and hence $N_\infty(F) \geqslant \varepsilon_0$. If now F is any nonzero element of H^∞, let $t = \|F\|_\infty$. Then

$$N_\infty\left(\frac{A_0}{t}F\right) = \frac{A_0}{t}N_\infty(F), \qquad \left\|\frac{A_0}{t}F\right\|_\infty = A_0.$$

Therefore

$$\frac{A_0}{t}N_\infty(F) \geqslant \varepsilon_0, \qquad \text{or} \qquad \|F\|_\infty \leqslant \frac{A_0}{\varepsilon_0}N_\infty(F).$$

Now take any $G \epsilon (H)'$. Then, taking $F = T_r G$, we have $F \epsilon H^\infty$, $\|F\|_\infty = \mathfrak{M}_\infty[G;r]$, $N_\infty(F) \leqslant N_\infty(G)$, and so

$$\mathfrak{M}_\infty[G;r] \leqslant \frac{A_0}{\varepsilon_0}N_\infty(G).$$

This implies $G \epsilon H^\infty$, which is a contradiction, by the falsity of $P_2(1)$.

The proof is now complete.

Bibliography.

[1] S. Banach, *Théorie des Opérations Linéaires*, Monografie Matematyczne, Warszawa, 1932.

[2] L. Bieberbach, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, New York, 1945.

[3] G. H. Hardy, *The mean value of the modulus of an analytic function*, Proceedings of the London Mathematical Society 14 (1914), p. 269-277.

[4] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge, 1934.

[5] J. E. Littlewood, *Lectures on the Theory of Functions*, Oxford, 1944.

[6] F. Riesz, *Über die Randwerte einer analytischen Funktion*, Mathematische Zeitschrift 18 (1923), p. 87-95.

[7] F. and M. Riesz, *Über die Randwerte einer analytischen Funktion*, Quatrième Congrès des Mathématiciens Scandinaves à Stockholm (1916).

[8] M. Riesz, *Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionelles linéaires*, Acta Mathematica 49 (1926), p. 465-497.

[9] M. Riesz, *Sur les fonctions conjuguées*, Mathematische Zeitschrift 27 (1928), p. 218-244.

[10] P. Stein, *On a theorem of M. Riesz*, Journal of the London Mathematical Society 8 (1933), p. 242-247.

[11] A. E. Taylor, *New proofs of some theorems of Hardy by Banach space methods*, The Mathematics Magazine 23 (1950), p. 115-124.

[12] A. Zygmund, *Trigonometrical Series*, Monografie Matematyczne, Warszawa 1935.

(Reçu par la Rédaction le 21. 9. 1949).

Sur le produit de composition

par

J. G.-MIKUSIŃSKI (Wrocław) et Cz. RYLL-NARDZEWSKI (Wrocław).

Le but de cet article est de systématiser et de compléter certains théorèmes sur le produit de composition

$$ab = \int_0^t a(t-\tau)b(\tau)\,d\tau.$$

1. Théorèmes fondamentaux.

Théorème 1. *Si les fonctions a et b sont définies presque partout et sommables dans l'intervalle $[0,T]$, il en est de même de leur produit de composition et l'on a*

$$ab = ba$$

dans tout point de $[0,T]$ où la valeur de ab (ou de ba) est déterminée.

Théorème 2. *Si les fonctions a, b et c sont définies presque partout et sommables dans $[0,T]$, on a*

$$(ab)c = a(bc)$$

dans tout point de $[0,T]$ où la valeur de $(ab)c$ [ou de $a(bc)$] est déterminée [1]).

Il faut remarquer que, dans les deux théorèmes, l'égalité des fonctions est à entendre au sens stricte, ce qui est plus fort que l'égalité à mesure nulle près [1]).

[1]) Pour la démonstration des théorèmes 1 et 2, voir par exemple J. G.-Mikusiński, *L'anneau algébrique et ses applications dans l'analyse fonctionnelle I*, Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Lublin 1947, p. 9-11.

2. Théorèmes sur la continuité.

Le produit de composition de deux fonctions sommables est discontinu en général; si, par exemple,

$$a=\begin{cases} 0 & \text{pour } 0\leqslant t\leqslant t_1,\\ (t-t_1)^{-3/4} & \text{pour } t_1<t,\end{cases} \qquad b=\begin{cases} 0 & \text{pour } 0\leqslant t\leqslant t_2,\\ (t-t_2)^{-3/4} & \text{pour } t_2<t,\end{cases}$$

alors

$$ab=\begin{cases} 0 & \text{pour } 0\leqslant t\leqslant t_1+t_2,\\ \beta(t-t_1-t_2)^{-1/2} & \text{pour } t_1+t_2<t,\end{cases}$$

où $\beta=B(1/4,1/4)$ (fonction *Beta* d'Euler). Par condensation des singularités, on peut aisément construire des fonctions sommables dont le produit de composition est partout discontinu.

Théorème 3. *Si les fonctions a et b sont sommables dans l'intervalle $[0,T]$ et leur produit de composition est discontinu au point t_0 $(0<t_0\leqslant T)$, alors il existe deux points $t_1\geqslant 0$ et $t_2\geqslant 0$ tels que $t_1+t_2=t_0$, que la fonction a n'est pas bornée au voisinage de t_1 et que, en même temps, la fonction b n'est pas bornée au voisinage de t_2.*

Démonstration. Admettons le contraire. Alors, en vertu du théorème de Borel et Lebesgue, on peut couvrir l'intervalle $[0,t_0]$ par un nombre fini d'intervalles ouverts Δ tels que, dans chacun de ces intervalles, l'un au moins des facteurs du produit $a(t_0-t)b(t)$ est borné. Il existe donc n points

$$u_0<u_1<\ldots<u_{n-1}<u_n \qquad (u_0=0,\quad u_n=t_0)$$

tels que tout intervalle

$$u_{i-1}\leqslant t\leqslant u_i \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

est contenu dans l'un des intervalles Δ. En écrivant le produit de composition ab comme une somme

$$c=ab=\sum_{i=1}^{n}\int_{u_{i-1}}^{u_i}a(t-\tau)b(\tau)\,d\tau+\int_{t_0}^{t}a(t-\tau)b(\tau)\,d\tau,$$

on a

$$c(t_0+\theta)-c(t_0)$$

$$(1)\quad =\sum_{i=1}^{n}\int_{u_{i-1}}^{u_i}[a(t_0+\theta-\tau)-a(t_0-\tau)]b(\tau)\,d\tau+\int_{t_0}^{t_0+\theta}a(t_0+\theta-\tau)b(\tau)\,d\tau.$$

Il suffit de démontrer que chacun des termes du second membre de (1) tend vers zéro avec $\theta\to 0$.

Lorsque θ est assez petit, l'un au moins des facteurs dans la dernière intégrale de (1) est borné; l'autre facteur étant sommable, l'intégrale s'annule pour $\theta\to 0$. Considérons maintenant l'intégrale

$$(2)\qquad \int_{u_{i-1}}^{u_i}[a(t_0+\theta-\tau)-a(t_0-\tau)]b(\tau)\,d\tau.$$

Si le facteur $b(\tau)$ est borné, soit par M, intégrale (2) est absolument inférieure à

$$M\int_{u_{i-1}}^{u_i}|a(t_0+\theta-\tau)-a(t_0-\tau)|\,d\tau,$$

et, par conséquent, s'annule pour $\theta\to 0$. Dans le cas contraire on écrira l'intégrale (2) dans la forme de somme

$$\int_{u_{i-1}}^{u_{i-1}+\theta}a(t_0+\theta-\tau)b(\tau)\,d\tau-\int_{u_i}^{u_i+\theta}a(t_0+\theta-\tau)b(\tau)\,d\tau$$

$$(3)\qquad +\int_{u_{i-1}}^{u_i}a(t_0-\tau)[b(\tau+\theta)-b(\tau)]\,d\tau\,;$$

les premiers facteurs sous les signes intégrales étant, pour θ assez petit, bornés dans les intervalles d'intégration, on conclut, pareillement que tout à l'heure, que chacune des intégrales (3) s'annule pour $\theta\to 0$.

Or, il faut remarquer que l'intégrale (2) ne peut pas être représentée dans la forme (3), si $i=1$ et $\theta<0$; en effet, la limite $u_{i-1}+\theta$ dans la première des intégrales (3) est alors négative et la fonction à intégrer est indéterminée dans l'intervalle d'intégration. Dans ce cas, on représente l'intégrale (2) dans la forme d'une somme

$$-\int_{0}^{-\theta}a(t_0-\tau)b(\tau)\,d\tau+\int_{u_1}^{u_1-\theta}a(t_0-\tau)b(\tau)\,d\tau$$

$$-\int_{0}^{u_1}a(t_0+\theta-\tau)[b(\tau-\theta)-b(\tau)]\,d\tau,$$

dont chacun terme s'annule pour $\theta\to 0$.

On arrive ainsi à la conclusion que le produit de composition est continu au point t_0, ce qui prouve, par contradiction, le théorème 3.

Corollaire 1. *Si les fonctions a et b sont sommables dans l'intervalle $[0, T]$ et si l'une quelconque d'elles est bornée, alors leur produit de composition est continu dans cet intervalle.*

Corollaire 2. *Si les fonctions a et b sont sommables dans l'intervalle $[0, T]$ et continues sauf*

(α) *un nombre fini de points,*

(β) *un ensemble dénombrable de points,*

alors il en est de même de leur produit de composition.

Théorème 4. *Si la fonction a est p-sommable ($p>1$) et si la fonction b est q-sommable ($q>1$) dans $[0, T]$, où $1/p+1/q=1$, alors leur produit de composition ab est continu dans $[0, T]$.*

Démonstration. Posons $c=ab$. En vertu de l'inégalité de Hölder on a

$$|c(t+\theta)-c(t)| \leqslant \left(\int_0^t |a(\tau+\theta)-a(\tau)|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^t |b(\tau)|^q d\tau\right)^{\frac{1}{q}} + \left|\int_{t-\theta}^t |a(t-\tau)|^p d\tau\right|^{\frac{1}{p}} \left|\int_t^{t+\theta} |b(\tau)|^q d\tau\right|^{\frac{1}{q}},$$

d'où le théorème.

Remarques. 1° Le corollaire 1 peut être considéré comme un cas limite du théorème 4: $p=1$, $q=\infty$. 2° On peut généraliser le théorème 4 d'une manière analogue à celle du théorème 3 qui généralise le corollaire 1.

3. Théorèmes sur la continuité absolue.

Nous donnerons maintenant certaines conditions suffisantes pour la continuité absolue du produit de composition. Ces conditions seront énoncées d'une façon non symétrique, mais, grâce à la commutativité du produit de composition, les rôles des fonctions a et b peuvent être inversés dans chacun des théorèmes.

Théorème 5. *Si a est à variation bornée et si b est continue dans $[0, T]$, le produit de composition ab est absolument continu dans $[0, T]$ et sa dérivée s'exprime par la formule*

$$\int_0^t a(t-\tau)\, db(\tau) + b(0)\, a(t).$$

Démonstration. Il suffit de prouver que

$$\int_0^t a(t-\tau)\, b(\tau)\, d\tau = \int_0^t du \int_0^u a(u-\tau)\, db(\tau) + b(0) \int_0^t a(\tau)\, d\tau. \tag{4}$$

Cette identité s'obtient aisément dans le cas où b est absolument continue, car on a alors

$$\int_0^t du \int_0^u a(u-\tau)\, db(\tau) = \int_0^t du \int_0^u a(u-\tau)\, b'(\tau)\, d\tau = \int_0^t a(t-\tau)\, d\tau \int_0^\tau b'(u)\, du$$
$$= \int_0^t a(t-\tau)\, b(\tau)\, d\tau - b(0) \int_0^t a(\tau)\, d\tau.$$

Lorsque b est continue, mais non absolument continue, il existe une suite b_n de fonctions absolument continues qui converge uniformément vers b et l'on parvient à (4) en faisant tendre n vers ∞.

Théorème 6. *Si a est sommable et si b est absolument continue dans $[0, T]$, leur produit de composition ab est absolument continu et sa dérivée s'exprime par la formule*

$$\int_0^t a(t-\tau)\, b'(\tau)\, d\tau + b(0)\, a(t). \tag{5}$$

Démonstration. Le théorème résulte de l'identité

$$\int_0^t du \int_0^u a(u-\tau)\, b'(\tau)\, d\tau = \int_0^t a(t-\tau)\, b(\tau)\, d\tau - b(0) \int_0^t a(\tau)\, d\tau,$$

qui s'obtient de la même manière que dans la démonstration du théorème 5.

Théorème 7. *Si a est à variation bornée et si b est absolument continue dans $[0, T]$, le produit de composition ab est absolument continu dans $[0, T]$; sa dérivée existe partout, sauf sur un ensemble dénombrable au plus, et s'exprime par la formule* (5).

La démonstration est évidente.

4. Théorèmes sur la dérivabilité continue.

En appliquant la même méthode de démonstration, on parvient aisément aux théorèmes suivants:

Théorème 8. *Si a est continue et si b est absolument continue dans $[0, T]$, leur produit de composition est continûment dérivable dans $[0, T]$ et sa dérivée s'exprime par la formule* (5).

Théorème 9. *Si a est bornée, si b est absolument continue dans $[0,T]$ et si $b(0)=0$, le produit de composition ab est continûment dérivable dans $[0,T]$; sa dérivée s'exprime par l'intégrale*

$$\int_0^t a(t-\tau)b'(\tau)d\tau. \tag{6}$$

Théorème 10. *Si a est sommable, si b satisfait à la condition de Lipschitz dans $[0,T]$ et si $b(0)=0$, le produit de composition ab est continûment dérivable dans $[0,T]$ et sa dérivée s'exprime par l'intégrale* (6).

Théorème 11. *Si a est m fois continûment dérivable dans $[0,T]$ et possède, au point $t=0$, un zéro d'ordre p $(p<m)$ et si b est n fois dérivable dans $[0,T]$ et possède, au point $t=0$, un zéro d'ordre q $(q<n)$, alors le produit de composition ab est r fois continûment dérivable dans $[0,T]$, où r est le moindre des nombres*

$$m+n, \qquad m+q+1, \qquad n+p+1.$$

Corollaire. *Si a et b sont indéfiniment dérivables dans $[0,T]$, il en est de même de leur produit de composition.*

Théorème 12. *Si a est indéfiniment dérivable dans $[0,T]$ et $a^{(i)}(0)=0$ $(i=0,1,2,\ldots)$ et si b est sommable, le produit de composition $c=ab$ est indéfiniment dérivable dans $[0,T]$ et $c^{(i)}(0)=0$ $(i=0,1,2,\ldots)$.*

5. Tableau de certaines propriétés.

Introduisons, pour les classes de fonctions, les désignations suivantes:

L — sommables,
$L^{(p)}$ — p-sommables,
B — bornées,
VB — à variation bornée,
C — continues,
AC — absolument continues,
Lipsch. — satisfaisant à la condition de Lipschitz,
C_n — n fois continûment dérivables,
C_∞ — indéfiniment dérivables.

Cela posé, certains des résultats précédents peuvent être mis en tableau suivant:

Fonction a	Fonction b	Produit de comp. $c=ab$
L	L	L
B	L	C
$L^{(p)}$ $1/p+1/q=1$	$L^{(q)}$	C
C	VB	AC
AC	L	AC
AC	VB	AC non dérivable sur un ensemble dénombrable au plus
AC	C	C_1
AC $a(0)=0$	B	C_1
Lipsch. $a(0)=0$	L	C_1
C_m $a^{(i)}(0)=0$, $i=0,1,\ldots,p-1$	C_n $b^{(i)}(0)=0$, $i=0,1,\ldots,q-1$	C_r $r=\min(m+n,\ m+q+1,\ n+p+1)$
C_∞	C_∞	C_∞
C_∞ $a^{(i)}(0)=0$, $i=0,1,2,\ldots$	L	C_∞ $c^{(i)}(0)=0$, $i=0,1,2,\ldots$

(Reçu par la Rédaction le 2. 5. 1950).