STUDIA MATHEMATICA 120 (2) (1996)

Idempotents dans les algèbres de Banach

par

M. BERKANI (Oujda et Trieste)

Abstract. Using the holomorphic functional calculus we give a characterization of idempotent elements commuting with a given element in a Banach algebra.

1. Introduction. Soit A une algèbre de Banach complexe, commutative et unitaire. Le théorème de Shilov [1, Theorem 5, p. 109] montre que si l'espace des caractères de A n'est pas connexe, alors A possède un élément idempotent non trivial. Cet élément est alors obtenu par le calcul fonctionnel holomorphe usuel. Si l'on considère maintenant une algèbre de Banach unitaire A non nécessairement commutative, a et x deux éléments de A qui commutent, et si l'on suppose que $e+x$ est inversible, alors si f est une fonction analytique au voisinage du spectre de $(a-\lambda e)(e+x)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, l'élément $f((a-\lambda e)(e+x)^{-1})$ défini par le calcul fonctionnel holomorphe commute avec a et x. De plus, si $f^2=f$, alors $f((a-\lambda e)(e+x)^{-1})$ est un élément idempotent.

Réciproquement, si b est un élément idempotent de A, non trivial, qui commute avec un élément a de A, est-ce que

$$b=f((a-\lambda e)(e+x)^{-1}),$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$, f et x vérifient les conditions ci-dessus?

Récemment G. N. Hile et W. E. Pfaffenberger ont développé une nouvelle théorie spectrale généralisée [2], basé sur une nouvelle définition du spectre. Ils ont montré [3] que tous les éléments idempotents qui commutent avec un élément donné s'obtiennent au moyen du calcul fonctionnel généralisé qu'ils ont développé dans leur nouvelle théorie. Dans le présent travail, par des méthodes similaires à celle de Hile et Pfaffenberger et sans passer par la théorie spectrale généralisée, nous répondons affirmativement à la question posé ci-dessus.

1991 *Mathematics Subject Classification*: 46H05, 46H30.
Key words and phrases: idempotent, Banach algebra.

2. Résultats

1. DÉFINITION. Soit A une algèbre unitaire d'unité e. Un élément x de A est dit *idempotent* si $x^2 = x$. Il est dit *non trivial* si x est non nul et s'il est différent de e.

2. THÉORÈME. *Soit A une algèbre de Banach unitaire et a un élément de A. Si b est un élément idempotent de A non trivial qui commute avec a, alors il existe un élément x de A qui commute avec a tel que $e + x$ est inversible dans A, et il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et une fonction f analytique au voisinage du spectre de $(a - \lambda e)(e + x)^{-1}$ telle que*

$$b = f((a - \lambda e)(e + x)^{-1}).$$

Preuve. Nous allons distinguer deux cas :

1^er^ cas. Supposons que a est inversible, et soit $\alpha > 1$. On sait que $e + \alpha b$ est inversible, e désignant l'unité de A. Posons

$$t = a(e + \alpha b)^{-1}.$$

Soit B la sous-algèbre commutative unitaire maximale de A contenant a et b. Le spectre de tout élément de B est le même dans A et dans B. Soit Δ_B l'espace des caractères de B. Alors le spectre de t,

$$\sigma(t) = \{\chi(t) \mid \chi \in \Delta_B\} = \left\{ \frac{\chi(a)}{1 + \alpha\chi(b)} \;\middle|\; \chi \in \Delta_B \right\}.$$

Posons $V_0 = \{\chi(t) \mid \chi \in \Delta_B \text{ et } \chi(b) = 0\}$ et $V_1 = \{\chi(t) \mid \chi \in \Delta_B \text{ et } \chi(b) = 1\}$. On a $V_0 \cup V_1 = \sigma(t)$, $V_0 = \{\chi(a) \mid \chi \in \Delta_B \text{ et } \chi(b) = 0\} \subset \sigma(a)$ et $V_1 = \{\frac{\chi(a)}{1+\alpha} \mid \chi \in \Delta_B \text{ et } \chi(b) = 1\}$.

Comme a est inversible, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\{z \mid |z| \le \varepsilon\} \cap \sigma(a) = \emptyset$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\varrho(a)/(1 + \alpha) < \varepsilon/2$, où $\varrho(a)$ désigne le rayon spectral de a. On a alors $V_0 \cap V_1 = \emptyset$ et $V_0 \cup V_1 = \sigma(t)$. De plus, V_0 et V_1 sont fermés et non vides.

Soit f la fonction definie par

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| > \varepsilon, \\ 1 & \text{si } |z| < \varepsilon/2. \end{cases}$$

Alors f est analytique au voisinage de $\sigma(t)$. Posons $u = f(t)$. Par le calcul fonctionnel on a $u^2 = f(t)f(t) = f^2(t) = f(t) = u$, donc u est un idempotent. Soit $\chi \in \Delta_B$; on a $\chi(b - u) = \chi(b) - \chi(f(t)) = \chi(b) - f(\chi(t))$.

Si $\chi(b) = 0$ on a $\chi(b - u) = 0$ car $\chi(t) = \chi(a) \Rightarrow |\chi(t)| > \varepsilon \Rightarrow f(\chi(t)) = 0$. Si $\chi(b) = 1$ on a $\chi(b - u) = 0$ car $\chi(t) \in V_1$, donc $f(\chi(t)) = 1$.

D'où $\sigma(b - u) = \{0\}$, donc $b - u$ est un élément quasi-nilpotent de B. Comme b et u sont deux idempotents qui commutent, il découle alors du théorème bien connu de Sinclair [4] que $\|b - u\| = \varrho(b - u) = 0$. Donc $b - u = 0$. Posons $x = \alpha b$. On a alors $b = f(a(e + x)^{-1})$.

2^ème^ cas. Si a est non inversible, soit $\lambda \notin \sigma(a)$. Alors $a - \lambda e$ est inversible et on applique alors le 1^er^ cas à $a - \lambda e$.

Le théorème suivant généralise le théorème précédent aux cas où on a plusieurs idempotents.

3. THÉORÈME. *Soit A une algèbre de Banach unitaire d'unité e, et soit $a \in A$. Supposons que $e = b_1 + \ldots + b_n$, où $(b_i)_{1 \le i \le n}$ sont des idempotents non triviaux tels que $b_i b_j = 0$ si $i \ne j$, et $ab_i = b_i a$, $1 \le i \le n$. Alors il existe un élément t de B qui commute avec a et avec chaque b_i, $1 \le i \le n$, dont le spectre n'est pas connexe, et des fonctions analytiques $(f_i)_{1 \le i \le n}$ au voisinage du spectre de t telle que $b_i = f_i(t)$ pour tout i, $1 \le i \le n$.*

Preuve. Comme dans le théorème précédent on va distinguer deux cas.

1^er^ cas. Supposons que a est inversible. Posons

$$t = a(e + \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n)^{-1}, \quad \text{où } \alpha_i > 1 \text{ pour } 1 \le i \le n.$$

Soit B la sous-algèbre maximale commutative unitaire de A contenant a, $b_1, \ldots, b_n$, et soit Δ_B l'espace des caractères de B. On a $1 = \chi(b_1) + \ldots + \chi(b_n)$ pour tout $\chi \in \Delta_B$. Comme chaque b_i est un idempotent et comme $b_i b_j = 0$ si $i \ne j$, on a

$$\forall \chi \in \Delta_B,\ \exists! i_0 : \quad \chi(b_{i_0}) = 1 \text{ et } \chi(b_i) = 0 \text{ si } i \ne i_0.$$

On a $\sigma(a) = \{\chi(a) \mid \chi \in \Delta_B\}$. Comme a est inversible, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\{z \mid |z| \le \varepsilon\} \cap \sigma(a) = \emptyset$. D'autre part, on a

$$\sigma(t) = \{\chi(t) \mid \chi \in \Delta_B\} = \left\{ \frac{\chi(a)}{1 + \alpha_1\chi(b_1) + \ldots + \alpha_n\chi(b_n)} \;\middle|\; \chi \in \Delta_B \right\}.$$

Posons $F_i = \{\chi(t) \mid \chi \in \Delta_B \text{ et } \chi(b_i) = 1\}$. On a

$$F_i = \left\{ \frac{\chi(a)}{1 + \alpha_i} \;\middle|\; \chi \in \Delta_B \text{ et } \chi(b_i) = 1 \right\}.$$

On choisit α_1 avec $\varrho(a)/(1 + \alpha_1) < \varepsilon$. Donc $F_1 \cap \sigma(a) = \emptyset$.

De même on a $F_1 \cap \{z \mid |z| \le \varepsilon/(1 + \alpha_1)\} = \emptyset$. On choisit alors α_2 tel que $F_2 \cap F_1 = \emptyset$. Il suffit que

$$\frac{\varrho(a)}{1 + \alpha_2} < \frac{\varepsilon}{1 + \alpha_1}.$$

Et par récurrence on choisit α_{i+1} avec

$$\frac{\varrho(a)}{1 + \alpha_{i+1}} < \frac{\varepsilon}{1 + \alpha_i}, \quad 1 \le i \le n - 1.$$

Les sous-ensembles $(F_i)_{1 \le i \le n}$ de $\sigma(t)$ sont alors des fermés non vides contenus dans des couronnes deux à deux disjointes tels que $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \sigma(t)$.

Posons

$$C_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \frac{\varepsilon}{1+\alpha_i} < |z| < \frac{\varepsilon}{1+\alpha_{i-1}} \right\}$$

avec $\alpha_0 = 0$. Soit f_i la fonction definie par

$$f_i(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in C_i, \\ 0 & \text{si } z \notin C_i. \end{cases}$$

On a alors $f_i(t) = b_i$. En effet

$$\chi(f_i(t)) = f_i(\chi(t)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi(b_i) = 0, \\ 1 & \text{si } \chi(b_i) = 1. \end{cases}$$

D'où $\chi(f_i(t)) = \chi(b_i)$ pour tout $\chi \in \Delta_B$. Comme $f_i(t)$ est un idempotent on a $b_i = f_i(t)$.

2ème cas. Si a n'est pas inversible, on prend un $\lambda \notin \sigma(a)$ et on fait le raisonnement précédent avec $a - \lambda e$ au lieu de a.

Acknowledgments. The author, an associate member of ICTP, would like to thank Professor Abdus Salam, the International Atomic Energy Agency and UNESCO for hospitality at the International Centre for Theoretical Physics, Trieste. He would also like to thank the referee who showed to him the use of Sinclair's theorem.

Références

[1] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Complete Normed Algebras*, Springer, Berlin, 1973.
[2] G. N. Hile and W. E. Pfaffenberger, *Generalized spectral theory in complex Banach algebras*, Canad. J. Math. 37 (1985), 1211–1236.
[3] —, —, *Idempotents in complex Banach algebras*, ibid. 39 (1987), 625–630.
[4] A. M. Sinclair, *The norm of a hermitian element in a Banach algebra*, Proc. Amer. Math. Soc. 28 (1971), 446–450.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Oujda, Morocco

International Centre for Theoretical Physics
Trieste, Italy

Received July 26, 1995
Revised version March 15, 1996
(3507)

STUDIA MATHEMATICA 120 (2) (1996)

Exactness of skew products with expanding fibre maps

by

THOMAS BOGENSCHÜTZ (Essen)
and ZBIGNIEW S. KOWALSKI (Wrocław)

To the memory of Wiesław Szlenk

Abstract. We give an elementary proof for the uniqueness of absolutely continuous invariant measures for expanding random dynamical systems and study their mixing properties.

Introduction. Let θ be a measure-preserving transformation of a Lebesgue space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ and let $\varphi := \{\varphi(\omega) : \omega \in \Omega\}$ be a family of nonsingular transformations of $(X, \mathcal{B}, m)$ such that $(\omega, x) \mapsto \varphi(\omega)x$ is $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{B})$-measurable. Then $(\omega, x) \mapsto (\theta\omega, \varphi(\omega)x) =: \Theta(\omega, x)$ defines a nonsingular transformation of the Lebesgue space $(\Omega \times X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}, \mathbb{P} \otimes m)$ which is called a *skew product* with base transformation θ and fibre maps $\varphi(\omega)$.

One also says that φ gives rise to a *random dynamical system* with state space X over the dynamical system $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \theta)$ by defining

$$\varphi(n, \omega) := \varphi(\theta^{n-1}\omega) \circ \ldots \circ \varphi(\omega) \quad \text{for } n > 0.$$

Note that $\varphi(n, \omega)$ describes the action of Θ^n on X.

In this paper, we study the situation when the state space is a Riemannian manifold M and all fibre maps are expanding. In their classical paper [KS69] Krzyżewski and Szlenk proved that for each expanding map there is an invariant measure which is equivalent to the Riemannian volume. The fundamental problem in the random case is to find a Θ-invariant measure on $\Omega \times M$ whose disintegrations are equivalent to the Riemannian volume. This problem has been solved by Kifer [Kif92, Theorem B]

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 58F11; Secondary 58F15.
The first named author acknowledges the hospitality and the financial support of the Technical University of Wrocław during his visit in February 1995, where this work was started.
The research of the second named author is supported by grant KBN 2P03A 076 08.