Un théorème d'unicité pour quelques systèmes d'équations différentielles considérées dans les espaces abstraits

par

J. G.-MIKUSIŃSKI (Wrocław).

Dans deux articles antérieurs [1]), nous avons établi un théorème d'unicité pour certaines équations différentielles considérées dans les espaces abstraits. A présent, nous allons généraliser ce théorème aux systèmes d'équations

$$a_i x_i'(\lambda)=\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, x_j(\lambda)+f_i(\lambda) \qquad (a_i\neq 0,\quad i=1,2,\dots,n). \tag{1}$$

On suppose que a_i et b_{ij} sont des éléments d'un anneau A, commutatif et sans diviseurs de zéro, et que $f_i(\lambda)$ et $x_i(\lambda)$ sont des fonctions qui font correspondre des éléments de A aux λ réels d'un intervalle ouvert donné (α,β). La dérivée est supposée satisfaisant aux postulats:

1° $\begin{cases} [x_1(\lambda)+x_2(\lambda)]'=x_1'(\lambda)+x_2'(\lambda), \\ [x_1(\lambda)\cdot x_2(\lambda)]'=x_1'(\lambda)\cdot x_2(\lambda)+x_1(\lambda)\cdot x_2'(\lambda); \end{cases}$

2° $[x(\mu-\lambda)]'=-x'(\mu-\lambda)$ pour μ constant;

3° $x(\lambda)=\text{const}$ entraîne $x'(\lambda)=0$ et réciproquement.

Cela posé, on a le théorème suivant:

Théorème. *Il existe au plus une solution $x_1(\lambda),\dots,x_n(\lambda)$ du système* (1), *satisfaisant aux conditions initiales*

$$x_1(\lambda_0)=k_1, \qquad \dots, \qquad x_n(\lambda_0)=k_n,$$

où $k_1,\dots,k_n$ sont des éléments donnés de A et λ_0 est un point de (α,β).

[1]) Cf. Jan G.-Mikusiński, *Sur l'unicité de quelques équations différentielles dans les espaces abstraits*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 22 (1949), p. 157-160; S. Drobot et J. G.-Mikusiński, *Sur l'unicité des solutions de quelques équations différentielles dans les espaces abstraits (II)*, Studia Mathematica 11 (1950), p. 38-40.

La démonstration s'appuyera sur le lemme suivant:

Lemme. *Soit B une matrice carrée, formée d'éléments d'un anneau commutatif quelconque. Il existe une matrice non nulle X, formée d'éléments du même anneau, telle que*

$$B^*X=XB,$$

où B^* désigne la matrice transposée de B.

Il suffit de démontrer l'existence d'une matrice symétrique et non nulle X, telle que le produit XB soit encore une matrice symétrique; en effet, on aura alors

$$XB=(XB)^*=B^*X^*=B^*X.$$

Or, si l'ordre des matrices est n, X contient $(n^2+n)/2$ inconnues, tandis que la condition $XB=(XB)^*$ ne fournit que $(n^2-n)/2$ équations entre les éléments de B et X. Ces équations sont linéaires et homogènes par rapport aux éléments de X et leur nombre est inférieur à celui d'inconnues. Il existe donc des solutions non nulles.

Pour avoir le théorème, il suffit de démontrer que si $a_i=a\neq 0$, $k_i=0$ et $f_i(\lambda)=0$ dans (α,β) $(i=1,2,\dots,n)$, alors on a $x_i(\lambda)=0$ pour $\lambda\in(\alpha,\beta)$ et $i=1,2,\dots,n$. Ceci est vrai pour $n=1$ [2]). Nous allons le déduire pour n quelconque, en l'admettant pour $n-1$.

Posons

$$y(\lambda)=\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\, x_i(\lambda)\, x_j(\mu-\lambda),$$

où μ est un nombre tel que $\mu-\lambda_0$ appartient à (α,β), et les coefficients c_{ij} sont des éléments de A qui seront choisis dans la suite. On a, pour λ et $\mu-\lambda$ appartenant à (α,β),

$$y'(\lambda)=\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}[x_i'(\lambda)x_j(\mu-\lambda)-x_i(\lambda)x_j'(\mu-\lambda)],$$

d'où, en tenant compte de (1),

$$ay'(\lambda)=\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}\, x_i(\lambda)\, x_j(\mu-\lambda)$$

avec

$$m_{ij}=\sum_{\nu=1}^{n}(b_{\nu i}c_{\nu j}-c_{i\nu}b_{\nu j}).$$

[2]) Cf. Jan G.-Mikusiński, loc. cit.

D'après le lemme précédent, on peut choisir les coefficients c_{ij} de la manière à avoir $m_{ij}=0$ pour toutes les valeurs de i et j et $c_{i_0 j_0}\neq 0$ pour l'un au moins des couples i,j. On a alors $y'(\lambda)=0$ [3]) pour λ et $\mu-\lambda$ appartenant à (α,β) et la fonction $y(\lambda)$ se réduit à une constante; comme $y(\lambda_0)=0$, on a $y(\lambda)=0$ dans la partie commune des intervalles (α,β) et $(\mu-\beta,\mu-\alpha)$. On peut donc écrire, en remplaçant $\mu-\lambda$ par $\varkappa$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}x_i(\lambda)x_j(\varkappa)=0, \tag{2}$$

cette égalité étant évidemment vraie pour tout $\varkappa$ fixé arbitrairement dans (α,β) et pour λ appartenant à la partie commune des intervalles (α,β) et $(\alpha+\lambda_0-\varkappa,\ \beta+\lambda_0-\varkappa)$.

Si l'on a, dans l'intervalle

$$\left(\frac{\alpha+\lambda_0}{2},\frac{\lambda_0+\beta}{2}\right), \tag{3}$$

identiquement $\sum_{j=1}^{n} c_{i_0 j}x_j(\lambda)=0$, cette égalité représente dans (3) une intégrale première du système (1) et réduit ce système à $n-1$ équations à $n-1$ inconnues

$$x_1,\dots,x_{j_0-1},\qquad x_{j_0+1},\dots,x_n,$$

pour lesquelles le théorème est vrai par l'hypothèse. On a donc, dans l'intervalle (3), $x_j(\lambda)=0$ pour $j\neq j_0$. En vertu de (1), on a encore

$$ax'_{j_0}(\lambda)=b_{j_0 j_0}x_{j_0}(\lambda),$$

pour λ appartenant à (3), d'où $x_{j_0}(\lambda)=0$ dans (3). Donc $x_i(\lambda)=0$ dans (3), pour tout $i=1,2,\dots,n$.

S'il existe, au contraire, un nombre $\varkappa$, appartenant à (3), pour lequel $\sum_{j=1}^{n} c_{i_0 j}x_j(\varkappa)\neq 0$, alors l'égalité (2) représente une intégrale première ($\varkappa$ étant constant) et le système (1) se réduit, dans l'intervalle (3), à un système de $n-1$ équations à $n-1$ inconnues

$$x_1,\dots,x_{i_0-1},\qquad x_{i_0+1},\dots,x_n,$$

et l'on a, pareillement que tout à l'heure, $x_i(\lambda)=0$ dans (3), pour tout $i=1,2,\dots,n$.

Pour achever la démonstration, il suffit de remarquer que, si une proposition P est vraie pour un certain $\lambda_0\epsilon(\alpha,\beta)$ et si la supposition que P est vraie pour un certain $\mu\epsilon(\alpha,\beta)$ entraîne qu'elle l'est pour tout $\lambda\epsilon\left(\frac{\alpha+\mu}{2},\frac{\mu+\beta}{2}\right)$, alors P est vraie pour tout $\lambda\epsilon(\alpha,\beta)$.

(Reçu par la Rédaction le 19. 4. 1950).

[3]) On peut se servir aussi, dans le calcul, des notations suivantes: $X(\lambda)=\{x_i(\lambda)\}$, $B=\{b_{ij}\}$, $C=\{c_{ij}\}$. Dans les conditions actuelles, le système (1) s'écrira dans la forme

$$aX'(\lambda)=BX(\lambda),$$

et la fonction $y(\lambda)$ peut être représentée comme le produit intérieur

$$y(\lambda)=\big(X(\lambda),CX(\mu-\lambda)\big),$$

d'où

$$\begin{aligned} y'(\lambda)&=\big(X'(\lambda),CX(\mu-\lambda)\big)-\big(X(\lambda),CX'(\mu-\lambda)\big),\\ ay'(\lambda)&=\big(BX(\lambda),CX(\mu-\lambda)\big)-\big(X(\lambda),CBX(\mu-\lambda)\big)\\ &=\big(X(\lambda),B^*CX(\mu-\lambda)\big)-\big(X(\lambda),CBX(\mu-\lambda)\big)\\ &=\big(X(\lambda),(B^*C-CB)X(\mu-\lambda)\big).\end{aligned}$$

En posant maintenant $B^*C-CB=0$, on aura $y'(\lambda)=0$. Je dois cette remarque à M. C. Ryll-Nardzewski.