where γ is a real constant and $G(z)$ a polynomial without zeros in $|z|<1$ and satisfying the condition $\operatorname{Im} G(0)=0$. Without loss of generality we may assume that $\gamma=0$. Hence

$$(4.11)\qquad p=F_1F_2\ldots F_n,\ \text{ where } F_1=BG^{1/n}, F_2=F_3=\ldots=F_n=G^{1/n}.$$

All the functions F_j are bounded, and so also of the class H^{n/a_1}. Assuming as we may, that $\operatorname{Im} G^{1/n}(0)$, we see that each F_j is representable by the formula (4.6), where the g_j are of the class L^{n/a_1} and real-valued. Hence

$$Tp=T[F_1F_2\ldots F_n]=T^*[g_1,g_2,\ldots,g_n].$$

The functions g_j also belong to $L^{n/a}$ (because $a\geqslant a_1$ or simply because they belong to every L^r, $r>0$). But the formula (4.5), which was initially established for g_j simple, shows that the operation can be extended to $L^{n/a}\times L^{n/a}\times\ldots\times L^{n/a}$, with the preservation of the inequality (4.10). Combining (4.5) with (4.11) we get

$$\|Tp\|_{1/\beta}=\|T^*[g_1,g_2,\ldots,g_n]\|_{1/\beta}$$
$$\leqslant(A^{1-t}_{n/a_1}A^t_{n/a_2})^n M_1^{1-t}M_2^t\prod_j\left\{\int_0^{2\pi}|g_j(t)|^{n/a}dt\right\}^{a/n}.$$

The last product Π here does not exceed

$$\prod_j\left\{\int_0^{2\pi}|F_j(e^{it})|^{n/a}dt\right\}^{a/n}=\prod_j\left\{\int_0^{2\pi}|G(e^{it})|^{1/a}dt\right\}^{a/n}=(2\pi)^{1/a}\|p\|_{1/a},$$

which gives (4.4) with

$$K=(2\pi)^{1/a_1}\delta^n,\ \text{ where } \delta=\max(A_{n/a_1},A_{n/a_2}).$$

Bibliography.

[1] A. P. Calderón and A. Zygmund, *On the theorem of Hausdorff-Young, Contributions to Fourier Analysis*, Annals of Mathematics Studies 25, p. 166-168, Princeton University Press (1950).

[2] M. Riesz, *Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires*, Acta Mathematica 49 (1926), p. 465-497.

[3] R. Salem and A. Zygmund, *A Convexity Theorem*, Proc. of National Acad. of Sciences 34 (1948), p. 443-447.

[4] G. O. Thorin, *Convexity Theorem*, Uppsala 1948, p. 1-57.

OHIO STATE UNIVERSITY AND THE UNIVERSITY OF CHICAGO

(Reçu par la Rédaction le 9. 4. 1951).

Sur l'opérateur de translation

par

J. G.-MIKUSIŃSKI et C. RYLL-NARDZEWSKI (Wrocław).

1. L'opérateur de translation $e^{-s\lambda}$ peut être défini, pour $\lambda>0$, par l'égalité [1])

$$e^{-s\lambda}=s\{h(\lambda,t)\},$$

où

$$h(\lambda,t)=\begin{cases}0 & \text{pour } 0\leqslant t<\lambda,\\ 1 & \text{pour } 0<\lambda\leqslant t.\end{cases}$$

Le développement formel de $e^{-s\lambda}$ en série de puissances a la forme

$$(1)\qquad e^{-s\lambda}=1-\frac{s\lambda}{1!}+\frac{s^2\lambda^2}{2!}-\ldots$$

Nous démontrerons, au § 2, que *cette série est divergente* pour tout $\lambda\neq0$; elle ne peut donc pas servir comme définition de l'opérateur $e^{-s\lambda}$.

Nous verrons cependant, au § 3, que la suite

$$\left(1+\frac{s\lambda}{n}\right)^{-n}$$

converge pour $n\to\infty$, quel que soit λ positif, et a pour limite $e^{-s\lambda}$; il existe donc, dans ce dernier cas, une analogie avec la fonction exponentielle classique.

2. Supposons que la série (1) converge pour certain $\lambda_0\neq0$. Alors il existe une fonction $q\epsilon C$ non identiquement nulle et telle que tous les termes de la suite

$$a_n=q\left[1-\frac{s\lambda_0}{1!}+\ldots+(-1)^n\frac{s^n\lambda_0^n}{n!}\right]$$

[1]) Voir J. G.-Mikusiński, *Sur les fondements du calcul opératoire*, Studia Mathematica 11 (1949), p. 58-59.

sont des fonctions de classe C et que la suite a_n converge fortement. Il s'ensuit que q doit être indéfiniment dérivable pour tout $t\geqslant 0$ et nulle au point $t=0$ avec toutes ses dérivées. On peut donc écrire

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left\{q(t)-\frac{\lambda_0}{1!}q'(t)+\frac{\lambda_0^2}{2!}q''(t)-\ldots\right\}.$$

Or, on a le développement formel

$$q(t-\lambda)=q(t)-\frac{\lambda}{1!}q'(t)+\frac{\lambda^2}{2!}q''(t)-\ldots; \tag{2}$$

la dernière série converge pour tout $t\geqslant 0$ et $\lambda=\lambda_0$, par conséquent, pour tout $|\lambda|<\lambda_0$. La série de Taylor de $q(t)$ a donc un rayon de convergence positif pour tout $t\geqslant 0$; d'après un théorème de Pringsheim [2]), c'est une fonction analytique pour $t\geqslant 0$. Or, on a $q^{(\nu)}(0)=0$ pour $\nu=0,1,2,\ldots$, d'où $q(t)=0$ identiquement pour $t\geqslant 0$, ce qui est faux.

3. On a

$$\left(1+\frac{\lambda s}{n}\right)^{-n}=\left(\frac{n}{\lambda}\right)^n\left(s+\frac{n}{\lambda}\right)^{-n}=\{f_n(\lambda,t)\},$$

où

$$f_n(\lambda,t)=\left(\frac{n}{\lambda}\right)^n\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\exp\left(-\frac{nt}{\lambda}\right);$$

d'après la formule de Stirling, la suite $f_n(\lambda,t)$ tend, pour $0<t\neq\lambda>0$ et $n\to\infty$, vers la même limite que la suite

$$\frac{1}{t}\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left[\frac{t}{\lambda}\exp\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)\right]^n,$$

c'est-à-dire vers zéro, car

$$\exp\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)<\frac{\lambda}{t}.$$

Si λ et n sont fixes, la fonction $f_n(\lambda,t)$ atteint son maximum unique au point $t=(n-1)\lambda/n$; il s'ensuit que la suite $f_n(\lambda,t)$ converge uniformément vers zéro dans tout intervalle $0\leqslant t_1\leqslant t\leqslant t_2$, ne contenant pas le point $t=\lambda$.

Or, on a

$$f_n(\lambda,t)>0 \quad \text{et} \quad \int_0^\infty f_n(\lambda,t)\,dt=1,$$

donc la suite

$$\int_0^t f_n(\lambda,\tau)\,d\tau$$

converge pour λ fixe vers $h(\lambda,t)$ uniformément dans tout intervalle $0\leqslant t_1\leqslant t\leqslant t_2$, ne contenant pas le point $t=\lambda$, et la suite

$$\int_0^t d\tau_1\int_0^{\tau_1} f_n(\lambda,\tau)\,d\tau$$

converge pour λ fixe vers $\int_0^t h(\lambda,\tau)\,d\tau$ uniformément dans tout intervalle $0\leqslant t\leqslant t_0$ (contenant, ou non, le point $t=\lambda$).

Or, ceci signifie que la suite $l^2(1+\lambda s/n)^{-n}$ converge fortement vers $l\{h(\lambda,t)\}$, ce qui entraîne

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\lambda s}{n}\right)^{-n}=e^{-s\lambda}.$$

PAŃSTWOWY INSTYTUT MATEMATYCZNY
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ÉTAT

(Reçu par la Rédaction le 15. 1. 1951).

[2]) Voir R. P. Boas jr., *A theorem on analytic functions of a real variable*, Bulletin of the American Mathematical Society 41 (1935), p. 233-236; Z. Zahorski, *Sur un ensemble des points singuliers d'une fonction d'une variable réelle admettant les dérivées de tous les ordres*, Fundamenta Mathematicae 34 (1947), p. 239-244.