Lévy évalue, au lieu de (6), une somme double, à savoir $\sum_r \sum_s s^0/r^{1+\alpha}$, étendue à tous les nombres naturels s, r, où $s<r$, $(s,r)=1$. Elle est égale à (6), parce que, pour tout couple (s,r), il existe une valeur de n et une seule, donnant $s=q_{n-1}(x)$, $r=q_n(x)$ pour un $x\in(0,1)$. La divergence de (6) pour $\alpha=1$ est facile à démontrer, elle est d'ailleurs une conséquence immédiate du résultat précité de Lévy.

(Reçu par la Rédaction le 28. 11. 1950).

Sur le mouvement plan du liquide visqueux, incompressible, entourant une courbe simple fermée

par

W. WOLIBNER (Wrocław).

J'envisage dans ce travail le *mouvement plan du liquide visqueux, incompressible, remplissant tout le plan à l'extérieur d'une courbe fermée C qui, sans se déformer, se déplace parallèlement à une droite, avec une vitesse égale à* 1[1]. J'admets, pour simplifier, que la courbe C possède partout une tangente continue. Soit XY un système de coordonnées lié à la courbe C, l'axe X étant parallèle à la vitesse de C; soient u et v les composantes de la vitesse du liquide par rapport au système immobile $\bar{X}\bar{Y}$, coïncidant en ce moment avec le système XY; soient p et R la pression réduite et le nombre de Reynolds. J'admets que *les forces extérieures n'existent pas*. Ainsi seront satisfaites les équations suivantes:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(u-1)\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{R}\Delta u \qquad \left(\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(u-1)\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{R}\Delta v, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

---

[1]) Cf. P. Udeschini, *Incompatibilità dell'adesione completa al contorno con la regolarità e le condizioni asintotiche euleriane per correnti viscose stazionari,* Atti Accad. Italia, Rend. Cl. sci. fis. mat. natur. (7) 2, p. 957-963. P. Udeschini a démontré qu'il n'existe pas de mouvement permanent du liquide visqueux, compressible, entourant un corps solide et y adhérant, qui serait régulier à l'intérieur du liquide et qu'à l'infini serait satisfaite la condition

$$\lim_{\varrho\to\infty} r^2(v-v_\infty)=0.$$

En admettant que *le liquide adhère à la courbe C*, on aura sur cette courbe

$$u=1, \qquad v=0. \tag{2}$$

J'admets que *l'énergie cinétique du mouvement E soit finie,*

$$E=\frac{1}{2}\iint (u^2+v^2)\,d\sigma, \tag{3}$$

l'intégration étant étendue à tout le plan à l'extérieur de la courbe C. J'admets en plus, pour simplifier, que toutes les dérivées de u, v et p qui apparaissent dans les équations (1) soient partout continues [2]).

Je vais démontrer *qu'il existe deux suites infiniment croissantes* $\{r_n\}$ et $\{r'_n\}$ telles que

$$P_x=-\lim_{n\to\infty}\left[\iint_{H_{r_n}}\frac{\partial u}{\partial t}\,d\sigma+r_n^2\int_0^{2\pi}\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}\sin\varphi\, d\varphi\right], \tag{4}$$

$$P_y=-\lim_{n\to\infty}\left[\iint_{H_{r'_n}}\frac{\partial v}{\partial t}\,d\sigma-r_n'^2\int_0^{2\pi}\frac{\partial u_\varphi}{dt}\cos\varphi\, d\varphi\right], \tag{5}$$

r et φ désignant les coordonnées polaires par rapport au système XY, u_r et u_φ les composantes radiale et transversale de la vitesse du liquide par rapport au système immobile $\overline{X}\overline{Y}$, et H_r la région contenue entre la courbe C et le cercle K_r à rayon r et dont le centre est l'origine des coordonnées.

Les composantes P_x et P_y de la force exercée par le liquide sur la courbe C s'expriment comme suit:

$$P_x=\int_C p n_x\, dl-\frac{1}{R}\int_C\frac{\partial u}{\partial n}\,dl, \tag{6}$$

$$P_y=\int_C p n_y\, dl-\frac{1}{R}\int_C\frac{\partial v}{\partial n}\,dl, \tag{7}$$

n_x et n_y désignant les cosinus directeurs de la normale intérieure.

---

[2]) Les conditions concernant la courbe C et les fonctions u, v, p peuvent être affaiblies pourvu que subsistent les formules (6), (7), (8) et une formule analogue à (8), nécessaire pour démontrer la formule (5).

Il suffit de démontrer la formule (4), la démonstration de (5) étant complètement analogue. En intégrant la première équation de (1) sur H_r, puis tenant compte de la troisième de (1) et de (2), on obtient

$$\begin{aligned}\iint_{H_r}\frac{\partial u}{\partial t}\,d\sigma&=\int_{K_r} u[(u-1)n_x+vn_y]\,dl\\&+\int_{K_r} p n_x\, dl-\int_C p n_x\, dl-\frac{1}{R}\int_{K_r}\frac{\partial u}{\partial n}\,dl+\frac{1}{R}\int_C\frac{\partial u}{\partial n}\,dl.\end{aligned} \tag{8}$$

Quand on introduit les coordonnées polaires, la formule (8), en vertu de (6) et de l'identité

$$\int_{K_r} p n_x\, dl=r\int_0^{2\pi}\frac{\partial p}{\partial\varphi}\sin\varphi\, d\varphi,$$

prend la forme

$$\begin{aligned}\iint_{H_r}\frac{\partial u}{\partial t}\,d\sigma+P_x&=-r\int_0^{2\pi}(u_r\cos\varphi-u_\varphi\sin\varphi)\,(u_r-\cos\varphi)\,d\varphi\\&+\frac{r}{R}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\sin\varphi\right)d\varphi+r\int_0^{2\pi}\frac{\partial p}{\partial\varphi}\sin\varphi\, d\varphi.\end{aligned} \tag{9}$$

En transformant (1), nous obtenons trois équations, dont deux ont la forme suivante:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}+\frac{u_\varphi u_r}{r}+u_\varphi\frac{\partial u_\varphi}{r\partial\varphi}-\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\cos\varphi+\frac{\partial u_\varphi}{r\partial\varphi}\sin\varphi+\frac{u_r}{r}\sin\varphi\\&=-\frac{\partial p}{r\partial\varphi}+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\varphi^2}-\frac{u_\varphi}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}\right),\end{aligned} \tag{10}$$

$$\frac{\partial(ru_r)}{\partial r}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}=0. \tag{11}$$

En tenant compte de (11), on obtient

$$r^2u_r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}+ru_\varphi u_r=\frac{\partial(r^2u_ru_\varphi)}{\partial r}+ru_\varphi\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}. \tag{12}$$

En vertu de (12) l'équation (10) prend donc la forme

$$
\begin{aligned}
r\frac{\partial p}{\partial\varphi} = {} & -r^2\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} - \frac{\partial(r^2u_ru_\varphi)}{\partial r} - 2ru_\varphi\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} \\
& + r^2\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\cos\varphi - r\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\sin\varphi - ru_r\sin\varphi \\
& + \frac{1}{R}\left(r^2\frac{\partial^2u_\varphi}{\partial r^2} + r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2u_\varphi}{\partial\varphi^2} - u_\varphi + 2\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}\right).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

En exprimant $r\frac{\partial p}{\partial\varphi}$ dans (9) à l'aide de (13) et tenant compte des identités

$$
\begin{aligned}
2\int_0^{2\pi} u_\varphi\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\sin\varphi\,d\varphi &= -\int_0^{2\pi} u_\varphi^2\cos\varphi\,d\varphi, \\
\int_0^{2\pi}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\sin^2\varphi\,d\varphi &= -2\int_0^{2\pi} u_\varphi\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi, \\
\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2u_\varphi}{\partial\varphi^2}\sin\varphi\,d\varphi &= -\int_0^{2\pi} u_\varphi\sin\varphi\,d\varphi, \\
\int_0^{2\pi}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}\sin\varphi\,d\varphi &= -\int_0^{2\pi} u_r\cos\varphi\,d\varphi,
\end{aligned}
$$

on obtient

$$F(r) = A(r) + B(r) + C(r), \tag{14}$$

où l'on a posé pour abréger

$$F(r) = \iint\limits_{H_r}\frac{\partial u}{\partial t}\,d\sigma + P_x + r^2\int_0^{2\pi}\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}\sin\varphi\,d\varphi, \tag{15}$$

$$
\begin{aligned}
A(r) = \int_0^{2\pi} \Big[& -r(u_r\cos\varphi - u_\varphi\sin\varphi)(u_r - \cos\varphi) + ru_\varphi^2\cos\varphi \\
& + 2ru_\varphi\sin\varphi\cos\varphi - ru_r\sin^2\varphi - \frac{2}{R}(u_\varphi\sin\varphi + u_r\cos\varphi)\Big]\,d\varphi,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

$$B(r) = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r}{R}\frac{\partial u_r}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial(r^2u_ru_\varphi)}{\partial r}\sin\varphi + r^2\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\cos\varphi\sin\varphi\right]d\varphi, \tag{17}$$

$$C(r) = \frac{1}{R}\int_0^{2\pi} r^2\frac{\partial^2u_\varphi}{\partial r^2}\sin\varphi\,d\varphi. \tag{18}$$

Pour démontrer la formule (4), il suffit, en vertu de (15), de démontrer qu'il existe une suite $\{r_n\}$ infiniment croissante, telle que

$$\lim_{n\to\infty} F(r_n) = 0.$$

Dans ce but, je vais démontrer que

$$\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}\int_a^{2a} A(r)\,dr = 0, \tag{19}$$

$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\beta^2}\int_\beta^{2\beta}\int_a^{2a} B(r)\,dr\,da = 0, \tag{20}$$

$$\lim_{\gamma\to\infty}\frac{1}{\gamma^2}\int_\gamma^{2\gamma}\int_\beta^{2\beta}\int_a^{2a} C(r)\,dr\,da\,d\beta = 0. \tag{21}$$

En effet, en tenant compte de (3), on obtient

$$
\begin{aligned}
&\lim_{a\to\infty}\int_0^{2\pi}\int_a^{2a} u_r^2\,r\,dr\,d\varphi = 0, \\
&\lim_{a\to\infty}\int_0^{2\pi}\int_a^{2a} u_\varphi^2\,r\,dr\,d\varphi = 0,
\end{aligned}
\tag{22}
$$

et, en vertu de l'inégalité de Schwarz,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{a\to\infty}\int_0^{2\pi}\int_a^{2a} |u_ru_\varphi|\,r\,dr\,d\varphi = 0, \\
&\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\int_a^{2a} |u_r|\,r\,dr\,d\varphi = 0, \\
&\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\int_a^{2a} |u_\varphi|\,r\,dr\,d\varphi = 0.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Or, des formules (16), (17), (18), (22) et (23) résultent (19), (20), (21), et, en vertu de (14),

$$\lim_{\gamma\to\infty}\frac{1}{\gamma^3}\int_\gamma^{2\gamma}\int_\beta^{2\beta}\int_a^{2a} F(r)\,dr\,da\,d\beta = 0. \tag{24}$$

En désignant par $m(\gamma)$ le minimum de $|F(r)|$ quand $\gamma\leqslant r\leqslant 8\gamma$, on aura

$$\frac{7}{2}m(\gamma)\gamma^3 \leqslant \left|\int_\gamma^{2\gamma}\int_\beta^{2\beta}\int_a^{2a} F(r)\,dr\,da\,d\beta\right|,$$

d'où, en vertu de (24), il résulte qu'il existe une suite infiniment croissante $\{r_n\}$, telle que

$$\lim_{n\to\infty} m(r_n)=0,$$

d'où (4).

Si l'on admet, outre l'hypothèse de l'énergie cinétique finie, que u_r et p soient bornés [3]*), on obtient la formule* [4])

$$P_x=-\lim_{n\to\infty}\left(D_{r''_n}+\frac{\partial E_{r''_n}}{\partial t}\right), \tag{25}$$

où $\{r''_n\}$ désigne une suite infiniment croissante, et

$$D_r=\frac{1}{R}\iint_H\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]d\sigma \text{ [5])}, \tag{26}$$

$$E_r=\frac{1}{2}\iint_{H_r}(u^2+v^2)\,d\sigma. \tag{27}$$

En effet, en multipliant la première équation (1) par u, la seconde par v, en les ajoutant et en intégrant la somme sur H_r, on tire, en vertu de la troisième équation de (1), de (2) et (6)

$$\begin{aligned} P_x+D_r+\frac{\partial E_r}{\partial t} &= -\frac{r}{2}\int_0^{2\pi}(u_r^2+u_\varphi^2)\,(u_r-\cos\varphi)\,d\varphi \\ &\quad +\frac{r}{2R}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}(u_r^2+u_\varphi^2)\,d\varphi-r\int_0^{2\pi}pu_r\,d\varphi. \end{aligned} \tag{28}$$

Puisque u_r et p sont bornés, on déduit de (22) et (23)

$$\lim_{a\to\infty}\int_a^{2a}r\int_0^{2\pi}(u_r^2+u_\varphi^2)\,(u_r-\cos\varphi)\,d\varphi\,dr=0, \tag{29}$$

[3]) La condition que u_r soit borné peut être évidemment remplacée par celle que u_r soit borné pour les grandes valeurs de r.

[4]) La formule (25) exprime évidemment la puissance de la force extérieure exercée sur la courbe C, avec le signe contraire, car, sur C, on a $u=1$.

[5]) En intégrant par parties, on aperçoit facilement que la dissipation de l'énergie du mouvement dans H_r est égale à D_r lorsque le liquide est incompressible et adhère à tout le bord de H_r (voir, à propos de la dissipation, H. Lamb, *Lehrbuch der Hydrodynamik*, Leipzig-Berlin 1931, p. 655, formule (7) et (8)).

$$\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}\int_a^{2a}r\int_0^{2\pi}pu_r\,d\varphi\,dr=0. \tag{30}$$

Puisque

$$\begin{aligned} &\int_a^{2a}r\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}(u_r^2+u_\varphi^2)\,d\varphi\,dr \\ &=\int_0^{2\pi}\Big\{2a[u_r^2(2a,\varphi)+u_\varphi^2(2a,\varphi)]-a[u_r^2(a,\varphi)+u_\varphi^2(a,\varphi)] \\ &\qquad -\int_a^{2a}(u_r^2+u_\varphi^2)\,dr\Big\}\,d\varphi, \end{aligned}$$

donc, en vertu de (22),

$$\lim_{\beta\to\infty}\int_\beta^{2\beta}\int_a^{2a}r\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}(u_r^2+u_\varphi^2)\,d\varphi\,dr\,da=0. \tag{31}$$

Il résulte donc des formules (28), (29), (30) et (31)

$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\beta^2}\int_\beta^{2\beta}\int_a^{2a}\left(P_x+D_r+\frac{\partial E_r}{\partial t}\right)dr\,da=0, \tag{32}$$

d'où la formule (25).

Il résulte des formules (4) et (5) que *le mouvement du liquide à énergie cinétique finie, permanent par rapport au système XY, n'exerce aucune force sur la courbe C*, car alors $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial v}{\partial t}=\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial t}=0$.

Un tel mouvement ne peut pas exister quand v_r et p sont bornés; en effet, en vertu de (25) et (26), toutes les dérivées de u et v par rapport à x et y s'annuleraient identiquement et on aurait $u=1$, $v=0$, contrairement à l'hypothèse de l'énergie cinétique finie.

(Reçu par la Rédaction le 16. 11. 1949).