Sur le produit de composition de deux fonctions continues

par

V. JARNÍK (Praha).

Par I nous allons désigner ou bien l'intervalle fermé $\langle 0, t_0\rangle$, où $0<t_0<+\infty$, ou bien l'intervalle $\langle 0,+\infty)$. L'ensemble de toutes les fonctions réelles et continues dans I sera désigné par $C(I)$. On définit le produit de composition $z=xy$ de deux fonctions $x\epsilon C(I)$, $y\epsilon C(I)$ par l'équation

$$z(t)=\int_0^t x(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau \qquad (t\epsilon I).$$

On a $z\epsilon C(I)$, car

$$\begin{aligned} &z(t+h)-z(t)\\ (1)\qquad &=\int_t^{t+h} x(t+h-\tau)\,y(\tau)\,d\tau+\int_0^t\bigl(x(t+h-\tau)-x(t-\tau)\bigr)\,y(\tau)\,d\tau.\end{aligned}$$

1. M. Mikusiński a posé la question, s'il existe deux fonctions $x\epsilon C(I)$, $y\epsilon C(I)$ telles que la fonction $z=xy$ soit dépourvue de dérivée dans chaque point intérieur de I. Je vais donner une réponse affirmative à cette question.

Lemme 1. *Soit $x\epsilon C(I)$, $y\epsilon C(I)$, $z=xy$; supposons qu'il existe trois nombres K, L_1, L_2 tels que*

$$(2)\qquad |x(t_1)-x(t_2)|\leqslant K\,|t_1-t_2|,\quad |x(t_1)|\leqslant L_1,\qquad |y(t_1)|\leqslant L_2$$

pour $t_1\epsilon I$, $t_2\epsilon I$; on a alors, pour $t\epsilon I$, $t+h\epsilon I$,

$$(3)\qquad |z(t+h)-z(t)|\leqslant (L_1+Kt)L_2\,|h|.$$

Démonstration. Voir (1).

Lemme 2. *Soit $a>0$, $b>0$. Définissons une fonction $x=x_{a,b}$, continue dans l'intervalle $(-\infty,+\infty)$, de la manière suivante:*

$$x_{a,b}(t)=2abt-\tfrac{1}{2}b \qquad \textit{pour } 0\leqslant t\leqslant 1/2a;$$

$$x_{a,b}(-t)=x_{a,b}(t),\qquad x_{a,b}(t)=x_{a,b}(t+1/a),$$

donc

$$(4)\qquad \operatorname{Max}|x_{a,b}(t)|=\tfrac{1}{2}b,\qquad |x_{a,b}(t_1)-x_{a,b}(t_2)|\leqslant 2ab\,|t_1-t_2|.$$

Posons $z=x_{a,b}\cdot x_{a,b}$. Alors, si q est un nombre naturel, on a

$$(5)\qquad z\left(\frac{q}{2a}\right)=(-1)^q\,\frac{qb^2}{24a}.$$

Démonstration. On voit facilement que $x(1/2a-t)=-x(t)$. Soit $k\geqslant 0$ un nombre entier. Alors

$$z\left(\frac{2k}{2a}\right)=\int_0^{k/a} x\left(\frac{k}{a}-\tau\right)x(\tau)\,d\tau=\int_0^{k/a}x^2(\tau)\,d\tau$$

$$=4k\int_0^{1/4a}x^2(\tau)\,d\tau=\frac{2kb^2}{24a}.$$

$$z\left(\frac{2k+1}{2a}\right)=\int_0^{(2k+1)/(2a)} x\left(\frac{2k+1}{2a}-\tau\right)x(\tau)\,d\tau=\int_0^{(2k+1)/(2a)} x\left(\frac{1}{2a}-\tau\right)x(\tau)\,d\tau$$

$$=-\int_0^{(2k+1)/(2a)} x^2(\tau)\,d\tau=-(4k+2)\int_0^{1/4a}x^2(\tau)\,d\tau=-\frac{(2k+1)b^2}{24a}.$$

Lemme 3. *Soit t un nombre, z une fonction réelle. Supposons qu'il existe deux suites de nombres v_n, w_n telles que*

$$v_n\leqslant t\leqslant w_n,\qquad v_n<w_n,\qquad \lim_{n\to\infty}v_n=\lim_{n\to\infty}w_n=t,$$

$$(6)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{z(w_n)-z(v_n)}{w_n-v_n}=+\infty.$$

Alors

$$(7)\qquad \limsup_{h\to 0}\frac{z(t+h)-z(t)}{h}=+\infty.$$

On a un résultat analogue avec $-\infty$ au lieu de $+\infty$.

Démonstration. Evidente et bien connue.

Théorème 1. *Il existe une fonction x, continue dans $\langle 0,+\infty)$ et telle que la fonction $z=xx$ satisfasse, pour chaque $t>0$, aux équations*

$$(8)\qquad \limsup_{h\to 0}\frac{z(t+h)-z(t)}{h}=+\infty,\qquad \liminf_{h\to 0}\frac{z(t+h)-z(t)}{h}=-\infty.$$

Démonstration. Posons

(9) $c_1=2,\ c_{n+1}=c_n^3=2^{3^n};\quad y_n=x_{a,b},\quad$ où $\quad a=c_n^3,\ b=1/c_n$

($x_{a,b}$ est la fonction du Lemme 2). On a donc

(10) $$|y_n(t_1)|\leqslant 1/2c_n,\qquad |y_n(t_2)-y_n(t_1)|\leqslant 2c_n^2|t_2-t_1|,$$

(11) $$\sum_{k=1}^{n}c_k<2c_n,\qquad \sum_{k=n}^{\infty}1/c_k<2/c_n.$$

La série $x(t)=y_1(t)+y_2(t)+\ldots$ est donc absolument et uniformément convergente. En posant $z_{k,m}=y_ky_m=z_{m,k}$, $z=xx$ (produit de composition), on a pour tout $t\geqslant 0$

(12) $$z(t)=\sum_{m,k=1}^{\infty}z_{m,k}(t).$$

Soit t un nombre positif quelconque, qui sera fixe dans ce qui suit. A chaque nombre naturel n suffisamment grand, on peut faire correspondre un nombre *pair* $p_n>0$ et un nombre *impair* $q_n>0$, tels que

(13) $$r_n=\frac{p_n}{2c_n^3}\leqslant t<\frac{p_n+2}{2c_n^3},\qquad v_n=\frac{q_n}{2c_n^3}\leqslant t<\frac{q_n+2}{2c_n^3}.$$

Posons encore

$$s_n=\frac{p_n+3}{2c_n^3}>t,\qquad w_n=\frac{q_n+3}{2c_n^3}>t,$$

d'où

$$\lim r_n=\lim s_n=\lim v_n=\lim w_n=t.$$

D'après (5) on a alors

$$z_{n,n}(r_n)>0,\qquad z_{n,n}(v_n)<0,$$

$$z_{n,n}(s_n)=-\frac{p_n+3}{24c_n^5}<-\frac{t}{12c_n^2},\qquad z_{n,n}(w_n)>\frac{t}{12c_n^2};$$

donc

(14) $$\frac{z_{n,n}(s_n)-z_{n,n}(r_n)}{s_n-r_n}<-\frac{tc_n}{18},\qquad \frac{z_{n,n}(w_n)-z_{n,n}(v_n)}{w_n-v_n}>\frac{tc_n}{18}.$$

Si $k<n$, $m>0$, on a d'après (10) et d'après le lemme 1

$$\left|\frac{z_{k,m}(s_n)-z_{k,m}(r_n)}{s_n-r_n}\right|\leqslant\left(\frac{1}{2c_k}+2c_k^2t\right)\frac{1}{2c_m}\leqslant\frac{1}{4c_mc_k}+\frac{c_kc_{n-1}t}{c_m}.$$

La somme de toutes ces expressions pour $k=1,2,\ldots,n-1$, $m=1,2,\ldots$ est, d'après (9) et (11), plus petite que

(15) $$\frac{1}{4}+2c_{n-1}^2t=\frac{1}{4}+2c_n^{2/3}t.$$

Si $k>n$, $m>0$, on a d'après (10)

$$\left|\frac{z_{k,m}(s_n)-z_{k,m}(r_n)}{s_n-r_n}\right|\leqslant\frac{2c_n^3}{3}\cdot\frac{1}{4c_kc_m}(s_n+r_n)<\frac{c_n^3(t+1)}{3c_kc_m}.$$

La somme de toutes ces expressions pour $k=n+1,\ n+2,\ldots$, $m=1,2,\ldots$, est, d'après (9) et (11), plus petite que

(16) $$\frac{2}{3}\,\frac{c_n^3}{c_{n+1}}(t+1)=\frac{2}{3}(t+1).$$

De (15), (16), on conclut immédiatement que

(17) $$\left|\frac{z(s_n)-z(r_n)}{s_n-r_n}-\frac{z_{n,n}(s_n)-z_{n,n}(r_n)}{s_n-r_n}\right|<\frac{1}{2}+4c_n^{2/3}t+\frac{4}{3}(t+1)<\frac{1}{36}c_nt,$$

si n est assez grand; et l'on a, évidemment, la même relation avec v_n, w_n au lieu de r_n, s_n. Mais (14) et (17) donnent

$$\frac{z(s_n)-z(r_n)}{s_n-r_n}<-\frac{1}{36}c_nt\to-\infty\qquad\text{pour } n\to\infty,$$

et d'une manière analoque

$$\frac{z(w_n)-z(v_n)}{w_n-v_n}>\frac{1}{36}c_nt\to+\infty\qquad\text{pour } n\to\infty.$$

L'application du Lemme 3 achève la démonstration du Théorème 1.

2. Je vais donner encore un autre théorème de ce genre. Pour simplifier, je pose dans la suite $I=\langle 0,1\rangle$, $C(I)=C$. Nous introduisons dans C la métrique habituelle:

$$\varrho(x_1,x_2)=\operatorname*{Max}_{0\leqslant t\leqslant 1}|x_1(t)-x_2(t)|.$$

Le produit combinatoire $C^2=C\times C$ est l'ensemble de tous les couples $[x,y]$, où $x\epsilon C$, $y\epsilon C$. La métrique dans C^2 soit donnée par la formule

$$\varrho_2([x_1,x_2],[y_1,y_2])=\operatorname{Max}\big(\varrho(x_1,y_1),\varrho(x_2,y_2)\big).$$

Lemme 4. *Soit* $x_n \epsilon C$, $y_n \epsilon C$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$; *alors* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = xy$.

Démonstration. Pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, on a

$$\Big|\int_0^t \big(x_n(t-\tau)\,y_n(\tau) - x(t-\tau)\,y(\tau)\big)\,d\tau\Big|$$
$$\leqslant \int_0^t |x_n(t-\tau)|\,|y_n(\tau)-y(\tau)|\,d\tau + \int_0^t |y(\tau)|\,|x_n(t-\tau)-x(t-\tau)|\,d\tau$$
$$\leqslant \big(\varrho(x,0)+\varrho(x_n,x)\big)\,\varrho(y_n,y) + \varrho(y,0)\,\varrho(x_n,x),$$

et la dernière expression est indépendante de t et tend vers zéro.

Théorème 2. *Il existe un ensemble* $M \subset C^2$ *jouissant des propriétés suivantes:*

1° $C^2 - M$ *est un ensemble de première catégorie dans* C^2 (*donc* $M \neq 0$, *car* C^2 *est complet*);

2° *si* $x \epsilon M$, $y \epsilon M$, $xy = z$, *alors on a* (8) *pour chaque* t *de l'intervalle ouvert* $(0,1)$.

Démonstration. Pour chaque nombre entier $n > 0$, soit G_n l'ensemble de tous les points $[x,y] \epsilon C^2$ jouissant de la propriété suivante: à chaque $t \epsilon \langle 1/n, 1-1/n \rangle$ correspondent deux nombres r, s tels que l'on ait (en posant $z = xy$)

$$t - \frac{1}{n} \leqslant r \leqslant t \leqslant s \leqslant t + \frac{1}{n}, \qquad r < s, \qquad \frac{z(s)-z(r)}{s-r} > n. \tag{18}$$

Posons $M_1 = \prod\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ et soit M_2 l'ensemble de tous les points $[x,y]$ tels que $[-x,y] \epsilon M_1$. Soit $M = M_1 M_2$. D'après (18) et d'après le Lemme 3, il est évident que M possède la propriété 2°. Pour achever la démonstration du théorème 2, il suffit donc de démontrer les deux propositions suivantes:

I. G_n est ouvert, c'est-à-dire que $F_n = C^2 - G_n$ est fermé dans C^2.

II. G_n est dense dans C^2.

En effet, I et II entraînent que $C^2 - M_1$ est de première catégorie; on voit immédiatement qu'alors $C^2 - M_2$ est, lui aussi, de première catégorie; donc, il en est de même de l'ensemble

$$C^2 - M = (C^2 - M_1) + (C^2 - M_2).$$

Démonstration de I. Soit donné un nombre entier $n > 0$. Soit $[x_\nu, y_\nu] \epsilon F_n$ pour $\nu = 1, 2, \ldots$ et soit $\lim\limits_{\nu\to\infty} [x_\nu, y_\nu] = [x,y]$. Il faut démontrer que $[x,y] \epsilon F_n$.

Posons $x_\nu y_\nu = z_\nu$, $xy = z$. D'après la définition de G_n et de F_n, il existe, pour chaque ν, un nombre $t_\nu \epsilon \langle 1/n, 1-1/n \rangle$ jouissant de la propriété suivante: chaque couple de nombres r_ν, s_ν tel que l'on ait

$$t_\nu - \frac{1}{n} \leqslant r_\nu \leqslant t_\nu \leqslant s_\nu \leqslant t_\nu + \frac{1}{n}, \qquad r_\nu < s_\nu, \tag{19}$$

satisfait à l'inégalité

$$\frac{z_\nu(s_\nu) - z_\nu(r_\nu)}{s_\nu - r_\nu} \leqslant n. \tag{20}$$

En passant à une suite partielle, on peut supposer qu'il existe $\lim\limits_{\nu\to\infty} t_\nu = t$. On a $t \epsilon \langle 1/n, 1-1/n \rangle$. Prenons deux nombres r, s tels que

$$t - \frac{1}{n} \leqslant r \leqslant t \leqslant s \leqslant t + \frac{1}{n}, \quad r < s, \tag{21}$$

et définissons les nombres r_ν, s_ν par les équations $r_\nu - r = s_\nu - s = t_\nu - t$. On a donc (19), donc (20). Mais, en vertu du Lemme 4, on a (car $\lim r_\nu = r$, $\lim s_\nu = s$)

$$\frac{z(s)-z(r)}{s-r} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{z_\nu(s_\nu) - z_\nu(r_\nu)}{s_\nu - r_\nu} \leqslant n.$$

Ceci étant vrai pour chaque couple r, s satisfaisant aux conditions (21), on a $[x,y] \epsilon C^2 - G_n = F_n$.

Démonstration de II. Soit donné un nombre $n > 0$ entier. Soit $[\xi, \eta] \epsilon C^2$; soit $0 < \varepsilon < 1$. Il faut démontrer l'existence d'un point $[x,y] \epsilon G_n$ tel que $\varrho(x,\xi) < \varepsilon$, $\varrho(y,\eta) < \varepsilon$.

Il existe deux fonctions $\xi_1 \epsilon C$, $\eta_1 \epsilon C$ avec $\varrho(\xi,\xi_1) < \frac{1}{2}\varepsilon$, $\varrho(\eta,\eta_1) < \frac{1}{2}\varepsilon$, dont les diagrammes sont composés d'un nombre fini de segments de droites. Choisissons ξ_1, η_1 de cette façon. On peut alors choisir un nombre $A > 1$ tel que

$$\begin{gathered} |\xi_1(t)| \leqslant A, \quad |\eta_1(t)| \leqslant A, \quad |\xi_1(t) - \xi_1(u)| \leqslant A\,|t-u|, \\ |\eta_1(t) - \eta_1(u)| \leqslant A\,|t-u| \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1. \end{gathered} \tag{22}$$

Choisissons ensuite un nombre entier m tel que

$$\frac{m\varepsilon^2}{30n} - 4A^2 > n, \qquad \text{donc} \qquad m > 30n, \tag{23}$$

et posons $x=\xi_1+x_{m,\varepsilon}$, $y=\eta_1+x_{m,\varepsilon}$ (où $x_{m,\varepsilon}$ est la fonction du Lemme 2). On a $|x_{m,\varepsilon}(t)|\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon$, donc $\varrho(\xi,x)<\varepsilon$, $\varrho(\eta,y)<\varepsilon$. Il suffit donc de démontrer que $[x,y]\epsilon G_n$.

Posons $xy=z$, $\xi_1\eta_1=z_1$, $\xi_1 x_{m,\varepsilon}=z_2$, $\eta_1 x_{m,\varepsilon}=z_3$, $x_{m,\varepsilon}x_{m,\varepsilon}=z_4$, donc $z=z_1+z_2+z_3+z_4$. Si $0\leqslant t\leqslant 1$, $0\leqslant u\leqslant 1$, $t\neq u$, on a, d'après le Lemme 1,

$$\left|\sum_{i=1}^{3}\frac{z_i(t)-z_i(u)}{t-u}\right|\leqslant 2A\cdot A+2A\cdot\frac{1}{2}\varepsilon+2A\cdot\frac{1}{2}\varepsilon<4A^2. \tag{24}$$

Soit maintenant $1/n\leqslant t\leqslant 1-1/n$. Choisissons r, s comme il suit. Il existe un nombre entier k tel que

$$\frac{2k+1}{2m}\leqslant t<\frac{2k+3}{2m};$$

on a $k>0$, car $3/2m<1/n\leqslant t$; posons

$$r=\frac{2k+1}{2m},\qquad s=\frac{2k+6}{2m},$$

donc $0<\mathrm{Max}(s-t,t-r)\leqslant s-r=5/2m<1/n$, d'où $0<r\leqslant t<s<1$. Le Lemme 2 donne

$$\frac{z_4(s)-z_4(r)}{s-r}=\varepsilon^2\left(\frac{2k+6}{24m}+\frac{2k+1}{24m}\right)\cdot\frac{2m}{5}>\varepsilon^2\cdot\frac{t}{12}\cdot\frac{2m}{5}\geqslant\frac{m\varepsilon^2}{30n}. \tag{25}$$

Or, (24), (25), (23) donnent

$$\frac{z(s)-z(r)}{s-r}>\frac{m\varepsilon^2}{30n}-4A^2>n,$$

ce qui démontre que $[x,y]\epsilon G_n$.

(Reçu par la Rédaction le 2. 5. 1950).

On the ergodic theorems (I)

(Generalized ergodic theorems)

by

C. RYLL-NARDZEWSKI (Wrocław).

1. Introduction.

In this paper [1]) we understand by *space* a fixed abstract set X with a σ-finite σ-measure μ defined in a σ-field M of subsets of X. By *sets* we always understand sets belonging to M. The letter φ will be used for a transformation of X into itself and we shall assume $\varphi^{-1}E\epsilon M$ for $E\epsilon M$ and $\mu(\varphi^{-1}E)=0$ if $\mu(E)=0$. By *functions* we understand only the real-valued functions defined on X, and measurable with respect to M. The letters f and g, with indices if necessary, will always denote functions. The class of all f integrable with respect to μ will be denoted by $L(\mu)$. The symbol $\int$ always denotes the integral over the whole space. The symbol $[\mu]$ placed after an equality or an inequality means that it is fulfilled almost everywhere (with respect to μ).

The individual and mean ergodic theorems of Birkhoff and v. Neumann (generalized by F. Riesz [6]) state that if φ is measure-preserving (i.e. if $\mu(\varphi^{-1}E)=\mu(E)$), then

(B) for each $f\epsilon L(\mu)$ there is a $g\epsilon L(\mu)$ such that

$$\lim_n\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(\varphi^i(x))=g(x)\ [\mu],$$

and (if $\mu(X)<\infty$)

(N) for each $f\epsilon L(\mu)$ there is a $g\epsilon L(\mu)$ such that

$$\lim_n\int\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(\varphi^i(x))-g(x)\right|d\mu=0.$$

---

[1]) Presented to the Polish Mathematical Society, Wrocław Section, on March 10, 1950. Cf. [5].