Contents of Volume 124, Number 3

STUDIA MATHEMATICA

Executive Editors: **Z. Ciesielski, A. Pełczyński, W. Żelazko**

Published by the Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences
Typeset in TEX at the Institute
Printed and bound by

02-240 Warszawa, ul. Jakobinów 23, tel: 846-79-66, tel/fax: 49-89-95

PRINTED IN POLAND

ISSN 0039-3223

Méthodes de réalisation de produit scalaire et de problème de moments avec maximisation d'entropie

par

VALERIE GIRARDIN (Orsay)

Abstract. We develop several methods of realization of scalar product and generalized moment problems. Constructions are made by use of a Hilbertian method or a fixed point method. The constructed solutions are rational fractions and exponentials of polynomials. They are connected to entropy maximization. We give the general form of the maximizing solution. We show how it is deduced from the maximizing solution of the algebraic moment problem.

Etant donnés

- K une partie finie de $\mathbb{Z}^d$ contenant $0 = (0, \ldots, 0)$,
- $\phi = (\phi_k)_{k\in K}$ une famille de fonctions mesurables linéairement indépendantes définies sur un multi-rectangle $I \subset \mathbb{R}^d$, avec $\phi_0 \equiv 1$, et
- p une mesure de référence sur I,

nous cherchons à déterminer h maximisant une fonctionnelle d'entropie

$$S_\Psi[h] = \int_I \Psi(h(\lambda))\, d\lambda$$

pour $\Psi \in C^2(\mathbb{R}^+)$ concave sur I compact, dans les deux problèmes suivants :

$$\int_I \phi_k \overline{\phi}_l h(\lambda)\, dp(\lambda) = d_{kl}, \quad (k,l) \in K^2, \tag{1}$$

où $d = (d_{kl})_{(k,l)\in K^2}$ est une matrice strictement définie positive et

$$\int_I \phi_k h(\lambda)\, dp(\lambda) = c_k, \quad k \in K, \tag{2}$$

où $c = (c_k)_{k\in K}$ est positive pour ϕ au sens de Kreĭn & Nudel'man [8], p. 58.

Nous parlerons de *moments algébriques* si $\phi_k((\lambda_1, \ldots, \lambda_d)) = \lambda_1^{k_1} \ldots \lambda_d^{k_d}$, et de *moments trigonométriques* si $\phi_k(\lambda) = \exp i\langle k, \lambda\rangle$.

1991 *Mathematics Subject Classification*: 46E20, 47B38, 49J35.
Key words and phrases: moments, scalar product, entropy maximization.

$\mathcal{P}_E$ sera le sous-espace de $L^2_p(I)$ des polynômes généralisés engendré par $(\phi_k)_{k\in E}$, et les quotients d'éléments de $\mathcal{P}_K \bullet \mathcal{P}_K = \{fg : f,g \in \mathcal{P}_K\}$ seront appelés *fractions rationnelles*.

Nous noterons $\mathcal{D}^p_\phi = \{h \in L^2_p(I) : h \geq 0$ sur I et vérife (2)$\}$.

Le problème (2) est un problème de moments généralisés. Le problème (1) correspond à la réalisation par une mesure de densité h du produit scalaire défini sur $\mathcal{P}_K$ par

$$\langle \phi_k, \phi_l\rangle_d = d_{kl} \quad \text{pour } (k,l) \in K^2, \tag{3}$$

mais il peut également être vu comme un problème de moments généralisés pour la famille $(\phi_k\overline{\phi}_l)_{(k,l)\in K^2}$, c'est-à-dire comme un cas particulier du problème (2). Dans certains cas, ces produits s'expriment simplement; la donnée du produit scalaire est alors équivalente à la donnée des ϕ-moments sur un ensemble d'indices particulier, par exemple $K+K$ pour le cas algébrique ou $K-K$ pour le cas trigonométrique.

Classiquement, la maximisation d'entropie est utilisée de deux manières. D'une part, en maximisant l'entropie de Shannon, $\mathcal{S}_{\cdot\ln\cdot}$ (voir Csiszár [4]), ce qui conduit à des densités de type exponentielle d'un polynôme, et d'autre part, en maximisant l'entropie de prédiction, $\mathcal{S}_{\ln\cdot}$, ce qui conduit à des densités de type inverse de polynôme.

Plus généralement, nous déterminons la forme de la fonction maximisant $\mathcal{S}_\Psi$ dans $\mathcal{D}^p_\phi$, ce qui conduit en particulier à des solutions de type fraction rationnelle.

Nous construisons par une méthode Hilbertienne une solution du problème (1) de ce type. Son dénominateur est le polynôme de prédiction (voir par exemple Azencott & Dacunha-Castelle [1]). La construction repose sur la projection de ϕ_0 sur le sous-espace de $L^2_p(I)$ engendré par $(\phi_k)_{k\in K\setminus\{0\}}$ pour le d-produit scalaire et sur sa correspondance avec le produit scalaire usuel de $L^2_p(I)$. Elle est possible dès que les fonctions de la famille ϕ sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire sous des hypothèses minimales. De plus, sa mise en œuvre pratique consiste en la résolution de systèmes linéaires très simples (voir Girardin [6] pour des exemples numériques dans le problème algébrique).

Nous construisons des solutions du problème des moments (2) de type exponentielle de polynôme ou fraction rationnelle de numérateur fixé, par une méthode de point fixe.

Dans les deux cas, le principe de construction est l'établissement d'un système linéaire sur les coefficients du polynôme cherché. Il est établi pour la fraction rationnelle à partir de la construction d'une solution du problème (1) et pour l'exponentielle à partir d'un procédé de dérivation. Sa matrice fait intervenir les moments c connus et les moments α pour les produits de fonctions de ϕ ici arbitraires. La détermination du point fixe de la fonction associant à α les moments de la fonction ainsi définie constitue une procédure itérative qui donne la solution.

Les hypothèses nécessaires à leur mise en œuvre sont vérifiées par exemple pour les problèmes algébrique et trigonométrique. Des contraintes du type étudié dans Ihara [7] peuvent également être traitées ainsi.

Nous montrons enfin que l'on peut déduire les solutions de maximum d'entropie pour une famille ϕ de fonctions continues de celles du problème des moments algébriques, grâce à leur approximation par des polynômes algébriques, une méthode de point fixe permettant de déduire les solutions du problème des moments pour des polynômes algébriques de celles du problème des moments algébriques. Ceci permet de traiter les cas où les hypothèses nécessaires aux constructions faites précédemment ne sont pas satisfaites.

Ces constructions constituent une alternative aux méthodes classiques en analyse convexe de maximisation sous contraintes linéaires par résolution d'un problème dual utilisées dans la plupart des constructions appliquées (voir par exemple Borwein & Lewis [3], Ben-Tal & Charnes [2], Lippman [10]).

1. Maximisation d'entropie. Nous montrons que la fonction maximisant $\mathcal{S}_\Psi$ dans $\mathcal{D}^\Lambda_\phi$ (Λ étant la mesure de Lebesgue) est de la forme $h = (\Psi')^{-1} \circ g$, g polynôme. Nous en déduisons un résultat analogue pour $\mathcal{D}^p_\phi$ et $\mathcal{S}_\Psi$. Ceci généralise le cas trigonométrique pour l'entropie de Shannon traité par Seghier [12].

Notons que le problème des moments par rapport à une mesure de référence sur I elle-même absolument continue par rapport à Λ constitue un moyen de prendre en compte des informations préalables sur la densité h cherchée dans le problème des moments par rapport à λ. Par exemple, il est équivalent de déterminer $h \in \mathcal{D}^\Lambda_\phi$ nulle en $\lambda_i \in I$, $i = 1,\ldots,n$, ou bien $\widetilde{h} \in \mathcal{D}^p_\phi$ pour $dp(\lambda) = \prod_{i=1}^n(\lambda-\lambda_i)^2 d\lambda$.

THÉORÈME 1. *Soit I compact. S'il existe $h_0 \in \mathcal{D}^\Lambda_\phi$ strictement positive, alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

[A] $\mathcal{S}_\Psi[h_0] = \max_{h\in\mathcal{D}^\Lambda_\phi} \mathcal{S}_\Psi[h]$.

[B] $g_0 = \Psi' \circ h_0$ *est l'unique solution dans $\mathcal{P}_K$ de*

$$\int_I (\Psi')^{-1}(g(\lambda))\phi_k(\lambda)\,d\lambda = c_k \quad \textit{pour } k \in K.$$

Preuve. Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}^d}$ une base orthonormale de $L^2(I)$ telle que $(P_k)_{k\in K}$ soit une base orthonormale de $\mathcal{P}_K$.

Si $\mathcal{S}_\Psi$ est maximum pour h_0 sur $\mathcal{D}^\Lambda_\phi$, considérons, pour $k \in \mathbb{N}^d \setminus K$ et $s \in \mathbb{R}$, la fonction $h_{s,k} = h_0 + sP_k = h_0(1 + s(P_k/h_0))$. I étant compact,

$\sup_{\lambda\in I}|P_k|$ est fini pour k fixé; il existe par conséquent un voisinage $\mathcal{V}_0$ de 0 tel que, pour tout $s\in\mathcal{V}_0$, la fonction $1+s(P_k/h_0)$ est positive sur I. Or $h_0\in\mathcal{D}_\phi^A$ et P_k est orthogonal à $\mathcal{P}_K$, donc $h_{s,k}$ est également élément de $\mathcal{D}_\phi^A$.

Posons $b_k(s)=\mathcal{S}_\Psi[h_{s,k}]$ pour $k\in\mathbb{N}^d\setminus K$. Comme $h_{s,k}$ est continue sur I, la fonction b_k est uniformément bornée sur $\mathcal{V}_0$. De plus, Ψ' étant continue sur $\mathbb{R}_+$, $\partial\Psi\circ h_{s,k}/\partial s=P_k\cdot\Psi'\circ h_{s,k}$ est bornée sur $\mathcal{V}_0\times I$. Par conséquent, ces fonctions sont d'intégrale finie sur I, et on a

$$b_k'(s)=\int_I P_k\cdot\Psi'(h_{s,k}(\lambda))\,d\lambda.$$

La fonction b_k étant maximum en $s=0$, on a

$$b_k'(0)=\int_I P_k\cdot\Psi'(h_0(\lambda))\,d\lambda=0\quad\text{ pour } k\in\mathbb{N}^d\setminus K.$$

Comme $(P_k)_{k\in\mathbb{N}^d}$ est une base orthonormale de $L^2(I)$, on a $\Psi'\circ h_0\in\mathcal{P}_K$, d'où [B].

Réciproquement, supposons que $g_0=\Psi'\circ h_0\in\mathcal{P}_K$ vérifie [B]; alors nécessairement $h_0\in\mathcal{D}_\phi^A$. Soit $h\in\mathcal{D}_\phi^A$ et soit Π_K la projection orthogonale de $L^2(I)$ sur $\mathcal{P}_K$; on a

$$\begin{aligned}\int_I h\cdot\Psi'(h_0(\lambda))\,d\lambda&=\int_I \Pi_K[h]\cdot\Psi'(h_0(\lambda))\,d\lambda+\int_I(h-\Pi_K[h])\cdot\Psi'(h_0(\lambda))\,d\lambda\\&=\int_I \Pi_K[h]\cdot\Psi'(h_0(\lambda))\,d\lambda=\int_I h_0\cdot\Psi'(h_0(\lambda))\,d\lambda,\end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{S}_\Psi[h]=\int_I(\Psi\circ h+h\cdot\Psi'\circ h_0)(\lambda)\,d\lambda-\int_I h_0\cdot\Psi'(h_0(\lambda))\,d\lambda. \tag{4}$$

La fonction Ψ étant concave sur $\mathcal{D}_\phi^A$ qui est un convexe fermé non vide,

$$\max_{h\in\mathcal{D}_\phi^A}\mathcal{S}_\Psi[h]=\max_{h\in\mathcal{D}_\phi^A}\int_I(\Psi\circ h+h\cdot\Psi'\circ h_0)(\lambda)\,d\lambda-\int_I h_0\cdot\Psi'(h_0(\lambda))\,d\lambda,$$

et cette quantité est finie.

Posons $h_t=th+(1-t)h_0$ pour $t\in[0,1]$ et

$$a(t)=\int_I(\Psi\circ h_t+h_t\cdot\Psi'\circ h_0)(\lambda)\,d\lambda.$$

La quantité $\max_{t\in[0,1]}a(t)$ est finie. De plus, $a'(0)=0$ et

$$a''(t)=\int_I(h_0-h)^2\cdot\Psi''(h_t(\lambda))\,d\lambda.$$

La fonction Ψ'' est négative sur $\mathbb{R}_+$, donc a'' est négative sur $[0,1]$. On en déduit que $a(1)\le a(0)$, soit

$$\int_I(\Psi\circ h+h\cdot\Psi'\circ h_0)(\lambda)\,d\lambda\le\int_I(\Psi\circ h_0+h_0\cdot\Psi'\circ h_0)(\lambda)\,d\lambda,$$

ce qui signifie d'après l'égalité (4) que h_0 vérifie [A]. ∎

COROLLAIRE 1. *Soient p une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur I compact, notée $p(\lambda)d\lambda$. S'il existe $h_0\in\mathcal{D}_\phi^p$ strictement positive sur I, alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

[A] $\mathcal{S}_\Psi[h_0]=\max_{h\in\mathcal{D}_\phi^p}\mathcal{S}_\Psi[h]$.

[B] $h_0=(1/p)(\Psi')^{-1}\circ g$, $g\in\mathcal{P}_K$.

Preuve. L'entropie $\mathcal{S}_\Psi$ est maximum sur $\mathcal{D}_\phi^p$ en h_0 si et seulement si elle est maximum sur $\mathcal{D}_\phi^A$ en $h_0\cdot p=(\Psi')^{-1}\circ g$ d'après le théorème 1. ∎

2. Réalisation d'un produit scalaire par une fraction rationnelle. Nous développons la construction d'une fraction rationnelle solution du problème (1) pour des familles ϕ de fonctions réelles et une mesure p à support continu. Elle reste possible pour des mesures de référence à support discret ou pour des familles de fonctions complexes (voir Girardin [6]).

On notera $(P_k)_{k\in K}$ un système orthonormal pour le produit scalaire usuel de $L_p^2(I)$ déduit de $(\phi_k)_{k\in K}$ en commençant par ϕ_0, qui donne P_0, fonction constante sur I. Ainsi $(P_k)_{k\in K\setminus\{0\}}$ sera une base de $\mathcal{P}_{K\setminus\{0\}}$.

$\mathbf{A}$ sera la matrice de passage de la base $(\phi_k)_{k\in K}$ vers la base $(P_k)_{k\in K}$, et $\mathbf{A}^*$ sa transposée.

On a $L_p^2(I)=\mathcal{P}_K\oplus([\mathcal{P}_K\bullet\mathcal{P}_K]\ominus\mathcal{P}_K)\oplus(L_p^2(I)\ominus[\mathcal{P}_K\bullet\mathcal{P}_K])$, et on considère une base orthonormale $(P_k)_{k\in\mathbb{N}^d}$ de $L_p^2(I)$ adaptée à cette décomposition, telle que $(P_k)_{k\in L}$ soit une base de $\mathcal{P}_K\bullet\mathcal{P}_K$ et $(P_k)_{k\in K}$ soit la base de $\mathcal{P}_K$ définie plus haut.

Ceci permet d'énoncer le théorème de construction qui caractérise également le polynôme de prédiction.

THÉORÈME 2. *Si $\mathbf{H}=(d_{jl})_{(k,l)\in K^2}$ est strictement définie positive, alors :*

[A] *La projection $-P_{\min}$ de P_0 sur $\mathcal{P}_{K\setminus\{0\}}$ pour le d-produit scalaire est*

$$-P_{\min}=P_0-(\mathbf{A}^*\mathbf{H}\mathbf{A})^{-1}(\nu P_0)\quad \textit{avec}\quad \frac{1}{\nu}=[(\mathbf{A}^*\mathbf{H}\mathbf{A})^{-1}]_{00}.$$

[B] *Si de plus $P_0+P_{\min}$ est non nul sur I, il existe $Q\in(\mathcal{P}_K\bullet\mathcal{P}_K)\ominus\mathcal{P}_K$ tel que $(\nu P_0+Q)/(P_0+P_{\min})$ est solution de* (1).

Preuve. [A] Nous noterons le projecteur orthogonal sur le sous-espace de $L_p^2(I)$ engendré par $(P_k)_{k\in E}$ par Π_E pour le produit scalaire usuel de

$L_p^2(I)$ et par Π_E^d pour le d-produit scalaire.

Par définition, on a $P_{\min} = -\Pi_K^d[P_0]$, donc $\langle P_0 + P_{\min}, P_k\rangle_d = 0$ pour $k \in K \setminus \{0\}$.

Posons $\nu = \langle P_0 + P_{\min}, P_0\rangle_d$. Alors

$$\Pi_K^d[P_0 + P_{\min}] = \nu P_0, \tag{5}$$

et $\nu = \langle P_0 + P_{\min}, P_0 + P_{\min}\rangle_d = \|P_0 + P_{\min}\|_d^2 = \inf_{P\in\mathcal{P}_K\ominus\mathcal{P}_0} \|P_0 + P\|_d^2$.

Soit $f \in \mathcal{P}_K \bullet \mathcal{P}_K$ telle que

$$d_{kl} = \langle f, \phi_k\phi_l\rangle \quad \text{pour } (k,l) \in K^2. \tag{6}$$

Si P et P' sont éléments de $\mathcal{P}_K$, on a la formule de changement de produit scalaire

$$\langle P, P'\rangle_d = \langle fP, P'\rangle_{L_p^2(I)},$$

donc la relation (5) est équivalente à

$$\Pi_K[f(P_0 + P_{\min})] = \nu P_0. \tag{7}$$

Nous allons calculer $P_{\min}$ et ν à partir de cette équation. Soit $\mathbf{H}^d$ la matrice par rapport à la base (P_k) de l'opérateur linéaire défini sur $\mathcal{P}_K$ par $P \to \Pi_K[fP]$. Si on pose $P_{\min} = \sum_{k\in K\setminus\{0\}} b_k P_k$, l'équation (7) s'écrit

$$\mathbf{H}^d \begin{pmatrix} 1 \\ \text{---} \\ (b_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu \\ \text{---} \\ (0) \end{pmatrix},$$

et $\mathbf{H}^d = (\langle fP_k, P_{k'}\rangle)_{(k,k')\in K^2} = \mathbf{A}^*(\langle f, \phi_k\phi_{k'}\rangle)\mathbf{A} = \mathbf{A}^*\mathbf{H}\mathbf{A}$. La matrice $\mathbf{H}$ est strictement définie positive par hypothèse, donc $\mathbf{H}^d$ est inversible. On en déduit que $1/\nu = [(\mathbf{H}^d)^{-1}]_{00}$ et $P_{\min} = -P_0 + (\mathbf{H}^d)^{-1}(\nu P_0)$.

[B] On va construire h sous la forme $h = f + g$ avec $g \in L^2(I) \ominus (\mathcal{P}_K \bullet \mathcal{P}_K)$ et $f = \sum_{k\in L} \delta_k P_k$ définie par la relation (6).

Si h a cette forme, alors $\Pi_L[h] = \Pi_L[f] = f$, et en particulier h est bien solution du problème (1).

L'équation (7) est équivalente à

$$\begin{cases} \langle f(P_0 + P_{\min}), P_k\rangle = 0 & \text{pour } k \in K \setminus \{0\}, \\ \langle f(P_0 + P_{\min}), P_0\rangle = \nu. \end{cases}$$

D'autre part, $g \in L_p^2(I) \ominus (\mathcal{P}_K \bullet \mathcal{P}_K)$ et $(P_0 + P_{\min})P_k \in \mathcal{P}_K \bullet \mathcal{P}_K$ pour $k \in K$, donc

$$\langle g(P_0 + P_{\min}), P_k\rangle = \langle g, (P_0 + P_{\min})P_k\rangle = 0 \quad \text{pour } k \in K,$$

d'où

$$\langle h(P_0 + P_{\min}), P_k\rangle = 0 \quad \text{pour } k \in K \setminus \{0\}, \tag{8}$$

$$\langle h(P_0 + P_{\min}), P_0\rangle = \nu. \tag{9}$$

Pour $k \in \mathbb{N}^d \setminus L$, nous imposons

$$\langle h(P_0 + P_{\min}), P_k\rangle = 0. \tag{10}$$

Les équations (8) à (10) impliquent que la projection de $h(P_0 + P_{\min})$ sur l'espace $L_p^2(I) \ominus (\mathcal{P}_K \bullet \mathcal{P}_K) \oplus \mathcal{P}_K$ est νP_0, soit

$$h(P_0 + P_{\min}) = \nu P_0 + \Pi_{L\setminus K}[h(P_0 + P_{\min})].$$

On en déduit que $h = (\nu P_0 + Q)/(P_0 + P_{\min})$, où Q est la projection pour le produit scalaire usuel de $L_p^2(I)$ de $h(P_0 + P_{\min})$ sur $(\mathcal{P}_K \bullet \mathcal{P}_K) \ominus \mathcal{P}_K$. Il reste à déterminer explicitement Q en fonction de d.

Or $\langle h, P_k\rangle = \delta_k$, pour $k \in L \setminus K$, c'est-à-dire que $Q = \sum_{k\in L\setminus K} \beta_k P_k$ vérifie

$$\sum_{(k,k')\in(L\setminus K)^2} \left\langle \frac{P_k}{P_0 + P_{\min}}, P_{k'} \right\rangle \beta_k = \Pi_{L\setminus K}\left[f - \frac{\nu P_0}{P_0 + P_{\min}}\right],$$

où $\Pi_{L\setminus K}$ est le projecteur pour le produit scalaire usuel de $L_p^2(I)$ sur le sous-espace engendré par $(P_k)_{k\in L\setminus K}$. La matrice de ce système d'inconnues $(\beta_k)_{k\in L\setminus K}$ étant une matrice Grammienne, elle est inversible et Q est ainsi déterminé. ∎

Notons que dans le problème trigonométrique la fraction rationnelle obtenue peut s'écrire avec pour dénominateur le carré du polynôme de prédiction; Seghier [11] a obtenu ce résultat par une méthode analogue.

Landau [9] en dimension $d = 1$ a construit par une méthode Hilbertienne également des solutions explicites au problème des moments trigonométriques, d'une part comme somme de mesures de Dirac, et d'autre part de densité égale à l'inverse du carré du polynôme de prédiction.

3. Méthodes de point fixe pour le problème des moments

3.1. *Construction d'une solution fraction rationnelle.* Nous construisons par une méthode de point fixe une solution du problème (2) sous forme de fraction rationnelle ayant pour dénominateur un polynôme de $\mathcal{P}_K$ et un numérateur donné.

Rappelons que la construction faite pour la représentation du produit scalaire donne $h = (\nu P_0 + Q)/(P_0 + P_{\min})$. Le polynôme Q est alors impliqué par le processus de construction à partir du polynôme $P_{\min}$ et de ν. Ici les moments ne sont plus supposés connus que sur K. Nous allons montrer qu'en se donnant Q dans $L_p^2(I) \ominus (\mathcal{P}_K \ominus \mathcal{P}_0)$ et en supposant que $h \in \mathcal{D}_\phi^p$, on retrouve $P_{\min}$ et ν. Ceci permet d'aboutir au système linéaire sur les coefficients du polynôme cherché. Nous développons la construction pour $Q \in (\mathcal{P}_K \bullet \mathcal{P}_K) \ominus \mathcal{P}_0$ et des fonctions $(\phi_k)_{k\in K}$ réelles, la généralisation à $Q \in L_p^2(I) \ominus \mathcal{P}_{K\setminus\{0\}}$ et à des fonctions complexes étant possible.

LEMME 1. *Soit* $Q \in (\mathcal{P}_K \bullet \mathcal{P}_K) \ominus \mathcal{P}_0$. *Supposons qu'il existe* $\nu \in \mathbb{R}^+$ *et* $P \in \mathcal{P}_{K\setminus\{0\}}$ *tels que* $(\nu P_0 + Q)/(P_0 + P) \in \mathcal{D}_\phi^p$. *Soit* $\mathbf{H}^{c,\alpha} = (e_{k,l})_{(k,l)\in K\times K}$, *où*

$$\begin{cases} e_{k,0} = e_{0,k} = c_k \int_I P_0(\lambda)\,dp(\lambda) & \textit{si } k \in K, \\ e_{k,l} = \left\langle \dfrac{\nu P_0 + Q}{P_0 + P}, P_k P_l \right\rangle & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Si $\mathbf{H}^{c,\alpha}$ *est inversible, alors*

$$P_0 + P = (\mathbf{H}^{c,\alpha})^{-1}(\nu P_0) \quad \textit{avec} \quad \frac{1}{\nu} = [(\mathbf{H}^{c,\alpha})^{-1}]_{00}. \tag{11}$$

Preuve. Posons $h_{c,\alpha} = (\nu P_0 + Q)/(P_0 + P)$. Alors $-P$ est la projection orthogonale de P_0 sur $\mathcal{P}_{K\setminus\{0\}}$ pour le produit scalaire défini sur $\mathcal{P}_K$ par

$$\langle\langle P, P' \rangle\rangle = \int_I PP' h_{c,\alpha}(\lambda)\,dp(\lambda).$$

Posons $\nu = \int_I (P_0 + P) P_0 h_{c,\alpha}(\lambda)\,dp(\lambda)$. On déduit comme dans la construction de $P_{\min}$ dans la preuve du théorème 2[A] que

$$\Pi_K[(P_0 + P) h_{c,\alpha}] = \nu P_0, \tag{12}$$

puis la relation (11). ∎

Posons $P = \sum_{j\in K\setminus\{0\}} a_j P_j$ et $a = (a_j)_{j\in K\setminus\{0\}}$. L'équation (12) peut s'écrire sous forme de système

$$(\Sigma_1(c,\alpha)) \qquad \mathbf{H}_1^{c,\alpha}(\nu, a) = -c$$

ou, avec c pour inconnue,

$$(\Sigma_2(\nu, a, \alpha)) \qquad \mathbf{H}_2^{\nu,a,\alpha} c = B_{\nu,a,\alpha}.$$

Enfin, on peut définir sur $\{\alpha \in \mathbb{R}^{|K\setminus\{0\}\times K\setminus\{0\}|} : \mathbf{H}_1^{c,\alpha} \text{ inversible}\}$ la fonction

$$\mathcal{F}_c(\alpha) = \left(\left\langle \frac{\nu P_0 + Q}{P_0 + P}, P_k P_l \right\rangle \right)_{(k,l)\in L},$$

où ν et P sont donnés par la relation (11).

Ces notations permettent d'énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 3. *Soit* $Q \in (\mathcal{P}_K \bullet \mathcal{P}_K) \ominus \mathcal{P}_0$ *positif sur I. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

[A] *Il existe* α *point fixe unique de* $\mathcal{F}_c$ *tel que*
1. $\mathbf{H}^{c,\alpha}$ *et* $\mathbf{H}_2^{\nu,a,\alpha}$ *sont inversibles,*
2. $[(\mathbf{H}^{c,\alpha})^{-1}]_{00} P_0 + Q$ *et* $(\mathbf{H}^{c,\alpha})^{-1}([(\mathbf{H}^{c,\alpha})^{-1}]_{00} P_0)$ *sont positifs sur I.*

[B] *Il existe* $\nu \in \mathbb{R}^+$ *et* $P \in \mathcal{P}_K \ominus \mathcal{P}_0$ *tels que* $\nu P_0 + Q$ *est positif sur I et* $(\nu P_0 + Q)/(P_0 + P)$ *est élément de* $\mathcal{D}_\phi^p$.

ν *et* P *sont alors donnés par la relation* (11).

Preuve. Soit α vérifiant [A]. La matrice $\mathbf{H}^{c,\alpha}$ est inversible, donc l'équation (12) a une solution unique (ν, P) donnée par la relation (11).

Les polynômes $\nu P_0 + Q$ et $P_0 + P$ étant positifs sur I, la fonction $h_0 = (\nu P_0 + Q)/(P_0 + P)$ est bien définie et, α étant un point fixe de $\mathcal{F}_c$, on a

$$\langle h_0, P_k P_l \rangle = \alpha_{kl} \quad \text{pour } (k,l) \in K\setminus\{0\} \times K\setminus\{0\}.$$

Posons $\widetilde{c} = (\langle h_0, P_k \rangle)_{k\in K}$; le raisonnement de la preuve du lemme 1 implique que (ν, a) est solution du système $\Sigma_1(\widetilde{c}, \alpha)$ et donc que $\widetilde{c}$ est solution de $\Sigma_2(\nu, a, \alpha)$.

D'autre part, (ν, a) est solution de $\Sigma_1(c, \alpha)$, donc c est également solution de $\Sigma_2(\nu, a, \alpha)$. Comme $\mathbf{H}_2^{\nu,a,\alpha}$ est inversible, on a $c = \widetilde{c}$, d'où [B].

Réciproquement, si $h_0 = (\nu P_0 + Q)/(P_0 + P)$ est élément de $\mathcal{D}_\phi^p$, posons

$$\langle h_0, P_k P_l \rangle = \alpha_{kl} \quad \text{pour } (k,l) \in K\setminus\{0\} \times K\setminus\{0\}.$$

La matrice $\mathbf{H}^{c,\alpha}$ est inversible. Par conséquent, d'une part, le lemme 1 implique que ν et P sont bien donnés par (11); d'autre part, il existe un voisinage $\mathcal{V}_\alpha$ de α tel que $(\mathbf{H}^{c,\tilde{\alpha}})^{-1}(\nu P_0)$ est positif pour tout $\tilde{\alpha} \in \mathcal{V}_\alpha$. La fonction $\mathcal{F}_c$ est définie sur $\mathcal{V}_\alpha$ et α est un point fixe de $\mathcal{F}_c$.

$\mathbf{H}^{c,\alpha}$ étant inversible, $\mathbf{H}_1^{c,\alpha}$ l'est aussi. Ainsi le système $\Sigma_1(c, \alpha)$ a une solution unique et $\Sigma_2(\nu, a, \alpha)$ a aussi une unique solution; par conséquent, $\mathbf{H}_2^{\nu,a,\alpha}$ est inversible, et α vérifie [A].

L'unicité de h_0 et de α est donnée par la démonstration réciproque. ∎

3.2. *Construction d'une solution exponentielle.* Nous construisons ici une solution du problème (2) de la forme

$$h(\lambda) = \exp\Big(\sum_{l\in K} g_l \phi_l(\lambda) \Big).$$

C'est un procédé de dérivation qui amène au système linéaire vérifié par les coefficients du polynôme. Ce système se résoud par une méthode itérative de point fixe.

Nous donnons d'abord des hypothèses et notations qui seront justifiées dans la preuve du théorème de construction.

On prendra $I = [a,b]^d$ et $\phi_0 \equiv 1$ pour simplifier les notations, mais la démonstration ne le nécessite pas.

Soit, à une permutation de coordonnées près,

$$\begin{aligned} \widetilde{K} = \{&(0,\ldots,0,k_{j+1},\ldots,k_d) \in \mathbb{R}^d,\ (0,\ldots,0,1,k_{j+1},\ldots,k_d) \in \mathbb{R}^d : \\ &j = 1,\ldots,d-1 \text{ et } \exists k_j \neq 0,1 \text{ tel que } (0,\ldots,0,k_j,k_{j+1},\ldots,k_d) \in K\} \\ &\cup \{(0,\ldots,0,1)\} \cup \{(0,\ldots,0,2)\}. \end{aligned}$$

On suppose que la famille $(\phi_k)_{k\in L}$ est donnée pour $L \supset \widetilde{K} \cup K$ et vérifie les hypothèses suivantes :

H1. $|L| \geq |\widetilde{K}| + |K| - 1$;

H2. les dérivées partielles des ϕ_k sont éléments de $\mathcal{P}_L$, soit

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial \lambda_j} = \sum_{i\in L} r_k^j(i)\phi_i \qquad \text{pour } j = 1, \ldots, d;$$

H3. les ϕ_k sont décomposables sur les axes, soit

$$\phi_{k_1,\ldots,k_d}(\lambda) = f_{k_1}^1(\lambda_1)\ldots f_{k_d}^d(\lambda_d).$$

On notera $\mathbf{M}_{c,\alpha} = [M_{c,\alpha}^j]_{j=1,\ldots,d}$, matrice $(|K|-1)\times(|K|-1)$, où

$$\begin{aligned}(M_{c,\alpha}^j)_{k,l} &= [f_1^j(a) - f_1^j(b)]\sum_{i\in L} r_l^j(i)e_{i,k}\\ &\quad - [f_{k_j}^j(b)f_1^j(a) - f_{k_j}^j(a)f_1^j(b)]\sum_{i\in L} r_l^j(i)e_{i,(k_1,\ldots,k_{j-1},0,k_{j+1},\ldots,k_d)}\\ &\quad + [f_{k_j}^j(b) - f_{k_j}^j(a)]\sum_{i\in L} r_l^j(i)e_{i,(k_1,\ldots,k_{j-1},1,k_{j+1},\ldots,k_d)},\end{aligned}$$

avec $e_{i,k} = \int_I h(\lambda)\phi_i\phi_k(\lambda)\,d\lambda$ pour $(k,i)\in L\times L$, soit

$$e_{0,k} = e_{k,0} = c_k \ \text{ pour } k\in K \quad \text{et} \quad e_{i,k} = e_{k,i} = \alpha_{ik} = \alpha_{ki} \ \text{ sinon.}$$

Le système cherché sera

$$(\Sigma_3(c,\alpha)) \qquad \mathbf{M}_{c,\alpha}(g_l)_{l\in K\setminus\{0\}} = (\beta_k)_{k\in M},$$

où M est un sous-ensemble de L de cardinal $|M| = |K|-1$ et $(\beta_k)_{k\in M} = [\beta_k^j]_{k\in M}$ avec

$$\begin{aligned}\beta_k^j &= [f_{k_j}^j(a) - f_{k_j}^j(b)]\sum_{i\in L} r^j_{(k_1,\ldots,k_{j-1},1,k_{j+1},\ldots,k_d)}(i)c_i\\ &\quad + [f_1^j(b) - f_1^j(a)]\sum_{i\in L} r_k^j(i)c_i,\end{aligned}$$

pour j et k tels que $k_1 = \ldots = k_{j-1} = 0$ ou 1, et $k_j \notin \{0,1\}$.

Enfin, $N_{g,\alpha}$ sera la matrice du système équivalent à $\Sigma_3(c,\alpha)$ d'inconnue $c = (c_k)_{K\setminus\{0\}}$, soit

$$(\Sigma_4(g,\alpha)) \qquad N_{g,\alpha}(c_k)_{K\setminus\{0\}} = B_{g,\alpha},$$

et $\mathcal{G}_c$ sera la fonction définie sur $\{\alpha\in\mathbb{R}^{|L|^2-2|K|+1} : \mathbf{M}_{c,\alpha} \text{ inversible}\}$ par

$$\mathcal{G}_c(\alpha) = \Big(\int_I \phi_i\phi_k(\lambda)\exp P_{c,\alpha}(\lambda)\,d\lambda\Big)_{(i,k)\in(L\times L)\setminus(K\times\{0\}\cup\{0\}\times K)},$$

où

$$(13) \qquad P_{c,\alpha} = \sum_{l\in K} g_l(c,\alpha)\phi_l \quad \text{avec } (g_l(c,\alpha))_{l\in K} \text{ solution de } \Sigma_3(c,\alpha).$$

THÉORÈME 4. *Si $(\phi_k)_{k\in L}$ vérifie les hypothèses* H1–H3, *alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

[A] *Il existe α point fixe unique de $\mathcal{G}_c$ tel que $\mathbf{M}_{c,\alpha}$ et $N_{g,\alpha}$ sont inversibles.*

[B] *Il existe un unique $P\in\mathcal{P}_K$ tel que $\exp P\in\mathcal{D}_\phi^\Lambda$. P est alors donné par la relation* (13).

Preuve. Soit $k\in L$. Une dérivation partielle par rapport à la première variable donne

$$\frac{\partial h(\lambda)}{\partial\lambda_1} = \Big(\sum_{l\in K} g_l\frac{\partial\phi_l(\lambda)}{\partial\lambda_1}\Big)h(\lambda)$$

et

$$\frac{\partial h(\lambda)}{\partial\lambda_1}\phi_k(\lambda) = \frac{\partial h(\lambda)\phi_k(\lambda)}{\partial\lambda_1} - h(\lambda)\frac{\partial\phi_k(\lambda)}{\partial\lambda_1},$$

soit, d'après H2,

$$\sum_{l\in K\setminus\{0\}} g_l\sum_{i\in L} r_l^1(i)\phi_i\phi_k h = \frac{\partial h(\lambda)\phi_k}{\partial\lambda_1} - h\sum_{i\in L} r_k^1(i)\phi_i.$$

En intégrant cette relation sur $[a,b]^d$, on obtient

$$(14) \qquad R_k = f_{k_1}^1(b)M_{b,k_2,\ldots,k_d} - f_{k_1}^1(a)M_{a,k_2,\ldots,k_d} - S_k,$$

où

$$(15) \qquad \begin{aligned} M_{t,k_2,\ldots,k_d} &= \int_{[a,b]^{d-1}} h(t,\lambda_2,\ldots,\lambda_d)f_{k_2}^2(\lambda_2)\ldots f_{k_d}^d(\lambda_d)\,d\lambda_2\ldots d\lambda_d,\\ R_k &= \sum_{l\in K\setminus\{0\}} g_l\sum_{i\in L} r_l^1(i)e_{i,k} \quad \text{et} \quad S_k = \sum_{i\in L} r_k^1(i)e_{i,(0,\ldots,0)}.\end{aligned}$$

Les équations (14) s'écrivent, pour $k = (0,k_2,\ldots,k_d)$ et $k = (1,k_2,\ldots,k_d)$,

$$\begin{cases} [f_1^1(a) - f_1^1(b)]M_{b,k_2,\ldots,k_d} = f_1^1(a)[R_{0,k_2,\ldots,k_d} + S_{0,k_2,\ldots,k_d}]\\ \qquad\qquad - [R_{1,k_2,\ldots,k_d} + S_{1,k_2,\ldots,k_d}],\\ [f_1^1(a) - f_1^1(b)]M_{a,k_2,\ldots,k_d} = f_1^1(b)[R_{0,k_2,\ldots,k_d} + S_{0,k_2,\ldots,k_d}]\\ \qquad\qquad - [R_{1,k_2,\ldots,k_d} + S_{1,k_2,\ldots,k_d}];\end{cases}$$

donc, puisque $S_{0,k_2,\ldots,k_d} = 0$, on a

$$\begin{aligned}&[f_1^1(a) - f_1^1(b)][f_{k_1}^1(b)M_{b,k_2,\ldots,k_d} - f_{k_1}^1(a)M_{a,k_2,\ldots,k_d}]\\ &\quad = f_{k_1}^1(b)[f_1^1(a)R_{0,k_2,\ldots,k_d} - (R_{1,k_2,\ldots,k_d} + S_{1,k_2,\ldots,k_d})]\\ &\qquad - f_{k_1}^1(a)[f_1^1(b)R_{0,k_2,\ldots,k_d} - (R_{1,k_2,\ldots,k_d} + S_{1,k_2,\ldots,k_d})]\\ &\quad = [f_{k_1}^1(b)a - f_{k_1}^1(a)b]R_{0,k_2,\ldots,k_d} + [R_{1,k_2,\ldots,k_d} + S_{1,k_2,\ldots,k_d}][f_{k_1}^1(a) - f_{k_1}^1(b)].\end{aligned}$$

Par conséquent, pour chaque k, $k \neq (0, k_2, \ldots, k_d)$ et $k \neq (1, k_2, \ldots, k_d)$, l'équation (14) est équivalente à

$$\begin{aligned}[f_1^1(a) - f_1^1(b)]R_k - [f_{k_1}^1(b)f_1^1(a) - f_{k_1}^1(a)f_1^1(b)]R_{0,k_2,\ldots,k_d} \\ + [f_{k_1}^1(b) - f_{k_1}^1(a)]R_{1,k_2,\ldots,k_d} \\ = [f_1^1(b) - f_1^1(a)]S_k - [f_{k_1}^1(b) - f_{k_1}^1(a)]S_{1,k_2,\ldots,k_d},\end{aligned}$$

soit à

$$\begin{aligned}\sum_{l\in K\setminus\{0\}} g_l \Big[[f_{k_1}^1(b) - f_{k_1}^1(a)] \sum_{i\in L} r_l^1(i) e_{i,(1,k_2,\ldots,k_d)} \\ + [f_1^1(a) - f_1^1(b)] \sum_{i\in L} r_l^1(i) e_{i,k} - [f_{k_1}^1(b)f_1^1(a) - f_{k_1}^1(a)f_1^1(b)] \sum_{i\in L} r_l^1(i) e_{i,0}\Big] \\ = [f_1^1(b) - f_1^1(a)] \sum_{i\in L} r_k^1(i) e_{i,0} - [f_{k_1}^1(b) - f_{k_1}^1(a)] \sum_{i\in L} r_{(1,k_2,\ldots,k_d)}^1(i) e_{i,0}.\end{aligned}$$

Les coefficients g_l pour $l = (0, l_2, \ldots, l_d)$ n'apparaissent pas dans ces équations. Pour les introduire, il faut considérer les dérivations partielles par rapport aux autres variables. Comme pour la première variable dans la relation (15), on définit donc $M_{0,\ldots,0,t,k_{j+1},\ldots,k_d}$ comme l'intégrale sur $[a,b]^{d-1}$ de la fonction

$$h(\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, t, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_d) f_0^1(\lambda_1) \ldots f_0^{j-1}(\lambda_{j-1}) f_{k_{j+1}}^{j+1}(\lambda_{j+1}) \ldots f_{k_d}^d(\lambda_d).$$

Les équations obtenues pour les indices $k = (0, \ldots, 0, k_{j+1}, \ldots, k_d)$ et les indices $k = (0, \ldots, 0, 1, k_{j+1}, \ldots, k_d)$ lorsque $2 \le j \le d-1$ servent à éliminer les quantités $M_{0,\ldots,0,b,k_{j+1},\ldots,k_d}$ et $M_{0,\ldots,0,a,k_{j+1},\ldots,k_d}$ des autres équations, et pour finir $k = (0, \ldots, 0, 1)$ et $k = (0, \ldots, 0, 2)$ lorsque $j = d$, d'où la condition $L \supset \widetilde{K}$.

On peut alors donner à $|K| - 1$ de ces équations la forme d'un système linéaire $(|K| - 1) \times (|K| - 1)$ d'inconnues $(g_l)_{l\in K\setminus\{0\}}$, soit $\Sigma_3(c, \alpha)$, pour un ensemble M d'indices $k \in L$ de cardinal $|K| - 1$, d'où la condition $|L| \ge |K| + |\widetilde{K}| - 1$.

Notons que g_0, qui n'apparaît jamais dans ces équations, est donné par

$$\int_I \phi_0(\lambda) h(\lambda)\, d\lambda = c_0. \tag{16}$$

Le système étant déterminé, il reste à montrer l'équivalence de [A] et [B].

Si α vérifie [A], $\mathbf{M}_{c,\alpha}$ est inversible, donc le système $\Sigma_3(c, \alpha)$ a une unique solution $g = (g_l)_{l\in K\setminus\{0\}}$. Soit $P = \sum_{l\in K} g_l \phi_l$, avec g_0 tel que l'égalité (16) soit vérifiée. Alors α est un point fixe de $\mathcal{G}_c$, donc

$$\int_I \phi_i \phi_k(\lambda) \exp P(\lambda)\, d\lambda = \alpha_{ik} = \alpha_{ki} \quad \text{pour } (k, i) \in L \setminus K \times L \setminus \{0\}.$$

Posons $\widetilde{c} = (\int_I \phi_k \exp P(\lambda)\, d\lambda)_{k\in K}$. Par dérivation, on en déduit le système $\Sigma_3(\widetilde{c}, \alpha)$ dont g est solution, puis le système $\Sigma_4(g, \alpha)$ dont $\widetilde{c}$ est solution. Mais g est solution de $\Sigma_3(c, \alpha)$, donc c est solution de $\Sigma_4(g, \alpha)$ également. La matrice $N_{g,\alpha}$ étant inversible, ce système a une unique solution. On a donc $\widetilde{c} = c$, d'où [B].

Réciproquement, si $P = \sum_{l\in K} g_l \phi_l$ vérifie [B], posons

$$\alpha_{ki} = \alpha_{ik} = \int_I \phi_i \phi_k(\lambda) \exp P(\lambda)\, d\lambda \quad \text{pour } (k, i) \in L \setminus K \times L \setminus \{0\}.$$

Alors α est bien un point fixe de $\mathcal{G}_c$, avec $P = P_{c,\alpha}$.

En procédant par dérivation, on aboutit au système $\Sigma_3(c, \alpha)$. P étant l'unique polynôme tel que $\exp P \in \mathcal{D}_\phi^A$, g est l'unique solution de $\Sigma_3(c, \alpha)$, donc $\mathbf{M}_{c,\alpha}$ est inversible; en réécrivant $\Sigma_3(c, \alpha)$ sous la forme $\Sigma_4(g, \alpha)$, ce système a également une unique solution, donc $N_{g,\alpha}$ est inversible et α vérifie [A].

L'unicité de P et de α est donnée par la démonstration réciproque. ■

Notons que les hypothèses nécessaires à cette construction sont en particulier vérifiées pour les polynômes algébriques ou trigonométriques et pour leurs produits, par exemple pour la famille $((\lambda_1, \lambda_2) \to \lambda_1^{k_1} \exp ik_2\lambda_2)$ considérée par Devinatz [5].

D'autre part, Seghier [12] a construit dans le cas trigonométrique une fonction de cette forme en établissant le système linéaire grâce aux propriétés spécifiques de la transformée de Fourier de la convolution.

3.3. *Passage au problème algébrique.* Lorsque la famille ϕ est la limite uniforme d'une suite de familles de fonctions (ϕ_n), nous montrons que la solution du problème des ϕ-moments de maximum d'entropie est limite de celles obtenues pour la suite.

Ceci permet en particulier de déduire les solutions pour une famille de fonctions continues de celles obtenues pour le problème algébrique.

En effet, lorsque ϕ est une famille de polynômes algébriques, le problème des ϕ-moments peut facilement être ramené au problème algébrique.

Posons $\phi_k(\lambda) = \sum_{l\in M} b_l^k \lambda^l$ pour $k \in K$, où $M = \prod_{j=1}^d \{0, \ldots, n_j\}$. Alors le problème (2) s'écrit

$$\sum_{l\in M} b_l^k \overline{h}_l = \sum_{l\in M} b_l^k \int_I h(\lambda) \lambda^k\, dp(\lambda) = c_k \quad \text{pour } k \in K. \tag{17}$$

Si M est inclus dans K et si la matrice $(b_l^k)_{l\in M}^{k\in K}$ est de rang maximal, ce système est inversible et $(\overline{h}_k)_{k\in M}$ s'exprime explicitement en fonction de $(c_k)_{k\in K}$.

Si K est inclus dans M, le système (17) s'écrit encore

$$\mathbf{M}^{\phi}_{K}(\overline{h}_l)_{l\in K} = (c_k)_{k\in K} - \boldsymbol{M}^{\phi}_{K}(\overline{h}_l)_{l\in M\setminus K}, \tag{18}$$

où $\mathbf{M}^{\phi}_{K} = (b_{l-k})_{(l,k)\in(K)^2}$ et $\boldsymbol{M}^{\phi}_{K} = (b_{l-k}\mathbf{1}_{l-k\in M})_{k\in K,\, l\in M\setminus K}$.

Si $b_0 \neq 0$, la suite $(\overline{h}_k)_{k\in K}$ est déterminée en fonction de $(c_k)_{k\in K}$ et $(\alpha_k)_{k\in M\setminus K}$.

Sinon, il est facile de modifier ce processus de façon à obtenir un système analogue au système (18), mais inversible. Une procédure de point fixe sur les coefficients $(\overline{h}_k)_{k\in M\setminus K}$ permet alors de déterminer $h \in \mathcal{D}^p_\phi$ à partir des solutions obtenues pour les moments algébriques.

THÉORÈME 5. *Soit I compact et ϕ_k la limite uniforme d'une suite de fonctions (ϕ_{kn}) pour $k \in K$. Soit $\Psi \in C^2(\mathbb{R}^*_+)$ telle que Ψ' admet une fonction réciproque dérivée d'une fonction ψ. Supposons que $\mathcal{D}^p_\phi$ est non vide, S_Ψ atteint son maximum sur $\mathcal{D}^p_\phi$ en h_∞ et sur $\mathcal{D}^p_{\phi_n}$ en h_n pour tout n, et que*

$$\mathcal{V} = \Big\{(v_j) \in \mathbb{R}^{|K|} : \int_I \psi\Big[\sum_j v_j\phi_j(\lambda)\Big]dp(\lambda) < \infty\Big\}$$

est un ouvert non vide. Alors h_n tend uniformément sur I vers h_∞.

Preuve. $\mathcal{D}^p_\phi$ étant non vide, $\mathcal{D}^p_{\phi_n}$ l'est aussi, au moins pour n assez grand. D'après le théorème 1, S_Ψ est maximum sur $\mathcal{D}^p_{\phi_n}$ en

$$h_n = (\Psi')^{-1}(g_n) = \psi'(g_n) \quad \text{avec} \quad g_n = \sum_j v_{jn}\phi_j,$$

et sur $\mathcal{D}^p_\phi$ en

$$h_\infty = (\Psi')^{-1}(g_\infty) = \psi'(g_\infty) \quad \text{avec} \quad g_\infty = \sum_j v_{j\infty}\phi_j.$$

On définit pour $v \in \mathbb{R}^{|K|}$ les fonctions convexes suivantes :

$$\mathcal{H}_n(v) = \int_I \psi\Big[\sum_j v_j\phi_j(\lambda)\Big]\,dp(\lambda) - \langle v, c\rangle,$$

$$\mathcal{H}(v) = \int_I \psi\Big[\sum_j v_j\phi_j(\lambda)\Big]\,d\lambda - \langle v, c\rangle.$$

Alors $v_n = (v_{jn})$ est l'unique point de $\mathbb{R}^{|K|}$ tel que $\operatorname{grad}\mathcal{H}_n(v_n) = 0$ et $v_\infty = (v_{j\infty})$ est l'unique point de $\mathbb{R}^{|K|}$ tel que $\operatorname{grad}\mathcal{H}(v_\infty) = 0$.

La suite ϕ_{kn} tend vers ϕ_k uniformément, donc, $\mathcal{H}$ étant définie sur $\mathcal{V}$, $\mathcal{H}_n$ l'est aussi (au moins pour n assez grand) et $\mathcal{H}_n$ tend uniformément vers $\mathcal{H}$ sur tout compact de $\mathcal{V}$.

On en déduit que v_n tend vers v_∞, d'où le résultat. ∎

Notons que ceci permet par exemple de traiter le problème des moments algébriques par rapport à une mesure de référence p absolument continue par rapport à Λ, pour lequel les hypothèses nécessaires à la méthode de construction d'une solution exponentielle ne sont en général pas vérifiées.

Références

[1] R. Azencott et D. Dacunha-Castelle, *Séries d'observations irrégulières*, Masson, 1984

[2] A. Ben-Tal and A. Charnes, *A dual optimization framework for some problems of information theory and statistics*, Problems Control Inform. Theory 8 (1979), 387–401.

[3] J. M. Borwein and A. S. Lewis, *Duality relationships for entropy-like minimization problems*, SIAM J. Control Optim. 29 (1991), 325–338.

[4] I. Csiszár, *I-divergence geometry of probability distributions and minimization problems*, Ann. Probab. 3 (1975), 146–158.

[5] A. Devinatz, *Integral representations of positive definite functions, II*, Trans. Amer. Math. Soc. 77 (1954), 455–480.

[6] V. Girardin, *Problème des moments et entropie. Application en probabilités*, thèse, Univ. Paris-Sud, 1991.

[7] S. Ihara, *Maximum entropy spectral analysis and ARMA processes*, IEEE Trans. Inform. Theory 30 (1984), 377–380.

[8] M. Kreĭn and A. Nudel'man, *The Markov Moment Problem and Extremal Problems*, Amer. Math. Soc., 1977.

[9] H. Landau, *Maximum entropy and the moment problem*, Bull. Amer. Math. Soc. 16 (1987), 47–77.

[10] A. Lippman, *A maximum entropy method for expert system construction*, in: Maximum-Entropy and Bayesian Methods in Science and Engineering, Vol. 2, Kluwer, 1988, 243–263.

[11] A. Seghier, *Extension de fonctions de type positif et entropie associée. Cas multidimensionnel*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 8 (1991), 651–675.

[12] —, *Extension de fonctions de type positif. Cas continu*, Prépub. Univ. Paris-Sud, 1989.

Université Paris-Sud
Batiment 425
91405 Orsay Cedex, France
E-mail: girardin@stats.matups.fr

Received October 13, 1992
Revised version June 12, 1995 (3009)