C'est l'unique solution de (67) satisfaisant aux conditions demandées.

22. Remarques.

En terminant cet article, remarquons encore que la méthode ici exposée peut être aisément étendue à d'autres problèmes sur les équations aux dérivées partielles (aux coefficients constants). On peut par exemple discuter les conditions initiales discontinues ou bien les conditions imposées sur trois (ou plus) droites du plan des λ et t. Or, l'étude systématique de ces problèmes exigera un nouvel article. Ici, nous nous sommes bornés à l'étude des conditions de Cauchy et des conditions plus générales de type analogue à (37) et (38).

PAŃSTWOWY INSTYTUT MATEMATYCZNY
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ÉTAT

(Reçu par la Rédaction le 18. 1. 1951).

Quelques propriétés ergodiques des fractions continues

par

S. HARTMAN (Wrocław).

1. Le but de cette note est d'ajouter quelques résultats nouveaux aux théorèmes concernant les développements des nombres irrationnels en fractions continues; ces résultats se laissent déduire de la théorie ergodique des fractions continues, établie par C. RYLL-NARDZEWSKI [1]).

Soit $\big(c_1(x), c_2(x), \ldots\big)$ le développement en fraction continue régulière d'un nombre irrationnel x de l'intervalle (0,1). Désignons par $\delta(x)$ la transformation (introduite par E. MARCZEWSKI) qui fait correspondre à x le nombre $\big(c_2(x), c_3(x), \ldots\big)$ [2]).

Envisageons les suites

$$A_n(x) = \frac{c_1(x)+c_2(x)+\ldots+c_n(x)}{n} \quad \text{et} \quad B_n(x) = \sqrt[n]{c_1(x)\cdot c_2(x)\cdot\ldots\cdot c_n(x)}.$$

KHINTCHINE [3]) a démontré que, pour presque tout x (c'est-à-dire à l'exception d'un ensemble de mesure lebesguienne nulle), on a

$$\lim_n B_n(x) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{\frac{\log n}{\log 2}}.$$

Un résultat analogue concernant la suite $A_n(x)$ a manqué jusqu'à présent. Il a été démontré seulement que

---

[1]) C. Ryll-Nardzewski, *On the ergodic theorems (II) (Ergodic Theory of continued fractions)*, Studia Mathematica 12 (1951), p. 74-79.

[2]) Cf. S. Hartman, E. Marczewski et C. Ryll-Nardzewski, *Théorèmes ergodiques et leurs applications*, Colloquium Mathematicum II. 2 (1950), p. 109-123, surtout p. 117.

[3]) A. Khintchine, *Metrische Kettenbruchprobleme*, Compositio Mathematica 1 (1935), p. 359-382, surtout p. 376.

1° pour presque tout x, on a $\overline{\lim_n} A_n(x)=\infty$, ce qui est une conséquence de la relation $\overline{\lim_n}\, c_n(x)/n=\infty$ valable pour presque tout x [4]),

2° $\lim_n \mathrm{as}\, \dfrac{A_n(x)}{\log n}=\dfrac{1}{\log 2}$ [5]),

3° pour toute fonction croissante $\psi(n)$, telle que $\psi(n)<n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\psi(n)}<\infty$, on a, pour presque tout x,

$$A_n(x)=O\big(\psi(\log n)\big) \text{ [6]}).$$

Le résultat 1° peut être amélioré à l'aide du théorème suivant de Ryll-Nardzewski [7]):

En posant $G_n(f,x)=n^{-1}[f(x)+f(\delta(x))+\ldots+f(\delta^{n-1}(x))]$, *on a*

$$\lim_n G_n(f,x)=\frac{1}{\log 2}\int_0^1\frac{f(x)}{1+x}dx$$

pour toute fonction réelle $f(x)$ *intégrable* (L) *dans* $(0,1)$ *et pour tout* x *à l'exception d'un ensemble* $E(f)$ *de mesure* 0.

2. Lemme. *Si* $f(x)$ *est une fonction mesurable non négative et non intégrable* (L), *on a*

$$\lim_n G_n(f,x)=\infty \tag{1}$$

pour presque tout x.

Démonstration. Posons

$$f_N(x)=\begin{cases} f(x), & \text{si } f(x)\leqslant N,\\ N, & \text{si } f(x)>N.\end{cases}$$

On a évidemment, pour tout N et pour tout x,

$$\underline{\lim_n}\, G_n(f,x)\geqslant \underline{\lim_n}\, G_n(f_N,x);$$

[4]) F. Bernstein, *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf ein aus der Theorie der säkulären Störungen herrührendes Problem*, Mathematische Annalen 71 (1912), p. 417-439.

[5]) A. Khintchine, loc. cit. [3]), p. 377.

[6]) A. Khintchine, *Einige Sätze über Kettenbrüche mit Anwendungen auf die Theorie der diophantischen Approximationen*, Mathematische Annalen 92 (1924), p. 115-125.

[7]) C. Ryll-Nardzewski, loc. cit. [1]).

donc, en vertu du théorème de Ryll-Nardzewski, il vient, pour $x\in\prod_{N=1}^{\infty}E(f_N)$,

$$\underline{\lim_n}\, G_n(f,x)\geqslant\frac{1}{\log 2}\int_0^1\frac{f_N(x)}{1+x}dx \qquad (N=1,2,\ldots),$$

d'où l'on déduit (1), vu la relation $\int_0^1\dfrac{f_N(x)}{1+x}dx\to\infty$.

Théorème I. *Pour presque tout* x *on a* $\lim_n A_n(x)=\infty$.

Démonstration. $[\alpha]$ désignant la partie entière de α, posons $f(x)=c_1(x)=[1/x]$. Puisque $f(x)$ satisfait à l'hypothèse du lemme, et $G_n(f,x)=A_n(x)$, on a (1) et le théorème I se trouve démontré [8]).

3. Examinons à présent les propriétés asymptotiques des quotients c_{n+1}/c_n et c_n/c_{n+1}.

Théorème II. *On a, pour presque tout* x,

$$\lim_n\frac{1}{n}\left(\frac{c_2(x)}{c_1(x)}+\frac{c_3(x)}{c_2(x)}+\ldots+\frac{c_{n+1}(x)}{c_n(x)}\right)$$
$$=\lim_n\frac{1}{n}\left(\frac{c_1(x)}{c_2(x)}+\frac{c_2(x)}{c_3(x)}+\ldots+\frac{c_n(x)}{c_{n+1}(x)}\right)=\infty.$$

Démonstration. Posons $\varphi(x)=c_2(x)/c_1(x)$, $\psi(x)=c_1(x)/c_2(x)$. Puisque

$$c_1(x)=\left[\frac{1}{x}\right] \qquad\text{et}\qquad c_2(x)=\left[\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)^{-1}\right],$$

on obtient

$$\varphi(x)=\left[\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)^{-1}\right]\left[\frac{1}{x}\right]^{-1} \qquad\text{et}\qquad \psi(x)=\left[\frac{1}{x}\right]\left[\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)^{-1}\right]^{-1}.$$

Nous allons montrer que ces deux fonctions sont non intégrables (L) dans $(0,1)$.

[8]) Le théorème I pourrait être démontré aussi à l'aide d'un théorème de Khintchine; voir A. Khintchine, loc. cit. [3]), p. 368.

On a $[1/x]=1$ dans l'intervalle $(1/2,1)$, donc

$$\int_{1/2}^{1}\varphi(x)\,dx=\int_{1/2}^{1}\left[\frac{x}{1-x}\right]dx>\int_{1/2}^{1}\left(\frac{x}{1-x}-1\right)dx=\infty.$$

Ainsi $\varphi(x)$ est non intégrable dans $(0,1)$.

Afin d'établir ceci pour $\psi(x)$, fixons un nombre a entre 0 et 1. Soit J_k l'intervalle $\big(1/(k+1),\,1/(k+a)\big)$ $(k=1,2,\ldots)$. Pour $x\epsilon J_k$ on a $[1/x]=k$ et $1/x-[1/x]>a$, donc $\psi(x)>ka$, d'où

$$\int_{J_k}\psi(x)\,dx>ka\frac{1-a}{(k+a)\,(k+1)}.$$

Il en résulte que

$$\int_0^1\psi(x)\,dx>a(1-a)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+a)\,(k+1)}>a(1-a)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)^2}=\infty.$$

Cela étant, les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ satisfont à l'hypothèse du lemme. Pour déduire la thèse du théorème II, il suffit de tenir compte de ce que

$$G_n(\varphi,x)=\frac{1}{n}\left(\frac{c_2(x)}{c_1(x)}+\frac{c_3(x)}{c_2(x)}+\ldots+\frac{c_{n+1}(x)}{c_n(x)}\right)$$

et

$$G_n(\psi,x)=\frac{1}{n}\left(\frac{c_1(x)}{c_2(x)}+\frac{c_2(x)}{c_3(x)}+\ldots+\frac{c_n(x)}{c_{n+1}(x)}\right).$$

Le théorème II montre que la suite $\{c_n(x)\}$ est, pour presque tout x, fortement oscillante, ce qui n'est pas étonnant vu le résultat de P. Lévy [9]), d'après lequel, pour presque tout x, tout nombre naturel n apparaît dans la suite $\{c_n(x)\}$ avec une fréquence déterminée positive qui dépend de n, mais non de x. Cependant, le théorème II n'est pas une conséquence arithmétique du théorème de Lévy.

Remarquons à cette occasion que Ryll-Nardzewski déduit aussitôt du théorème de Lévy le résultat suivant:

Théorème III. *Etant donnée une suite $\gamma_n\to\infty$, la fréquence des indices n, tels que $c_n(x)\geqslant\gamma_n$, est, pour presque tout x, égale à* 0.

[9]) P. Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Monographies des probabilités I, Paris 1937, p. 311-313.

Le théorème III donne lieu à son tour au théorème suivant sur les approximations diophantiques:

Théorème IV. *$p_n(x)/q_n(x)$ désignant la n-ème réduite de x et $\varphi(n)$ une fonction qui tend vers l'infini, soit $\{n_k\}$ la suite des indices qui satisfont à l'inégalité*

$$\left|x-\frac{p_{n_k}(x)}{q_{n_k}(x)}\right|<\frac{1}{[q_{n_k}(x)]^2\varphi\big(q_{n_k}(x)\big)}.$$

La fréquence des n_k est alors, pour presque tout x, égale à 0.

Pour le démontrer, on doit tenir compte des inégalités bien connues

$$\left|x-\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right|>\frac{1}{2q_n(x)\,q_{n+1}(x)}\qquad\text{et}\qquad\frac{q_{n+1}(x)}{q_n(x)}<2c_{n+1}(x),$$

et employer le théorème III.

4. Envisageons encore une question d'autre espèce, mais étroitement liée à cette même théorie. Il s'agit de la condition de Dunford-Miller [10]) (ou la condition (DM)) qui exprime une propriété d'une classe de transformations d'un espace, pourvu de mesure, en lui-même; cette condition joue un rôle important dans la théorie ergodique.

Soient X un espace quelconque et μ une mesure dénombrablement additive, définie dans un corps dénombrablement additif M de sous-ensembles de X. Soit φ une transformation de X en lui-même. Admettons que, pour $E\epsilon M$, on ait $\varphi^{-1}(E)\epsilon M$ et que $\mu(E)=0$ entraîne $\mu(\varphi^{-1}(E))=0$. La condition (DM) pour φ et μ s'écrit alors:

$$\frac{1}{n}\left[\mu(E)+\mu\big(\varphi^{-1}(E)\big)+\ldots+\mu\big(\varphi^{-n+1}(E)\big)\right]<K\mu(E)$$

pour tout $E\epsilon M$ et pour tout n naturel.

Ryll-Nardzewski a démontré [11]) que, pour $X=(0,1)$ et $\varphi=\delta$, il existe une mesure $\nu(E)$ définie pour tout ensemble mesurable

[10]) N. Dunford and D. S. Miller, *On the ergodic theorem*, Transactions of the American Mathematical Society 60 (1946), p. 538-549.

[11]) C. Ryll-Nardzewski, loc. cit. [1]).

(L) et invariante par rapport à δ, c'est-à-dire telle que $\nu(E)=\nu(\delta^{-1}(E))$. Cette mesure satisfait à la relation

$$\frac{1}{2\log 2}|E|\leqslant\nu(E)\leqslant\frac{1}{\log 2}|E|,\tag{2}$$

$|E|$ désignant la mesure lebesguienne de E.

Puisque $\nu(\delta^{-i}(E))=\nu(E)$ pour $i=1,2,\ldots$, il résulte de (2) que

$$\frac{|\delta^{-i}(E)|}{|E|}=\frac{|\delta^{-i}(E)|}{\nu(\delta^{-i}(E))}\cdot\frac{\nu(\delta^{-i}(E))}{\nu(E)}\cdot\frac{\nu(E)}{|E|}\leqslant 2\qquad(i=1,2,\ldots).\tag{3}$$

A plus forte raison, la transformation δ obéit à la condition (DM), μ étant la mesure lebesguienne.

Nous nous proposons d'exprimer l'inégalité dans (3) explicitement, c'est-à-dire sous la forme d'un théorème sur les grandeurs arithmétiques liées aux fractions continues.

Théorème V. *Soit E_n $(n=1,2,\ldots)$ l'ensemble des nombres naturels q tels qu'il existe un x satisfaisant à la condition $q_n(x)=q$. Pour $q\in E_n$, soit E_n^q l'ensemble des nombres naturels r tels qu'il existe un x satisfaisant aux conditions $q_n(x)=q$, $q_{n+1}(x)=r$. Alors*

$$\sum_{q\in E_n}\sum_{r\in E_n^q}\frac{1}{r^2}\leqslant 2.\tag{4}$$

Démonstration. En posant $y=\delta^{i+1}(x)$ et en tenant compte des propriétés élémentaires des fractions continues, on obtient, de la définition de δ,

$$x=\frac{p_{i+1}(x)+p_i(x)y}{q_{i+1}(x)+q_i(x)y}\qquad(i=0,1,2,\ldots).$$

Ainsi $\delta^{-(i+1)}(y)$ est un ensemble dénombrable composé de tous les nombres de la forme

$$\frac{p_{i+1}+p_iy}{q_{i+1}+q_iy},$$

où p_i,p_{i+1},q_i,q_{i+1} sont les numérateurs et les dénominateurs *possibles* de la i-ème et de la $(i+1)$-ème réduite, c'est-à-dire tels que, pour un $x\in(0,1)$, on a $p_i(x)=p_i$, $p_{i+1}(x)=p_{i+1}$, $q_i(x)=q_i$ et $q_{i+1}(x)=q_{i+1}$.

En posant $E=\langle 0,a\rangle$, où $0<a\leqslant 1$, on a donc

$$\begin{aligned}|\delta^{-(i+1)}(E)|&=\sum\sum\left|\frac{p_{i+1}+p_ia}{q_{i+1}+q_ia}-\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}\right|\\&=a\sum\sum\frac{1}{q_{i+1}(q_{i+1}+q_ia)},\end{aligned}\tag{5}$$

où la sommation s'étend à tous les nombres naturels q_i et q_{i+1} tels que, pour certain $x\in(0,1)$, on a $q_i(x)=q_i$ et $q_{i+1}(x)=q_{i+1}$, compte tenu de ce que p_i et p_{i+1} sont déterminés d'une manière univoque par q_i et q_{i+1} vu les relations $p_{i+1}q_i-q_{i+1}p_i=(-1)^i$, $(q_i,q_{i+1})=1$ et $p_i<q_i$.

On obtient, en vertu de (3) et (5),

$$\sum\sum\frac{1}{q_{i+1}(q_{i+1}+q_ia)}\leqslant 2$$

et, en faisant a tendre vers 0,

$$\sum\sum\frac{1}{q_{i+1}^2}\leqslant 2,$$

ce qui est équivalent à (4), vu la signification de $\Sigma\Sigma$.

Il est facile de prouver que le théorème V entraîne (3) dans le cas où E est un intervalle; (3) subsiste alors pour tout ensemble mesurable, comme on le voit aisément. Il y a ainsi une équivalence complète entre (3) et le théorème V.

Rappelons encore à ce propos que Lévy a étudié l'expression

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{q\in E_n}\sum_{r\in E_n^q}\frac{1}{r^{1+a}}\tag{6}$$

et en a montré la convergence pour $a>1$ [12]), à savoir vers

$$\frac{\zeta(a)}{\zeta(a+1)},$$

ζ désignant la fonction de Riemann.

---

[12]) P. Lévy, loc. cit. [9]), p. 322-323.

Lévy évalue, au lieu de (6), une somme double, à savoir $\sum_r \sum_s s^0/r^{1+\alpha}$, étendue à tous les nombres naturels s, r, où $s<r$, $(s,r)=1$. Elle est égale à (6), parce que, pour tout couple (s,r), il existe une valeur de n et une seule, donnant $s=q_{n-1}(x)$, $r=q_n(x)$ pour un $x \epsilon (0,1)$. La divergence de (6) pour $\alpha=1$ est facile à démontrer, elle est d'ailleurs une conséquence immédiate du résultat précité de Lévy.

(Reçu par la Rédaction le 28. 11. 1950).

Sur le mouvement plan du liquide visqueux, incompressible, entourant une courbe simple fermée

par

W. WOLIBNER (Wrocław).

J'envisage dans ce travail le *mouvement plan du liquide visqueux, incompressible, remplissant tout le plan à l'extérieur d'une courbe fermée C qui, sans se déformer, se déplace parallèlement à une droite, avec une vitesse égale à* 1[1]. J'admets, pour simplifier, que la courbe C possède partout une tangente continue. Soit XY un système de coordonnées lié à la courbe C, l'axe X étant parallèle à la vitesse de C; soient u et v les composantes de la vitesse du liquide par rapport au système immobile $\overline{X}\overline{Y}$, coïncidant en ce moment avec le système XY; soient p et R la pression réduite et le nombre de Reynolds. J'admets que *les forces extérieures n'existent pas*. Ainsi seront satisfaites les équations suivantes:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(u-1)\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{R}\Delta u \qquad \left(\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(u-1)\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{R}\Delta v, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

---

[1]) Cf. P. Udeschini, *Incompatibilità dell'adesione completa al contorno con la regolarità e le condizioni asintotiche euleriane per correnti viscose stazionari*, Atti Accad. Italia, Rend. Cl. sci. fis. mat. natur. (7) 2, p. 957-963. P. Udeschini a démontré qu'il n'existe pas de mouvement permanent du liquide visqueux, compressible, entourant un corps solide et y adhérant, qui serait régulier à l'intérieur du liquide et qu'à l'infini serait satisfaite la condition

$$\lim_{\varrho\to\infty} r^2(v-v_\infty)=0.$$