. On note aussi $\alpha(T) = \dim N(T)$ la nullité de T et $\beta(T) = \dim(H/R(T))$.

Notons par $K(H)$ l'idéal des opérateurs compacts et $C(H) = B(H)/K(H)$ l'algèbre de Calkin. Soit $\pi : B(H) \to C(H)$ la surjection canonique et $\|T\|_e = \|\pi(T)\|$ la norme essentielle de T.

Rappelons que la *norme minimale* $m(T)$ d'un opérateur T de $B(H)$ est définie par

$$m(T) = \inf\{\|T(x)\| : x \in H \text{ et } \|x\| = 1\}.$$

D'après le Théorème 7.20 de [13], on voit aussi que

$$(1.1)\qquad m(T) = \inf\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \in \sigma(|T|)\}, \qquad \text{où } |T| = (T^*T)^{1/2}.$$

Soit $m_e(T) = \inf\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \in \sigma_e(|T|)\}$ (cf. [2] et [6]) où $\sigma_e(T)$ est le *spectre essentiel* de T défini par

$$(1.2)\qquad \sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \pi(T - \lambda I) \text{ n'est pas inversible dans } C(H)\}.$$

1991 *Mathematics Subject Classification*: 47A58, 47A53.

Alors (cf. [6], Théorème 1.1)

$$m_e(T) > 0 \quad \text{si et seulement si} \quad R(T) \text{ fermé et } \alpha(T) < \infty,$$
$$m_e(T^*) > 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \beta(T) < \infty.$$

Comme $C(H)$ est une C^*-algèbre, d'après le théorème de Gelfand et Naimark ([5], Théorème 19.1, page 49) il existe un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et un homomorphisme isométrique stellaire $\varrho : C(H) \to B(\mathcal{H})$. Il en résulte que

$$\sigma(\pi(T)) = \sigma(\varrho\pi(T)) \quad \text{et} \quad |\varrho\pi(T)| = \varrho\pi(|T|). \tag{1.3}$$

Maintenant en utilisant (1.1) et (1.3), on voit que

$$\begin{aligned} m_e(T) &= \inf\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \in \sigma(\pi(|T|))\} \\ &= \inf\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \in \sigma(\varrho\pi(|T|))\} \\ &= \inf\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \in \sigma(|\varrho\pi(T)|)\} = m(\varrho\pi(T)). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Pour $T \in B(H)$, notons $\operatorname{ind}(T)$ *l'indice* de T défini par

$$\operatorname{ind}(T) = \dim N(T) - \dim N(T^*) \quad (\text{avec } \infty - \infty = 0).$$

Soit

$$I_n = \{T \in B(H) : \operatorname{ind}(T) = n\} \quad \text{avec } n \in \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Un opérateur $T \in B(H)$ est appelé *Fredholm* (resp. *semi-Fredholm*) si $m_e(T) > 0$ et $m_e(T^*) > 0$ (resp. $m_e(T) > 0$ ou $m_e(T^*) > 0$).

Rappelons que la *conorme* $\gamma(T)$ de T est définie par

$$\gamma(T) = \inf\{\|Tx\| : x \in N(T)^\perp \text{ et } \|x\| = 1\} \quad (\gamma(T) = +\infty \text{ si } T = 0).$$

Alors ([1], [7], [11]) $\gamma(T) = \inf\{\sigma(|T|) \setminus \{0\}\}$, $\gamma(T) > 0$ si et seulement si $R(T)$ est fermé, et $\gamma(T) = \gamma(T^*)$.

L'un des nombreux résultats importants sur la théorie des opérateurs semi-Fredholm est le théorème suivant sur la stabilité des opérateurs semi-Fredholm par les petites perturbations.

THÉORÈME 1.2 ([7], Théorème V.1.6). *Soit $T \in B(H)$ un opérateur semi-Fredholm d'indice n et $S \in B(H)$ tel que $\|T - S\| < \gamma(T)$. Alors :*

(i) *S est semi-Fredholm d'indice n.*
(ii) *$\alpha(S) \le \alpha(T)$ et $\beta(S) \le \beta(T)$.*

Notons

$$\mathcal{U} = \{L \in B(H) : L^*L = LL^* = I\}$$

l'ensemble des unitaires, et

$$\mathcal{S} = \{L \in B(H) : L^*L = I\}$$

l'ensemble des isométries.

2. Approximation par les isométries essentielles

LEMME 2.1. *Soit $T \in B(H)$ un opérateur semi-Fredholm supérieur, c'est-à-dire, $m_e(T) > 0$. Notons $E(\cdot)$ la mesure spectrale de $|T|$ et K_0 l'opérateur défini par*

$$K_0 = E([0, m_e(T)[)(|T| - m_e(T)I) + E(]\|T\|_e, \|T\|])(|T| - \|T\|_e I).$$

Alors K_0 est un opérateur compact et

$$\|\,|T| - I - K_0\| = \max\{1 - m_e(T), \|T\|_e - 1\} = \|\,|T| - I\|_e.$$

Démonstration. Notons d'abord

$$K_1 = E([0, m_e(T)[)(|T| - m_e(T)I) \quad \text{et} \quad K_2 = E(]\|T\|_e, \|T\|])(|T| - \|T\|_e I).$$

Alors, $K_1, K_2 \in K(H)$. En effet, soit ε un réel tel que $0 < \varepsilon < m_e(T)$ et

$$\begin{aligned} K_{1,\varepsilon} &= E([0, m_e(T) - \varepsilon[)(|T| - m_e(T)I), \\ K_{2,\varepsilon} &= E(]\|T\|_e + \varepsilon, \|T\|])(|T| - \|T\|_e I). \end{aligned}$$

Alors, à l'aide de la Proposition 4.6 de [4], page 359, on remarque que tout point λ de $\sigma(|T|) \cap ([0, m_e(T) - \varepsilon] \cup [\|T\|_e + \varepsilon, \|T\|])$ est un point isolé de $\sigma(|T|) \cap ([0, m_e(T) - \varepsilon] \cup [\|T\|_e + \varepsilon, \|T\|])$, donc $\sigma(|T|) \cap ([0, m_e(T) - \varepsilon] \cup [\|T\|_e + \varepsilon, \|T\|])$ est un ensemble fini. Par ailleurs, comme $\lambda \notin \sigma_e(|T|)$, on constate que $E(\{\lambda\})H = N(|T| - \lambda I)$ est un sous-espace de dimension finie. Par conséquent, $\dim R(K_{i,\varepsilon}) < \infty$ pour $i = 1, 2$. D'où $K_{1,\varepsilon}, K_{2,\varepsilon} \in K(H)$.

D'autre part, on voit facilement que $\|K_i - K_{i,\varepsilon}\| \le \varepsilon$ pour $i = 1, 2$. Par conséquent,

$$K_0 = K_1 + K_2 \in K(H).$$

Montrons maintenant la deuxième partie du lemme. Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned} |T| - I - K_0 = {} & (m_e(T) - 1)E([0, m_e(T)[) + E([m_e(T), \|T\|_e])(|T| - I) \\ & + (\|T\|_e - 1)E(]\|T\|_e, \|T\|]). \end{aligned}$$

Ceci entraîne que $\sigma(|T| - I - K_0) \subseteq [m_e(T) - 1, \|T\|_e - 1]$. On a aussi $m_e(T) - 1 \in \sigma(|T| - I - K_0)$ et $\|T\|_e - 1 \in \sigma(|T| - I - K_0)$ car

$$\{m_e(T) - 1, \|T\|_e - 1\} \subseteq \sigma_e(|T| - I) = \sigma_e(|T| - I - K_0) \subseteq \sigma(|T| - I - K_0).$$

Par ailleurs, comme $|T| - I - K_0$ est un opérateur autoadjoint, on a

$$\begin{aligned} \||T| - I - K_0\| &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(|T| - I - K_0)\} \\ &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in [m_e(T) - 1, \|T\|_e - 1]\} \\ &= \max\{1 - m_e(T), \|T\|_e - 1\}. \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant le raisonnement précédent pour $\pi(|T| - I)$ à la place de $|T| - I - K_0$ et en tenant compte de fait que $m_e(T) = \inf\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_e(|T|)\}$, on obtient

$$\||T|-I\|_e = \max\{\|T\|_e - 1,\ 1 - m_e(T)\}. \blacksquare$$

THÉORÈME 2.2. *Soit $T \in B(H)$. Alors*

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{S} + K(H)) = \begin{cases} \max\{\|T\|_e - 1, 1 - m_e(T)\} & \text{si } \operatorname{ind}(T) \le 0, \\ \max\{\|T\|_e - 1, 1 + m_e(T^*)\} & \text{sinon}, \end{cases}$$

et cette distance est atteinte.

Démonstration. Pour tout $W \in \mathcal{S}$ et $K \in K(H)$, il est clair que

(1) $$\|T - W - K\| \ge \|T - W - K\|_e = \|T - W\|_e \ge \|T\|_e - 1.$$

D'autre part, d'après la Proposition 6.10 de [10], on voit que

(2) $$\|T - W - K\| \ge m_e(W) - m_e(T) = 1 - m_e(T).$$

Par conséquent, (1) et (2) impliquent que

(3) $$\operatorname{dist}(T, \mathcal{S} + K(H)) \ge \max\{\|T\|_e - 1, 1 - m_e(T)\}.$$

• Supposons que $\operatorname{ind}(T) \le 0$. Soit $T = W_0|T|$ la décomposition polaire de T avec W_0 une isométrie (cf. [8], Problème 106). Soit $E(\cdot)$ la mesure spectrale de $|T|$.

Supposons d'abord que $m_e(T) > 0$. Soit K_0 l'opérateur défini comme dans l'énoncé du Lemme 2.1. Alors $W_0 + W_0K_0 \in \mathcal{S} + K(H)$, et ceci entraîne en tenant compte du Lemme 2.1 que

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(T, \mathcal{S} + K(H)) &\le \|T - (W_0 + W_0K_0)\| = \||T| - I - K_0\| \\ &= \||T| - I\|_e = \max\{\|T\|_e - 1, 1 - m_e(T)\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après (3) on conclut que

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{S} + K(H)) = \max\{\|T\|_e - 1, 1 - m_e(T)\} = \|T - (W_0 + W_0K_0)\|,$$

et ceci prouve que cette distance est atteinte.

Maintenant si $m_e(T) = 0$, alors en utilisant (3) et le Théorème 2.3 de [12], on voit que

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{S} + K(H)) = \operatorname{dist}(T, \mathcal{U} + K(H)) = \max\{\|T\|_e - 1, 1\},$$

et cette distance est atteinte d'après le même théorème.

• Soit $\operatorname{ind}(T) > 0$. D'abord, en utilisant le Théorème 2.3 de [12], on remarque que

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{S} + K(H)) \le \operatorname{dist}(T, \mathcal{U} + K(H)) = \max\{\|T\|_e - 1, 1 + m_e(T^*)\}.$$

Réciproquement, soient $W \in \mathcal{S}$ et $K \in K(H)$. En utilisant le Théorème 2.1 de [12], on voit que

(4) $$\|T - W - K\| \ge 1 + m_e(T^*) \quad (\text{car } \operatorname{ind}(W) \ne \operatorname{ind}(T)).$$

D'où (1) et (4) impliquent que

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{S} + K(H)) \ge \max\{\|T\|_e - 1, 1 + m_e(T^*)\}.$$

Par conséquent,

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{S} + K(H)) = \max\{\|T\|_e - 1, 1 + m_e(T^*)\} = \operatorname{dist}(T, \mathcal{U} + K(H)),$$

et cette distance est atteinte d'après le Théorème 2.3 de [12]. $\blacksquare$

COROLLAIRE 2.3. *$\mathcal{S} + K(H)$ est un fermé.*

Démonstration. Ceci résulte du fait que $\operatorname{dist}(T, \mathcal{S} + K(H))$ est atteinte. $\blacksquare$

Notons $\mathcal{V} = \{L \in B(H) : L^*L = I \text{ ou } LL^* = I\} = \mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*$, l'ensemble des isométries ou des co-isométries. Parfois dans la littérature on dit que c'est l'ensemble des *isométries partielles maximales*.

THÉORÈME 2.4. *Soit $T \in B(H)$. Alors*

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{V} + K(H)) = \max\{\|T\|_e - 1, \min\{1 - m_e(T), 1 - m_e(T^*)\}\},$$

est cette distance est atteinte.

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\operatorname{ind}(T) \le 0$ (car sinon on considérera T^*). D'après le Lemme 7 de [3], on voit que $m_e(T) \ge m_e(T^*)$. En utilisant maintenant le Théorème 2.2, on obtient :

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(T, \mathcal{V} + K(H)) &\le \operatorname{dist}(T, \mathcal{S} + K(H)) = \max\{\|T\|_e - 1, 1 - m_e(T)\} \\ &= \max\{\|T\|_e - 1, \min\{1 - m_e(T), 1 - m_e(T^*)\}\}. \end{aligned}$$

Réciproquement, soit $W \in \mathcal{V}$ et $K \in K(H)$. Alors en utilisant la Proposition 6.10 de [10], on obtient $\|T - W - K\| \ge \max\{\|T\|_e - 1, 1 - m_e(T)\}$ (resp. $\max\{\|T\|_e - 1, 1 - m_e(T^*)\}$) si W est une isométrie (resp. co-isométrie), d'où

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{V} + K(H)) \ge \max\{\|T\|_e - 1, \min\{1 - m_e(T), 1 - m_e(T^*)\}\}.$$

Donc

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{V} + K(H)) = \max\{\|T\|_e - 1, \min\{1 - m_e(T), 1 - m_e(T^*)\}\}.$$

Ceci nous permet de conclure que

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{V} + K(H)) = \begin{cases} \operatorname{dist}(T, \mathcal{S} + K(H)) & \text{si } \operatorname{ind}(T) \le 0, \\ \operatorname{dist}(T, (\mathcal{S} + K(H))^*) & \text{si } \operatorname{ind}(T) > 0. \end{cases}$$

Par conséquent, d'après le Théorème 2.2 cette distance est atteinte. $\blacksquare$

COROLLAIRE 2.5. *$\mathcal{V} + K(H)$ est un fermé.*

Démonstration. Ceci résulte du fait que $\operatorname{dist}(T, \mathcal{V} + K(H))$ est atteinte. $\blacksquare$

Notons $\mathcal{U}_e = \{L \in B(H) : \pi(L^*)\pi(L) = \pi(L)\pi(L^*) = \pi(I)\}$, $\mathcal{S}_e = \{L \in B(H) : \pi(L^*)\pi(L) = \pi(I)\}$ et $\mathcal{V}_e = \{L \in B(H) : \pi(L^*)\pi(L) = \pi(I)$ ou

$\pi(L)\pi(L^*) = \pi(I)\} = \mathcal{S}_{\mathrm{e}} \cup (\mathcal{S}_{\mathrm{e}})^*$. Dans le Théorème 2.5 nous donnons les expressions des distances d'un opérateur arbitraire T de $B(H)$ à $\mathcal{S}_{\mathrm{e}}$ et $\mathcal{V}_{\mathrm{e}}$ en fonction de $\|T\|_{\mathrm{e}}, m_{\mathrm{e}}(T)$ et $m_{\mathrm{e}}(T^*)$.

Avant cela nous avons besoin d'un lemme qui montre que $m_{\mathrm{e}}(TW) \geq m_{\mathrm{e}}(T)$ pour tout opérateur T de $B(H)$ et $W \in \mathcal{S}_{\mathrm{e}}$.

LEMME 2.6. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $B(\mathcal{H})$ l'algèbre des opérateurs bornés de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$.*

1) *Si $W \in B(\mathcal{H})$ est une isométrie et $L \in B(\mathcal{H})$, alors $m(LW) \geq m(L)$.*

2) *Si W est une isométrie essentielle de $B(H)$ et $T \in B(H)$, alors $m_{\mathrm{e}}(TW) \geq m_{\mathrm{e}}(T)$.*

Démonstration. 1) Puisque $\{W(x) : x \in \mathcal{H} \text{ et } \|x\| = 1\} \subseteq \{x \in \mathcal{H} : \|x\| = 1\}$, on a

$$\begin{aligned} m(LW) &= \inf\{\|LW(x)\| : x \in \mathcal{H} \text{ et } \|x\| = 1\} \\ &\geq \inf\{\|L(x)\| : x \in \mathcal{H} \text{ et } \|x\| = 1\} = m(L). \end{aligned}$$

2) En utilisant 1), (1.4) et le fait que $\varrho\pi(W)$ est une isométrie de $B(\mathcal{H})$ où l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ provient du théorème de Gelfand et Naimark, on obtient

$$m_{\mathrm{e}}(TW) = m(\varrho\pi(TW)) = m(\varrho\pi(T)\varrho\pi(W)) \geq m(\varrho\pi(T)) = m_{\mathrm{e}}(T). \ \blacksquare$$

THÉORÈME 2.7. *Soit $T \in B(H)$. Alors :*

1) $$\operatorname{dist}(T, \mathcal{S}_{\mathrm{e}}) = \begin{cases} \max\{\|T\|_{\mathrm{e}} - 1, 1 + m_{\mathrm{e}}(T^*)\} & \textit{si } \operatorname{ind}(T) = +\infty, \\ \max\{\|T\|_{\mathrm{e}} - 1, 1 - m_{\mathrm{e}}(T)\} & \textit{sinon}, \end{cases}$$

et cette distance est atteinte.

2) $$\operatorname{dist}(T, \mathcal{V}_{\mathrm{e}}) = \max\{\|T\|_{\mathrm{e}} - 1, \min\{1 - m_{\mathrm{e}}(T), 1 - m_{\mathrm{e}}(T^*)\}\},$$

et cette distance est atteinte.

Démonstration. 1) Tout d'abord remarquons que pour tout $W \in \mathcal{S}_{\mathrm{e}}$, on a

$$\|T - W\| \geq \|T\|_{\mathrm{e}} - \|W\|_{\mathrm{e}} = \|T\|_{\mathrm{e}} - 1.$$

Donc

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{S}_{\mathrm{e}}) \geq \|T\|_{\mathrm{e}} - 1. \tag{1}$$

• Si $\operatorname{ind}(T) = +\infty$, alors d'abord d'après le Théorème 2.4 de [12], on voit que

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{S}_{\mathrm{e}}) \leq \operatorname{dist}(T, \mathcal{U}_{\mathrm{e}}) = \max\{\|T\|_{\mathrm{e}} - 1, 1 + m_{\mathrm{e}}(T^*)\}. \tag{2}$$

Réciproquement, soit $W \in \mathcal{S}_{\mathrm{e}}$. Alors en utilisant le Lemme 2.6 et le Théorème 2.1 de [12], et le fait que $\operatorname{ind}(T^*W) = -\infty$, on obtient

$$\|T^*W - I\|_{\mathrm{e}} \geq 1 + m_{\mathrm{e}}(T^*W) \geq 1 + m_{\mathrm{e}}(T^*).$$

D'où

$$\|T - W\| \geq \|T^*W - I\|_{\mathrm{e}} \geq 1 + m_{\mathrm{e}}(T^*).$$

Par conséquent, en utilisant (1) on obtient

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{S}_{\mathrm{e}}) \geq \max\{\|T\|_{\mathrm{e}} - 1, 1 + m_{\mathrm{e}}(T^*)\}. \tag{3}$$

Donc (2) et (3) entraînent que

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{S}_{\mathrm{e}}) = \max\{\|T\|_{\mathrm{e}} - 1, 1 + m_{\mathrm{e}}(T^*)\} = \operatorname{dist}(T, \mathcal{U}_{\mathrm{e}}),$$

et cette distance est atteinte d'après le Théorème 2.4 de [12].

• Si $\operatorname{ind}(T) < +\infty$, alors en utilisant (1) et la Proposition 6.10 de [10], on obtient

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{S}_{\mathrm{e}}) \geq \max\{\|T\|_{\mathrm{e}} - 1, 1 - m_{\mathrm{e}}(T)\}. \tag{4}$$

Inversement, si $\operatorname{ind}(T)$ est fini, alors d'après le Théorème 2.4 de [12], on a

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{S}_{\mathrm{e}}) \leq \operatorname{dist}(T, \mathcal{U}_{\mathrm{e}}) = \max\{\|T\|_{\mathrm{e}} - 1, 1 - m_{\mathrm{e}}(T)\}. \tag{5}$$

Par suite, (4) et (5) impliquent que

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{S}_{\mathrm{e}}) = \max\{\|T\|_{\mathrm{e}} - 1, 1 - m_{\mathrm{e}}(T)\} = \operatorname{dist}(T, \mathcal{U}_{\mathrm{e}}),$$

et cette distance est atteinte (cf. [12], Théorème 2.4).

Si $\operatorname{ind}(T) = -\infty$, alors d'après le Théorème 2.2, on remarque que

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{S}_{\mathrm{e}}) \leq \operatorname{dist}(T, \mathcal{S} + K(H)) = \max\{\|T\|_{\mathrm{e}} - 1, 1 - m_{\mathrm{e}}(T)\}. \tag{6}$$

Par conséquent, (4) et (6) impliquent que

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{S}_{\mathrm{e}}) = \max\{\|T\|_{\mathrm{e}} - 1, 1 - m_{\mathrm{e}}(T)\} = \operatorname{dist}(T, \mathcal{S} + K(H)),$$

et cette distance est atteinte d'après le Théorème 2.2.

2) Grâce au Théorème 2.4, il suffit de montrer que

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{V}_{\mathrm{e}}) \geq \max\{\|T\|_{\mathrm{e}} - 1, \min\{1 - m_{\mathrm{e}}(T), 1 - m_{\mathrm{e}}(T^*)\}\}.$$

Soit $W \in \mathcal{V}_{\mathrm{e}}$. D'après la Proposition 6.10 de [10], on remarque que

$$\|T - W\| \geq \min\{1 - m_{\mathrm{e}}(T), 1 - m_{\mathrm{e}}(T^*)\}.$$

Or, il est clair que $\|T - W\| \geq \|T\|_{\mathrm{e}} - 1$. Donc

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{V}_{\mathrm{e}}) \geq \max\{\|T\|_{\mathrm{e}} - 1, \min\{1 - m_{\mathrm{e}}(T), 1 - m_{\mathrm{e}}(T^*)\}\}.$$

Par conséquent,

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{V}_{\mathrm{e}}) = \max\{\|T\|_{\mathrm{e}} - 1, \min\{1 - m_{\mathrm{e}}(T), 1 - m_{\mathrm{e}}(T^*)\}\}.$$

Ainsi on conclut que

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{V}_{\mathrm{e}}) = \begin{cases} \operatorname{dist}(T, \mathcal{S}_{\mathrm{e}}) & \text{si } \operatorname{ind}(T) \leq 0, \\ \operatorname{dist}(T, (\mathcal{S}_{\mathrm{e}})^*) & \text{si } \operatorname{ind}(T) > 0, \end{cases}$$

ce qui prouve d'après 1) que cette distance est atteinte.

Ceci conclut la démonstration du Théorème 2.7. $\blacksquare$

COROLLAIRE 2.8. *$\mathcal{S}_e$ et $\mathcal{V}_e$ sont fermés.*

Démonstration. Ceci résulte du fait que $\operatorname{dist}(T,\mathcal{S}_e)$ et $\operatorname{dist}(T,\mathcal{V}_e)$ sont atteintes. ■

COROLLAIRE 2.9 ([9]). $\mathcal{V}_e = \mathcal{V} + K(H)$.

Démonstration. Ceci est une simple conséquence des Corollaires 2.5 et 2.8 et des Théorèmes 2.4 et 2.7. ■

COROLLAIRE 2.10. 1) *Si $T \in \mathcal{S}_e$ alors $\operatorname{ind}(T) \neq +\infty$.*
2) *$T \in \mathcal{S}_e$ si et seulement si $\|T\|_e = m_e(T) = 1$.*
3) *$T \in \mathcal{V}_e$ si et seulement si $\|T\|_e = m_e(T) = 1$ ou $\|T\|_e = m_e(T^*) = 1$.*

REMARQUE. L'assertion 1) du Corollaire 2.10 est aussi une conséquence de l'inversibilité à gauche modulo les opérateurs compacts des éléments de $\mathcal{S}_e$.

COROLLAIRE 2.11. *$\mathcal{S} + K(H)$ est un ensemble fermé et ouvert de $\mathcal{S}_e$.*

Démonstration. D'après le Corollaire 2.3, il suffit de montrer que $\mathcal{S} + K(H)$ est un ouvert. Soit $T \in \mathcal{S} + K(H)$. Alors T est un opérateur semi-Fredholm d'indice $n \leq 0$ (voir Théorème 2.2). Soit $\mathcal{B}(T,\gamma(T))$ la boule ouverte de $B(H)$ de centre T et de rayon $\gamma(T)$. Montrons que $\mathcal{B}(T,\gamma(T)) \cap \mathcal{S}_e \subseteq \mathcal{S}+K(H)$. Soit $L \in \mathcal{B}(T,\gamma(T)) \cap \mathcal{S}_e$, en particulier $L \in \mathcal{S}_e$. Donc d'après le Corollaire 2.10, $\|L\|_e = m_e(L) = 1$ et comme $\operatorname{ind}(L) = \operatorname{ind}(T) = n \leq 0$ (voir Théorème 1.1), on conclut d'après le Théorème 2.2 et le Corollaire 2.3 que $L \in \mathcal{S} + K(H)$.

COROLLAIRE 2.12. *Pour $n \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, $\mathcal{S}_e \cap I_n$ est un ouvert et fermé de $\mathcal{S}_e$.*

Démonstration. Comme tout opérateur T de $\mathcal{S}_e \cap I_n$ est semi-Fredholm et grâce à la continuité de l'indice, on voit facilement que $\mathcal{S}_e \cap I_n$ est un ouvert de $\mathcal{S}_e$. Montrons que $\mathcal{S}_e \cap I_n$ est un fermé. Soit $T \in \overline{\mathcal{S}_e \cap I_n} \subseteq \overline{\mathcal{S}}_e = \mathcal{S}_e$. Donc T est semi-Fredholm et par continuité de l'indice on conclut que T est d'indice n. Par conséquent, $T \in \mathcal{S}_e \cap I_n$. ■

Pour un ensemble X de $B(H)$, notons $\operatorname{int}(X)$, $\overline{X}$, ∂X respectivement l'intérieur, l'adhérence et la frontière de X.

THÉORÈME 2.13. 1) *$\partial\mathcal{V}_e = \partial(\mathcal{V} + K(H)) = \mathcal{V}_e = \mathcal{V} + K(H)$.*
2) *$\partial\mathcal{S}_e = \partial\overline{\mathcal{S}}_e = \overline{\mathcal{S}}_e = \mathcal{S}_e$.*
3) *$\partial(\mathcal{S} + K(H)) = \partial(\overline{\mathcal{S} + K(H)}) = \mathcal{S} + K(H)$.*

Démonstration. 1) Tout d'abord, d'après le Corollaire 2.8, $\mathcal{V}_e$ est un fermé.

D'autre part, $\operatorname{int}(\mathcal{V}_e) = \emptyset$. En effet, supposons que $\operatorname{int}(\mathcal{V}_e) \neq \emptyset$ et soit $T \in \operatorname{int}(\mathcal{V}_e)$. Alors il existe $r > 0$ tel que la boule $\mathcal{B}(T,r)$ est incluse dans $\mathcal{V}_e$.

Soit $L = (1 + \frac{r}{2\|T\|})T \in B(H)$. Alors on vérifie facilement que $L \in \mathcal{B}(T,r)$ et que $\|L\|_e = 1 + r/(2\|T\|) \neq 1$, contradiction. Par conséquent,

$$\partial\mathcal{V}_e = \partial\overline{\mathcal{V}}_e = \overline{\mathcal{V}}_e = \mathcal{V}_e.$$

2) D'abord, d'après le Corollaire 2.8, $\mathcal{S}_e$ est un fermé. Comme $\operatorname{int}(\mathcal{S}_e) = \operatorname{int}(\mathcal{V}_e) = \emptyset$, on en déduit que

$$\partial\mathcal{S}_e = \partial\overline{\mathcal{S}}_e = \overline{\mathcal{S}}_e = \mathcal{S}_e.$$

3) C'est une conséquence du Corollaire 2.3 et le fait que $\operatorname{int}(\mathcal{S} + K(H)) = \emptyset$. ■

COROLLAIRE 2.14. 1) *$\partial\mathcal{U}_e = \partial\overline{\mathcal{U}}_e = \overline{\mathcal{U}}_e = \mathcal{U}_e$.*
2) *$\partial(\mathcal{U} + K(H)) = \partial(\overline{\mathcal{U} + K(H)}) = \mathcal{U} + K(H)$.*

Démonstration. 1) Comme $\operatorname{dist}(T,\mathcal{U}_e)$ est atteinte, on constate que $\mathcal{U}_e$ est fermé. D'autre part, comme $\mathcal{U}_e \subseteq \mathcal{V}_e$, on en déduit en tenant compte du Théorème 2.13 que $\operatorname{int}(\mathcal{U}_e) = \operatorname{int}(\mathcal{V}_e) = \emptyset$. Par conséquent,

$$\partial(\mathcal{U}_e) = \partial(\overline{\mathcal{U}}_e) = \overline{\mathcal{U}}_e = \mathcal{U}_e.$$

2) En utilisant le Théorème 2.3 de [12], on obtient $\mathcal{U}+K(H) = \overline{\mathcal{U} + K(H)} = \mathcal{U}_e \cap I_0$. D'autre part, comme $\operatorname{int}(\overline{\mathcal{U} + K(H)}) = \operatorname{int}(\mathcal{U}_e) = \emptyset$, on conclut que

$$\partial(\mathcal{U} + K(H)) = \partial(\overline{\mathcal{U} + K(H)}) = \mathcal{U} + K(H). \ ■$$

Remerciements. Je tiens à remercier tout spécialement le professeur M. Mbekhta pour tous ses conseils qui m'ont conduit au présent article, ainsi que le referee pour ses remarques sur la première rédaction de ce papier.

Références

[1] C. Apostol, *The reduced minimum modulus*, Michigan Math. J. 32 (1985), 279–294.
[2] R. Bouldin, *The essential minimum modulus*, Indiana Univ. Math. J. 30 (1981), 513–517.
[3] —, *Approximation by semi-Fredholm operators with fixed nullity*, Rocky Mountain J. Math. 20 (1990), 39–50.
[4] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, 2nd ed., Springer, New York, 1990.
[5] R. S. Doran and V. A. Belfi, *Characterizations of C^*-algebras. The Gelfand–Naimark Theorems*, M. Dekker, New York, 1986.
[6] P. A. Fillmore, J. G. Stampfli and J. P. Williams, *On the essential numerical range, the essential spectrum, and a problem of Halmos*, Acta Sci. Math. (Szeged) 33 (1972), 179–192.
[7] S. Goldberg, *Unbounded Linear Operators*, McGraw-Hill, New York, 1966.
[8] P. R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, D. Van Nostrand, 1967.
[9] P. de la Harpe, *Initiation à l'algèbre de Calkin*, Lecture Notes in Math. 725, Springer, 1978, 180–219.

[10] D. A. Herrero, *Approximation of Hilbert Space Operators*, Vol. I, Pitman, Boston, 1982.
[11] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, Berlin, 1966.
[12] D. D. Rogers, *Approximation by unitary and essentially unitary operators*, Acta Sci. Math. (Szeged) 39 (1977), 141–151.
[13] J. Weidmann, *Linear Operators in Hilbert Spaces*, Springer, New York, 1980.

URA au CNRS et UFR de Mathématiques, Bât. M2
Université des Sciences et Technologies de Lille
F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France
E-mail: skhiri@gat.univ-lille1.fr

Received October 15, 1996 (3755)
Revised version September 12, 1997

STUDIA MATHEMATICA 128 (2) (1998)

Dominated ergodic theorems in rearrangement invariant spaces

by

MICHAEL BRAVERMAN (Beer-Sheva),
BEN-ZION RUBSHTEIN (Beer-Sheva) and
ALEXANDER VEKSLER (Tashkent)

Abstract. We study conditions under which Dominated Ergodic Theorems hold in rearrangement invariant spaces. Consequences for Orlicz and Lorentz spaces are given. In particular, our results generalize the classical theorems for the spaces L_p and the classes $L\log^n L$.

1. Results. The aim of this paper is to generalize the classical Dominated Ergodic Theorems for L_1-L_∞-contractions, which hold in the spaces L_p (see, for example, [K85], p. 52, and references there), to the class of rearrangement invariant Banach spaces. We will show that this generalization can be obtained by using standard techniques connected with the Hardy–Littlewood maximal function. Corresponding consequences for Orlicz and Lorentz spaces include the classical results for the spaces L_p.

Recall some definitions and notations. Let μ be Lebesgue measure on $[0,1]$. For a measurable function f on $(0,1)$, its *decreasing rearrangement* is defined by the formula

$$f^*(t) = \inf\{y>0 : \mu\{s : |f(s)|>y\} \le t\}, \qquad 0<t\le 1. \tag{1.1}$$

Clearly f^* is decreasing right-continuous, and has the same distribution as $|f|$.

A Banach space $\mathbf{E}$ of measurable functions on $(0,1)$ is called *rearrangement invariant* (r.i.) if the following conditions hold:

(i) $g\in\mathbf{E}$ and $|f|\le|g|$ imply that $f\in\mathbf{E}$ and $\|f\|_{\mathbf{E}}\le\|g\|_{\mathbf{E}}$;
(ii) $g\in\mathbf{E}$ and $f^*=g^*$ imply that $f\in\mathbf{E}$ and $\|f\|_{\mathbf{E}}=\|g\|_{\mathbf{E}}$.

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 46E10, 47A35.
Key words and phrases: rearrangement invariant space, ergodic theorem, Hardy–Littlewood property.
Research of the first author supported by the Ministry of Absorption of Israel.
Research of the second author supported by a Gilady fellowship and by a grant from the Israel Sciences Foundation.