[5] J. A. Chao, *Hardy spaces on regular martingales*, in: Martingale Theory in Harmonic Analysis and Banach Spaces, Lecture Notes in Math. 939, Springer, Berlin, 1982, 18–28.
[6] R. R. Coifman and G. Weiss, *Extensions of Hardy spaces and their use in analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), 569–645.
[7] S. Fridli and P. Simon, *On the Dirichlet kernels and a Hardy space with respect to the Vilenkin system*, Acta Math. Hungar. 45 (1985), 223–234.
[8] A. M. Garsia, *Martingale Inequalities. Seminar Notes on Recent Progress*, Math. Lecture Notes Series, Benjamin, New York, 1973.
[9] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some new properties of Fourier constants*, J. London Math. Soc. 6 (1931), 3–9.
[10] N. R. Ladhawala, *Absolute summability of Walsh–Fourier series*, Pacific J. Math. 65 (1976), 103–108.
[11] C. Métraux, *Quelques inégalités pour martingales à paramètre bidimensionnel*, in: Séminaire de Probabilités XII, Lecture Notes in Math. 649, Springer, Berlin, 1978, 170–179.
[12] F. Móricz, *On double cosine, sine and Walsh series with monotone coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc. 109 (1990), 417–425.
[13] —, *On Walsh series with coefficients tending monotonically to zero*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 38 (1981), 183–189.
[14] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon and J. Pál, *Walsh Series: An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*, Adam Hilger, Bristol, 1990.
[15] P. Simon, *Investigations with respect to the Vilenkin system*, Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math. 28 (1985), 87–101.
[16] P. Simon and F. Weisz, *Hardy–Littlewood type inequalities for Vilenkin–Fourier coefficients*, Anal. Math., to appear.
[17] N. Y. Vilenkin, *On a class of complete orthonormal systems*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 11 (1947), 363–400 (in Russian); English transl.: Amer. Math. Soc. Transl. 28 (1963), 1–35.
[18] F. Weisz, *Hardy spaces and Cesàro means of two-dimensional Fourier series*, in: Approximation Theory and Function Series (Budapest, 1995), Bolyai Soc. Math. Stud. 5, Budapest, 1996, 353–367.
[19] —, *Inequalities relative to two-parameter Vilenkin–Fourier coefficients*, Studia Math. 99 (1991), 221–233.
[20] —, *Martingale Hardy Spaces and their Applications in Fourier-Analysis*, Lecture Notes in Math. 1568, Springer, Berlin, 1994.
[21] —, *Strong convergence theorems for two-parameter Walsh–Fourier and trigonometric-Fourier series*, Studia Math. 117 (1996), 173–194.
[22] —, *Two-parameter Hardy–Littlewood inequalities*, ibid. 118 (1996), 175–184.

Department of Numerical Analysis
Eötvös L. University
Múzeum krt. 6-8
H-1088 Budapest, Hungary
E-mail: simon@ludens.elte.hu
weisz@ludens.elte.hu

Received May 30, 1996 (3684)

STUDIA MATHEMATICA 125 (3) (1997)

Quelques remarques sur les facteurs des systèmes dynamiques gaussiens

par

A. IWANIK (Wrocław), M. LEMAŃCZYK (Toruń),
T. DE LA RUE (Rouen) et J. DE SAM LAZARO (Rouen)

Abstract. We study the factors of Gaussian dynamical systems which are generated by functions depending only on a finite number of coordinates. As an application, we show that for Gaussian automorphisms with simple spectrum, the partition $\{(X_0 \le 0), (X_0 > 0)\}$ is generating.

Introduction. On se place dans le cadre d'un système dynamique $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, T)$, que l'on suppose gaussien : il existe un processus gaussien réel centré $(X_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ qui engendre $\mathscr{A}$, avec $X_p = X_0 \circ T^p$ pour tout entier p. La loi d'un tel processus, et donc toutes les propriétés du système dynamique qu'il engendre, est entièrement déterminée par la donnée de ses covariances, qui s'écrivent

$$(1) \qquad \langle X_p, X_q\rangle_{L^2(\mu)} = \mathbb{E}[X_pX_q] = \int_{[-\pi,\pi]} e^{i(p-q)t}\,d\sigma(t),$$

où σ est une mesure finie symétrique sur $[-\pi,\pi]$, appelée *mesure spectrale* du système. Un tel système est construit canoniquement en prenant $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, X_p étant la projection sur la $p$ième coordonnée, T le décalage des coordonnées et μ la probabilité sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ qui donne au processus (X_p) la loi voulue. On pourra toujours supposer dans la suite que le modèle utilisé est celui-ci. On suppose aussi le système ergodique, ce qui équivaut à

$$\forall t \in [-\pi,\pi], \quad \sigma(\{t\}) = 0.$$

Pour une présentation détaillée de ces systèmes, on peut par exemple consulter [1].

On s'intéresse ici aux *facteurs* d'un tel système, c'est-à-dire aux sous-tribus $\mathscr{F}$ de $\mathscr{A}$ qui sont T-invariantes. Rappelons que chaque facteur $\mathscr{F}$ de T définit un système dynamique noté $T_{\mathscr{F}}$ sur l'espace $\Omega_{\mathscr{F}}$, obtenu à partir de Ω en identifiant les points ω et ω' tels que $\forall F \in \mathscr{F}$, $\mathbf{1}_F(\omega) = \mathbf{1}_F(\omega')$.

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 28D05; Secondary 60G15.

Les deux premiers auteurs tiennent à remercier le laboratoire “Analyse et modèles stochastiques” de l'université de Rouen, pour l'accueil chaleureux qu'ils ont reçu de mars à mai 1996, période durant laquelle ce travail fut réalisé.

1. Facteurs classiques d'un système gaussien. On note $\mathscr{H}$ le sous-espace gaussien réel fermé de $L^2(\mu)$ engendré par le processus (X_p), et $L^2_{\text{sym}}([-\pi,\pi],\sigma)$ le sous-espace réel de $L^2(\sigma)$ formé des fonctions φ telles que pour tout t, $\varphi(-t)=\overline{\varphi(t)}$. On construit classiquement à partir de (1) une isométrie entre $\mathscr{H}$ et $L^2_{\text{sym}}([-\pi,\pi],\sigma)$, qui fait correspondre X_p à $e^{ip\cdot}$ pour tout entier p. En général, si $X\in\mathscr{H}$ correspond par cette isométrie à $\varphi\in L^2_{\text{sym}}([-\pi,\pi],\sigma)$, on note

$$X\leftrightarrow\varphi.$$

On voit facilement qu'alors, pour tout $p\in\mathbb{Z}$,

$$X\circ T^p\leftrightarrow\varphi e^{ip\cdot}.$$

Si $\mathscr{G}$ est un sous-espace fermé de $\mathscr{H}$ qui correspond par cette isométrie au sous-espace $\mathscr{V}$ de $L^2_{\text{sym}}([-\pi,\pi],\sigma)$, on note aussi

$$\mathscr{G}\leftrightarrow\mathscr{V}.$$

1.1. *Facteurs gaussiens.* Pour tout $A\subset[-\pi,\pi]$ mesurable et symétrique, on note

$$L^2_{\text{sym}}(A,\sigma):=\{\varphi\in L^2_{\text{sym}}([-\pi,\pi],\sigma):\varphi|_{[-\pi,\pi]\setminus A}=0\};$$

on définit alors le sous-espace fermé $\mathscr{H}_A$ de $\mathscr{H}$ par

$$\mathscr{H}_A\leftrightarrow L^2_{\text{sym}}(A,\sigma).$$

Comme $L^2_{\text{sym}}(A,\sigma)$ est stable par la multiplication par $e^{i\cdot}$, $\mathscr{H}_A$ est stable par $U_T: X\mapsto X\circ T$. La sous-tribu $\mathscr{F}_A$ engendrée par $\mathscr{H}_A$ est donc T-invariante : c'est un facteur de T. L'espace $\mathscr{H}_A$ étant linéairement engendré par le processus gaussien $(X_p^{(A)})_{p\in\mathbb{Z}}$ défini par

$$\forall p\in\mathbb{Z},\quad X_p^{(A)}=X_0^{(A)}\circ T^p\leftrightarrow\mathbf{1}_A e^{ip\cdot},$$

le facteur $\mathscr{F}_A$ est engendré par ce processus. Le système dynamique $T_{\mathscr{F}_A}$ est donc aussi un système gaussien, dont la mesure spectrale σ_A est absolument continue par rapport à σ, de densité

$$\frac{d\sigma_A}{d\sigma}:=\mathbf{1}_A.$$

Un tel facteur $\mathscr{F}_A$ sera donc appelé un facteur *gaussien* de T.

1.2. *Facteurs compacts.* On note $C(T)$ le groupe des automorphismes de $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ qui commutent avec T, et on s'intéresse au sous-groupe $\mathscr{S}$ de

$C(T)$ formé des S tels que $\mathscr{H}$ soit stable par U_S. Si S est dans $\mathscr{S}$, on a donc $X_0\circ S\in\mathscr{H}$, et il existe donc $\varphi\in L^2_{\text{sym}}([-\pi,\pi],\sigma)$ tel que

$$X_0\circ S\leftrightarrow\varphi.$$

Comme $ST=TS$, on a alors aussi pour tout $p\in\mathbb{Z}$,

$$X_p\circ S\leftrightarrow e^{ip\cdot}\varphi,$$

puis pour tout $X\in H$,

$$X\leftrightarrow\psi\Rightarrow X\circ S\leftrightarrow\psi\varphi.$$

Comme U_S est une isométrie, la multiplication par φ doit être une isométrie de $L^2_{\text{sym}}([-\pi,\pi],\sigma)$, ce qui signifie $|\varphi|=1$ σ-p.s.

On notera désormais $\mathscr{M}$ le groupe multiplicatif formé des $\varphi\in L^2_{\text{sym}}([-\pi,\pi],\sigma)$ qui sont de module constant égal à 1. Si $\varphi\in\mathscr{M}$, la multiplication par φ dans $L^2_{\text{sym}}([-\pi,\pi],\sigma)$ définit sur $\mathscr{H}$ une isométrie U qui commute avec $U_T|_{\mathscr{H}}$. Le processus gaussien $(UX_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ a alors la même loi que $(X_p)_{p\in\mathbb{Z}}$, et engendre linéairement $\mathscr{H}$, donc aussi la tribu $\mathscr{A}$. Il existe alors un unique $S\in\mathscr{S}$ tel que $UX_p=X_p\circ S$ pour tout p, donc tel que $U_S|_{\mathscr{H}}=U$.

On peut donc ainsi établir un isomorphisme entre les groupes $\mathscr{S}$ et $\mathscr{M}$, et on utilisera aussi la notation $S\leftrightarrow\varphi$ pour indiquer que $S\in\mathscr{S}$ correspond par cet isomorphisme à $\varphi\in\mathscr{M}$. Notons que, $\mathscr{S}$ étant muni de la topologie de la convergence faible des transformations (définie par : $S_n\to S\Leftrightarrow\forall A\in\mathscr{A}$, $\mu(S_n^{-1}A\bigtriangleup S^{-1}A)\to0$), et $\mathscr{M}$ de la topologie de $L^2(\sigma)$, ces deux groupes sont ainsi *topologiquement* isomorphes, comme on peut le voir dans [4].

Si Γ est un sous-groupe compact de $\mathscr{S}$, la tribu

$$\mathscr{F}_\Gamma:=\{A\in\mathscr{A}:\forall S\in\Gamma,\ SA=A\}$$

est T-invariante. C'est donc un facteur de T, appelé *facteur compact.*

Un cas particulièrement simple et important est celui où $\Gamma=\{\mathrm{Id},-\mathrm{Id}\}$. Le facteur $\mathscr{F}_\Gamma$ est alors constitué des parties de Ω symétriques par rapport à l'origine, et on l'appelle le *facteur pair.* Ce facteur apparaît dans un travail de Newton et Parry ([7]), qui l'utilisent pour construire l'un des premiers exemples de système dynamique d'entropie nulle à spectre de Lebesgue dénombrable.

LEMME 1. *Supposons le facteur $\mathscr{F}_\Gamma$ non trivial* (*c'est-à-dire, contenant des parties de Ω de mesure strictement comprise entre* 0 *et* 1), *soit $S\in\Gamma$ et $\varphi\in\mathscr{M}$ tels que $S\leftrightarrow\varphi$. Alors il existe $z_0\in\mathbb{C}, |z_0|=1$, tel que*

$$\sigma(\{t\in[-\pi,\pi]:\varphi(t)=z_0\})>0.$$

Preuve. Notons η la mesure image de σ par φ. Il est facile de voir que le type spectral maximal de l'opérateur U_S sur $\mathscr{H}$ est justement η. En décomposant $\mathscr{H}$ en une somme de sous-espaces orthogonaux et cycliques pour U_S, on voit que le système dynamique $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, S)$ est un produit direct de systèmes dynamiques gaussiens, qui sont tous à mesure spectrale absolument continue par rapport à η. Supposons maintenant que pour tout z,

$$\sigma(\{t \in [-\pi, \pi] : \varphi(t) = z\}) = 0;$$

alors η est continue, et donc chacun de ces systèmes gaussiens est faiblement mélangeant. On en déduit que S est ergodique, et donc $\mathscr{F}_\Gamma$ ne peut être que le facteur trivial. ∎

1.3. *Facteurs classiques.* On appelle *facteur classique* de T tout facteur compact d'un facteur gaussien de T. L'importance des facteurs classiques dans l'étude des facteurs des systèmes gaussiens peut se justifier par le théorème suivant, concernant certains systèmes gaussiens étudiés dans [2].

THÉORÈME 2. *Si T est GAG (Gaussien à Autocouplages Gaussiens), alors les facteurs classiques de T sont les seuls facteurs de T.*

Ce théorème s'applique en particulier dans le cas où T est un gaussien-Kronecker, et plus généralement dans le cas où T est un gaussien à spectre simple (voir [3]). Il est donc valable même pour certains systèmes gaussiens mélangeants, puisqu'il en existe à spectre simple (voir [6]).

2. Facteur engendré par une variable ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées

2.1. *Quelques résultats sur les lois gaussiennes multidimensionnelles.* Rappelons qu'un vecteur gaussien $Y = (Y_1, \ldots, Y_m)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ est dit *non dégénéré* si les variables aléatoires réelles $Y_1, \ldots, Y_m$ ne sont pas linéairement liées. Une propriété classique des lois gaussiennes multidimensionnelles affirme que Y est non dégénéré si et seulement si la loi ν_Y de Y est équivalente à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$. On utilisera dans la suite les deux lemmes qui suivent.

LEMME 3. *La mesure spectrale σ du processus gaussien réel $(X_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ étant diffuse, pour tout $m \ge 1$ et tous $p_1 < \ldots < p_m$ entiers, le vecteur gaussien $(X_{p_1}, \ldots, X_{p_m})$ est non dégénéré.*

Preuve. Supposons qu'une combinaison linéaire des X_{p_i} soit nulle. De $\alpha_1 X_{p_1} + \ldots + \alpha_m X_{p_m} = 0$ on déduit, dans $L^2_{\mathrm{sym}}([-\pi, \pi], \sigma)$,

$$\alpha_1 e^{ip_1 \cdot} + \ldots + \alpha_m e^{ip_m \cdot} = 0.$$

Comme σ est diffuse, il existe donc une infinité de réels θ dans $[-\pi, \pi]$ tels que

$$\alpha_1 e^{ip_1\theta} + \ldots + \alpha_m e^{ip_m\theta} = 0,$$

d'où l'on déduit $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$. ∎

LEMME 4. *Soit f une fonction mesurable bornée de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$, X et Y deux vecteurs gaussiens à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ non dégénérés et indépendants. Si Y est indépendant de $f(X + Y)$, alors f est constante.*

Preuve. Notons ν_X et ν_Y les lois respectives de X et Y sur $\mathbb{R}^m$. Comme Y est non dégénéré, ν_Y est équivalente à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$, et on a par l'indépendance de $f(X + Y)$ et Y, pour presque tout $y \in \mathbb{R}^m$,

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x + y)\, d\nu_X(x) = C := \mathbb{E}[f(X + Y)].$$

Soit φ la densité de ν_X par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$; pour presque tout y on a

$$C = \int_{\mathbb{R}^m} f(x + y)\, \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi(x - y)\, dx. \tag{2}$$

Comme $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, \varphi(x - y)\, dx$ est clairement continue, (2) est en fait vraie pour tout $y \in \mathbb{R}^m$, d'où

$$\forall y \in \mathbb{R}^m, \qquad \int_{\mathbb{R}^m} (f(x) - C)\varphi(x - y)\, dx = 0.$$

Or, ν_X étant une loi gaussienne sur $\mathbb{R}^m$, la transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ de φ ne s'annule pas, et cela implique que les translatées de φ, c'est-à-dire les fonctions $\varphi_y : x \mapsto \varphi(x - y), y \in \mathbb{R}^m$, engendrent $L^1(\mathbb{R}^m)$ (voir [5]). On en déduit aisément que $f(x) = C$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^m$. ∎

2.2. *D'autres facteurs?* On fixe maintenant une fonction $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ mesurable et bornée qui n'est pas presque partout constante, des entiers $p_1 < \ldots < p_m$, et on définit une variable aléatoire réelle F par $F := f(X_{p_1}, \ldots, X_{p_m})$. On note $\mathscr{F}_F$ le facteur engendré par F, c'est-à-dire la tribu engendrée par les variables $F \circ T^p$, $p \in \mathbb{Z}$.

PROPOSITION 5. *Soit A symétrique dans $[-\pi, \pi]$ tel que $\mathscr{F}_F \subset \mathscr{F}_A$. Alors $A = [-\pi, \pi]$ (mod σ), i.e. $\mathscr{F}_A = \mathscr{A}$.*

Preuve. Dans $\mathscr{H}$, on peut écrire, pour tout entier p,

$$X_p = X_p^{(A)} + X_p^{(A^c)}.$$

Les sous-espaces $\mathscr{H}_A$ et $\mathscr{H}_{A^c}$ de $\mathscr{H}$ étant orthogonaux, les facteurs gaussiens $\mathscr{F}_A$ et $\mathscr{F}_{A^c}$ sont indépendants. Comme F est supposée $\mathscr{F}_A$-mesurable, la variable $f(X_{p_1}, \ldots, X_{p_m})$ est indépendante du vecteur gaussien

$$Y := (X_{p_1}^{(A^c)}, \ldots, X_{p_m}^{(A^c)}).$$

Par hypothèse, F est non constante, donc A ne peut pas être vide. D'après le lemme 3, le vecteur

$$X := (X_{p_1}^{(A)}, \dots, X_{p_m}^{(A)})$$

n'est pas dégénéré. Le lemme 3 montre alors que le vecteur Y doit être dégénéré, d'où $\sigma(A^c) = 0$. ■

PROPOSITION 6. *Soit Γ un sous-groupe compact de $\mathscr{S}$ tel que $\mathscr{F}_F$ soit contenu dans $\mathscr{F}_\Gamma$. Alors*

- *ou bien $\mathscr{F}_\Gamma$ est le facteur pair, mais ceci n'est possible que si f est paire,*
- *ou bien $\Gamma = \{\mathrm{Id}\}$, i.e. $\mathscr{F}_\Gamma = \mathscr{A}$.*

Preuve. Soit $S \in \Gamma$, et $\varphi \in \mathscr{M}$ tel que $S \leftrightarrow \varphi$. Puisque F est $\mathscr{F}_\Gamma$-mesurable, on a $F \circ S = F$, c'est-à-dire

$$f(X_{p_1}, \dots, X_{p_m}) = f(X_{p_1} \circ S, \dots, X_{p_m} \circ S).$$

Si le vecteur gaussien $(X_{p_1}, \dots, X_{p_m}, X_{p_1} \circ S, \dots, X_{p_m} \circ S)$ était non dégénéré, cela contredirait l'hypothèse f non constante. On a donc une relation linéaire non triviale

$$\alpha_1 X_{p_1} + \dots + \alpha_m X_{p_m} = \beta_1 X_{p_1} \circ S + \dots + \beta_m X_{p_m} \circ S,$$

qui s'écrit dans $L^2_{\mathrm{sym}}([-\pi, \pi], \sigma)$

$$\alpha_1 e^{ip_1 \cdot} + \dots + \alpha_m e^{ip_m \cdot} = (\beta_1 e^{ip_1 \cdot} + \dots + \beta_m e^{ip_m \cdot})\varphi. \tag{3}$$

Mais le facteur $\mathscr{F}_\Gamma$ n'étant pas le facteur trivial (car il rend mesurable la variable F non constante), le lemme 1 prouve qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}, |z_0| = 1$, tel que

$$\sigma(\{t \in [-\pi, \pi] : \varphi(t) = z_0\}) > 0.$$

L'égalité (3) montre alors qu'il existe une infinité de $t \in [-\pi, \pi]$ tels que

$$\alpha_1 e^{ip_1 t} + \dots + \alpha_m e^{ip_m t} = z_0(\beta_1 e^{ip_1 t} + \dots + \beta_m e^{ip_m t}).$$

On en déduit : pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, $\alpha_j = z_0 \beta_j$. Les α_j et les β_j étant réels et non tous nuls, on a $\varphi \equiv 1$ donc $z_0 = 1$ ou $z_0 = -1$. Dans le premier cas, on a $\varphi \equiv 1$ par (3), d'où $S = \mathrm{Id}$, et dans le second cas, $\varphi \equiv -1$, d'où $S = -\mathrm{Id}$.

On en conclut que $\mathscr{F}_\Gamma$ est soit le facteur pair (si $\Gamma = \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$), soit $\mathscr{A}$ tout entière (si Γ ne contient que l'identité). Mais clairement, le premier cas n'est possible que si f est paire. ■

On déduit des deux propositions précédentes le résultat suivant.

THÉORÈME 7. *Le facteur engendré par la variable aléatoire $f(X_{p_1}, \dots, X_{p_m})$ non constante est*

- *ou bien $\mathscr{A}$ tout entière,*
- *ou bien le facteur pair (mais ce n'est possible que si f est paire),*
- *ou bien un facteur non classique.*

Notons ici que l'hypothèse "*F ne dépend que d'un nombre fini de coordonnées*" est capitale : si on autorise F à dépendre de tout le processus $(X_p)_{p\in\mathbb{Z}}$, le facteur $\mathscr{F}_F$ peut alors être n'importe quel facteur de T. En effet, pour tout facteur $\mathscr{F}$ de T il existe une partition de Ω dénombrable $\mathscr{P} = (P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui engendre $\mathscr{F}$ (voir [8]). Il suffit alors de prendre $F = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{P_n}$ où les a_n sont deux à deux distincts.

Dans le cas où T est GAG, les théorèmes 2 et 7 donnent le corollaire suivant.

COROLLAIRE 8. *Si T est GAG, et si f n'est pas paire, la tribu engendrée par les variables $f(X_{p_1}, \dots, X_{p_m}) \circ T^p$, $p \in \mathbb{Z}$, est $\mathscr{A}$ tout entière.*

En particulier, si T est GAG, la partition $\{(X_0 \le 0), (X_0 > 0)\}$ est génératrice, et il en est de même de toute partition de Ω obtenue à partir d'une partition de $\mathbb{R}$ en ensembles non tous symétriques par rapport à l'origine. Bien sûr, dans le cas où σ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, ce n'est plus vrai car alors T est d'entropie infinie (voir [9]), et le facteur engendré par une partition finie n'a qu'une entropie finie. Mais peut-on trouver un gaussien d'entropie nulle pour lequel une telle partition n'est pas génératrice?

Le théorème 7 permet aussi de voir que certains systèmes gaussiens d'entropie nulle admettent des facteurs qui ne sont pas classiques. La mesure σ finie et symétrique sur $[-\pi, \pi]$ étant donnée, notons σ_+ sa restriction à $[0, \pi]$. Soient σ^1_+ l'image de σ_+ sur $[0, \pi/2]$ par l'homothétie $t \mapsto t/2$, et $\sigma^2_- := \sigma^1_+ * \delta_{-\pi}$ sur $[-\pi, -\pi/2]$. On définit σ^1 et σ^2 comme les mesures symétriques sur $[-\pi, \pi]$ obtenue respectivement à partir de σ^1_+ et de σ^2_-, puis $\eta := (\sigma^1 + \sigma^2)/2$. Considérons maintenant un système dynamique gaussien $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, T)$, engendré par un processus gaussien $(X_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ de mesure spectrale η. Un calcul simple sur les covariances de ce processus montre que les deux sous-processus $(X_{2p})_{p\in\mathbb{Z}}$ et $(X_{2p+1})_{p\in\mathbb{Z}}$ sont indépendants, chacun étant de mesure spectrale σ. On peut alors définir une transformation S de Ω préservant μ, par

$$X_{2p} \circ S := X_{2p}, \quad X_{2p+1} \circ S := -X_{2p+1} \quad (p \in \mathbb{Z}).$$

(Ici, S ne commute pas avec T.) Il est clair que tout événement dans le facteur $\mathscr{F}_{|X_0|}$, c'est-à-dire dans la tribu engendrée par le processus $(|X_p|)_{p\in\mathbb{Z}}$, est S-invariant. Mais alors, $\mathscr{F}_{|X_0|}$ ne peut pas être le facteur pair, car celui-ci contient par exemple l'événement $(X_0 X_1 > 0)$, qui n'est pas S-invariant. Comme $\mathscr{F}_{|X_0|}$ ne peut pas être $\mathscr{A}$ tout entière, on en déduit que $\mathscr{F}_{|X_0|}$ n'est pas un facteur classique.

Références

[1] I. P. Cornfeld, S. V. Fomin and Y. G. Sinai, *Ergodic Theory*, Springer, 1982.
[2] M. Lemańczyk, F. Parreau and J.-P. Thouvenot, *On the disjointness problem for Gaussian automorphisms*, preprint.
[3] M. Lemańczyk and F. Parreau, *Gaussian automorphisms whose self-joinings are Gaussian*, preprint.
[4] M. Lemańczyk and J. de Sam Lazaro, *Spectral analysis of certain compact factors for Gaussian dynamical systems*, Israel J. Math. (1996), à paraître.
[5] L. H. Loomis, *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis*, Van Nostrand, Princeton, 1953.
[6] D. Newton, *On Gaussian processes with simple spectrum*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 5 (1966), 207–209.
[7] D. Newton and W. Parry, *On a factor automorphism of a normal dynamical system*, Ann. Math. Statist. 37 (1966), 1528–1533.
[8] W. Parry, *Generators in Ergodic Theory*, Benjamin, New York, 1969.
[9] T. de la Rue, *Entropie d'un système dynamique gaussien : cas d'une action de* $\mathbb{Z}^d$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 317 (1993), 191–194.
[10] J. P. Thouvenot, *Some properties and applications of joinings in ergodic theory*, in: Ergodic Theory and its Connections with Harmonic Analysis, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 205, Cambridge Univ. Press, 1995, 207–235.
[11] —, *Utilisation des processus gaussiens en théorie ergodique*, preprint.

Institute of Mathematics
Technical University of Wrocław
Wybrzeże Wyspiańskiego 27
50-370 Wrocław, Pologne
E-mail: iwanik@banach.im.pwr.wroc.pl

Department of Mathematics and Computer Science
Nicolas Copernicus University
Chopina 12/18
87-100 Toruń, Pologne
E-mail: mlem@mat.uni.torun.pl

Analyse et Modèles Stochastiques
URA CNRS 1378
Université de Rouen
76821 Mont-Saint-Aignan Cedex, France
E-mail: delarue@univ-rouen.fr
lazaro@univ-rouen.fr

Received June 12, 1996
Revised version July 1, 1996 (3690)

STUDIA MATHEMATICA 125 (3) (1997)

Conical measures and properties of a vector measure determined by its range

by

L. RODRÍGUEZ-PIAZZA and M. C. ROMERO-MORENO (Sevilla)

Abstract. We characterize some properties of a vector measure in terms of its associated Kluvánek conical measure. These characterizations are used to prove that the range of a vector measure determines these properties. So we give new proofs of the fact that the range determines the total variation, the σ-finiteness of the variation and the Bochner derivability, and we show that it also determines the (p,q)-summing and p-nuclear norm of the integration operator. Finally, we show that Pettis derivability is not determined by the range and study when every measure having the same range of a given measure has a Pettis derivative.

1. Introduction. In [R1], answering a question in [AD], it was proved that the range of a vector measure determines its total variation; that is, if two measures with values in a Banach space have the same range, or even just ranges with the same closed convex hulls, then they have the same total variation. Later, in [R2], it was proved that the range also determines the Bochner derivability and the σ-finiteness of the variation. This suggests that these and other properties of a vector measure may depend on some structure only depending on the range. In this way we will use the conical measure associated with a vector measure introduced by I. Kluvánek in [K].

The symmetrization of the associated conical measure depends only on the range of the vector measure. If a property of a vector measure has a characterization in terms of the conical measure which is invariant under symmetrization, this property is determined by the range. In Section 2 we provide such a characterization for the total variation, the σ-finiteness of the variation, and the (p,q)-summing and p-nuclear norms of the integration operator.

1991 *Mathematics Subject Classification*: 46G10, 28B05, 47D50.
Key words and phrases: vector measures, range, conical measures, operator ideal norms, Pettis integral.
Research supported in part by DGICYT grant #PB93-0926.