$$\sigma_n^\alpha = \frac{\sigma_{n,-1}^\alpha}{n+\alpha+1} + \frac{\alpha+1}{n+\alpha+1}\cdot\frac{A_n^{\alpha+1}}{A_n^\alpha}\left[a_0+(\alpha+1)\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sigma_{\nu,-1}^\alpha}{\nu(\nu+\alpha+1)}\right]$$

$$= \frac{\sigma_{n,-1}^\alpha}{n+\alpha+1} + a_0 + (\alpha+1)\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sigma_{\nu,-1}^\alpha}{\nu(\nu+\alpha+1)}.$$

From $\sigma_{n,-1}^\alpha = o(1)$ we have $\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\sigma_{\nu,-1}^\alpha}{\nu(\nu+\alpha+1)} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ and therefore

$$\sigma_n^\alpha = a_0 + (\alpha+1)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sigma_{\nu,-1}^\alpha}{\nu(\nu+\alpha+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right) = s + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Thus our Theorem is established.

(Reçu par la Rédaction le 5. 2. 1950).

Sur les séries de Taylor

par

C. RYLL-NARDZEWSKI et H. STEINHAUS (Wrocław).

L'objet de cette Note est le phénomène appelé coupure: le cercle de convergence d'une série ne présente que des singularités. Pour des classes étendues des séries de Taylor ce phénomène en est la règle, l'existence d'un prolongement analytique une exception.

On trouve au § 1 le théorème général et des exemples les plus typiques, au § 2 les détails de la démonstration et au § 3 quelques renseignements sur l'histoire du problème.

1. Généralités, résultats et exemples.

Soit $f(x,z)$ une fonction de la variable complexe z, définie pour $|z|<1$ et pour $x \epsilon X$, X étant un espace de Banach[1]). Par hypothèse, $f(x,z)$ soit

1° pour tout $x \epsilon X$ une fonction holomorphe en z pour $|z|<1$,

2° pour tout z intérieur au cercle $|z|=1$ une fonctionnelle linéaire en x dans X.

Pour en avoir des exemples, écrivons

(1) $\quad f(x,z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \qquad x=\{a_n\}, \qquad a_n$ complexe $(n=1,2,\dots)$ [2]),

---

[1]) Voir par exemple S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie matematyczne I, Warszawa 1932, p. 53.

[2]) La suppression de $n=0$ est sans conséquence pour les résultats.

en choisissant comme X un des quatre espaces X_k $(k=1,2,3,4)$, à savoir

X_1 — ensemble de tous les x tels que

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p<\infty, \qquad \|x\|=(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p)^{1/p}, \qquad p\geqslant 1;$$

X_2 — ensemble de tous les x tels que

$$\sup_n |a_n|<\infty, \qquad \|x\|=\sup_n |a_n|; \tag{2}$$

X_3 — ensemble de tous les x tels que

$$\lim_{n\to\infty} a_n \text{ existe}, \qquad \|x\|=\sup |a_n|;$$

X_4 — ensemble de tous les x tels que

$$\sup_n |a_n|\, n^{\log n}<\infty, \qquad \|x\|=\sup_n |a_n|\, n^{\log n}.$$

Il est facile de vérifier qu'en définissant $f(x,z)$ par (1) et en prenant pour X un espace (2) quelconque, on est d'accord avec 1^0 et 2^0. En effet, il est évident que, pour $X=X_k$ $(k=1,2,3$ ou $4)$, 1^0 est vrai ainsi que, pour tout z intérieur au cercle-unité C $(|z|=1)$, la série (1) est uniformément convergente dans la sphère $\|x\|\leqslant M$, quel que soit M réel, et chaque terme de cette série est linéaire en x.

En revenant au cas général, énonçons le résultat à démontrer:

Théorème 1. *Moyennant les hypothèses 1^0 et 2^0 ci-dessus, le cercle C $(|z|=1)$ peut être décomposé en un ensemble ouvert G et son complémentaire fermé H $(C=G+H,\ GH=0)$; de même, l'espace X peut être décomposé en un ensemble S qui est un F_σ de première catégorie dans X, et son complémentaire R qui est résiduel dans X $(X=S+R,\ SR=0)$, de manière que tous les points de G $(z\epsilon G)$ soient réguliers pour $f(x,z)$, quel que soit x dans X $(x\epsilon X)$, et que tous les points de H $(z\epsilon H)$ soient singuliers pour $f(x,z)$, quel que soit x dans R $(x\epsilon R)$.*

Ce théorème sera démontré au § 2. Pour faire voir sa portée, introduisons l'hypothèse suivante:

3^0 A tout z_0 du cercle C $(|z_0|=1)$, correspond un x_0 dans X, tel que le point z_0 soit singulier pour $f(x_0,z)$.

On peut énoncer maintenant le résultat suivant:

Théorème 2. *Moyennant les hypothèses 1^0, 2^0 et 3^0, le cercle entier C $(|z|=1)$ est une coupure pour $f(x_0,z)$, quel que soit l'élément x_0 de R, R étant certain sous-ensemble résiduel de X.*

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème 1. En effet, 3^0 implique que l'ensemble G dont parle le théorème 1 est vide, ce qui fait que son complémentaire H est identique à C. En remplaçant H par C dans la thèse du théorème 1, on obtient celle du théorème 2.

Pour comprendre le théorème 2, il faut se rendre compte de ce que X, étant un espace métrique complet, est de deuxième catégorie, donc que R est un ensemble non vide de deuxième catégorie et $S=X-R$ un ensemble de première catégorie. C'est seulement pour $x_0\epsilon S$ qu'un prolongement analytique de $f(x_0,z)$ au delà de C est possible (sans que son existence soit assurée); cela justifie la remarque qui commence cette Note.

Remarquons maintenant que la suite

$$x_0=\left\{\frac{e^{-i\vartheta}}{n^{\log n}}\right\} \tag{3}$$

appartient à X_k $(k=1,2,3,4)$, quel que soit le nombre réel ϑ. La série $f(x_0,z)$ que l'on obtient de (1) en y remplaçant x par x_0 défini par (3), aura C pour cercle de convergence. Or, en posant $z=e^{i\vartheta}$, tous les termes de cette série deviennent réels et positifs, ce qui montre que le point $z_0=e^{i\vartheta}$ est singulier pour cette série. Puisque ϑ est arbitraire, notre remarque montre que l'hypothèse 3^0 s'applique à $X=X_k$ $(k=1,2,3,4)$. Nous savons déjà que 1^0 et 2^0 s'y appliquent aussi; le théorème 2 fournit donc immédiatement le résultat que voici:

Théorème 3. *L'espace X_k $(k=1,2,3,4)$ contient un sous-ensemble résiduel R_k, tel que, pour $x\epsilon R_k$, le cercle C est une coupure pour la série* (1).

Le cas $k=4$ du théorème 3 mérite d'être souligné: les suites $\{a_n\}$ appartenant à X_4 donnent lieu aux séries $\sum a_n z^n$ convergentes absolument, donc uniformément, sur le cercle C $(|z|=1)$, et partagent cette propriété avec leurs séries dérivées de tous les ordres. La fonction $L(\vartheta)=\lim\sum a_n r^n e^{in\vartheta}$, pour $r\to 1$, existe pour tous les ϑ réels et est infiniment dérivable; néanmoins le cercle $|z|=1$ est, *en général*, une coupure pour $\sum a_n z^n$. En séparant la partie réelle de cette série, on obtient une série de Fourier qui représente une fonction infiniment dérivable de ϑ dans l'intervalle réel tout entier; néanmoins cette fonction est, *en général*, non-analytique dans le voisinage de tout point ϑ.

2. Définitions, lemmes et démonstrations.

Définition 1. Un arc ouvert du cercle C, dont les extrémités $e^{i\vartheta}$ correspondent aux ϑ rationnels, sera appelé *arc* tout court.

Définition 2. Un arc A est *régulier* si, pour tout x dans X, la fonction $f(x,z)$ de z est régulière en tout point z de A.

Définition 3. L'ensemble de tous les arcs réguliers sera désigné par AR.

Définition 4. On appelle G' la somme de tous les arcs réguliers et H' le complémentaire de G': $G'=\sum_{AR} A$, $H'=C-G'$.

Définition 5. On désigne par $D_n(A)$ le domaine du plan complexe z défini par

$$(4) \qquad 1-\frac{1}{n}<|z|<1+\frac{1}{n}, \qquad \frac{z}{|z|}\epsilon A.$$

Définition 6. On désigne par $E_n(A)$ l'ensemble de tous les x de X, pour lesquels $f(x,z)$ est prolongeable au domaine $D_n(A)$ de telle manière, qu'en désignant ce prolongement par $f_n(x,z)$, on ait

$$(5) \qquad |f_n(x,z)|\leqslant n \quad \text{pour} \quad z\epsilon D_n(A), \qquad x\epsilon E_n(A).$$

Lemme 1. *Afin que $f(x_0,z)$ soit régulière en $z=z_0$, $z_0\epsilon C$, il faut et il suffit qu'il existe un arc A et un entier positif n tels que $x_0\epsilon E_n(A)$ et $z_0\epsilon A$.*

Ce n'est que la nécessité de la condition qui exige d'être démontrée. Or, la régularité en z_0 implique l'existence d'un arc A' contenant z_0, dont tous les points sont réguliers pour $f(x_0,z)$; il existe évidemment un arc A, partie de A' et contenant z_0, tel qu'à partir d'un m assez grand, $|f_m(x_0,z)|$ est borné dans $D_m(A)$ par un M entier qui ne dépend pas de m; on voit que, pour $n=m+M$, on aura $|f_n(x_0,z)|\leqslant n$ pour $z\epsilon D_n(A)$, ce qui implique $x_0\epsilon E_n(A)$.

Lemme 2. *$E_n(A)$ est fermé dans X, quel que soit l'arc A et l'entier positif n.*

Soient $x_k\epsilon E_n(A)$ $(k=1,2,\ldots)$ et $\lim_{k\to\infty} x_k=x_0$; le lemme dit qu'alors $x_0\epsilon E_n(A)$. Or, tous les termes de la suite

$$(6) \qquad \{f_n(x_k,z)\}$$

sont bornés en module dans $D_n(A)$ par n. D'autre part, $\lim x_k=x_0$ entraîne, en vertu de 2°,

$$(7) \qquad \lim_{k\to\infty} f_n(x_k,z)=\lim_{k\to\infty} f(x_k,z)=f(x_0,z) \quad \text{pour} \quad z\epsilon D_n(A)\cdot K,$$

en désignant par K l'intérieur de C. On voit donc que les fonctions constituant la suite (6), holomorphes et uniformément bornées dans tout le domaine $D_n(A)$, convergent vers $f(x_0,z)$ dans un domaine partiel; d'après le théorème de Vitali la suite (6) converge dans tout le domaine $D_n(A)$ vers une fonction holomorphe identique à $f(x_0,z)$ dans la partie de $D_n(A)$ intérieure à C, et bornée en module par n dans $D_n(A)$. Cela implique, d'après la définition 6, $x_0\epsilon E_n(A)$, c. q. f. d.

Lemme 3. *$E_n(A)$ est non dense dans X pour $A\epsilon AR$* $(n=1,2,\ldots)$.

Supposons que x_0 soit un point intérieur de $E_n(A)$; nous allons démontrer la régularité de $f(x,z)$ dans A pour tout x dans X. En effet, x_0 étant intérieur, il existe, pour chaque x, un nombre réel positif r tel que $x_0+rx\epsilon E_n(A)$; on aura donc, en vertu de 2°,

$$(8) \qquad f(x,z)=\frac{1}{r}[f(x_0+rx,z)-f(x_0,z)].$$

Le second nombre de (8) est régulier pour $z\epsilon A$, il en est donc de même pour $f(x,z)$, ce qui contredit l'hypothèse du lemme, que A n'est pas régulier. Cette contradiction montre que $E_n(A)$ est privé de points intérieurs, c. q. f. d.

Démonstration du théorème 1. Soit

$$(9) \qquad S'=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{A\epsilon AR} E_n(A), \qquad R'=X-S'.$$

En vertu des lemmes 2 et 3, S' est un F_σ de première catégorie dans X_0; rappelons ici la définition 1 pour constater que la somme (9) est dénombrable. Il s'ensuit que R' est un ensemble résiduel dans X. Nous allons montrer que pour $x_0\epsilon R'$ et $z_0\epsilon H'$ le point $z=z_0$ est singulier pour $f(x_0,z)$. Supposons le contraire. En vertu du lemme 1, il existe alors un arc A_0 et un n_0 naturel tels que

$x_0 \epsilon E_{n_0}(A_0)$, $z_0 \epsilon A_0$. Puisque $z_0 \epsilon H'$, la définition 4 implique que A_0 n'est pas un arc régulier; il s'ensuit que $E_{n_0}(A_0)$ se trouve parmi les termes de la somme (9), ce qui donne $x_0 \epsilon S'$, relation incompatible avec $x_0 \epsilon R'$.

D'autre part, il est évident que, pour x_0 quelconque ($x_0 \epsilon X$), la fonction $f(x_0, z)$ est régulière dans chaque point z de G'; c'est une conséquence immédiate des définitions 2 et 4.

Il est aussi évident, en vertu des définitions 1 et 4, que G' est un ensemble ouvert, donc H' un ensemble fermé.

On voit que les ensembles G', H', R', S' ont toutes les propriétés que la thèse du théorème 1 attribue aux ensembles G, H, R, S respectivement, ce qui constitue la démonstration de ce théorème.

Il a été expliqué au § 1 comment on déduit les théorèmes 2 et 3 du théorème 1; ayant démontré ce théorème tout à l'heure, nous avons donc établi tous les résultats de notre Note.

Il y a une remarque à ajouter au théorème 1. En appelant *régulier* tout court chaque point z tel que $f(x,z)$ est régulière pour $z=z_0$, quel que soit x dans X, on peut définir l'ensemble G_0 de tous les points réguliers. Or, l'ensemble G dont parle le théorème, ne contient que des points réguliers; d'autre part, R n'étant jamais vide, il existe un $x_0 \epsilon R$; tous les points z de H sont singuliers pour $f(x_0, z)$, ce qui fait que H, complémentaire de G, est privé de points réguliers. Il s'ensuit que G est identique à G_0. Nous avons vu que G' a les propriétés attribuées par le Théorème 1 à G, donc G' est identique à G_0: *la somme de tous les arcs réguliers est identique à l'ensemble de tous les points réguliers,* un fait assez intéressant.

3. Renseignements sur l'histoire du problème.

E. Borel [3]) a été le premier à affirmer que l'existence d'un prolongement analytique est une exception. Il y a plusieurs manières de concevoir cette conjecture. M. G. Pólya [4]) considère la classe des fonctions holomorphes dans le cercle-unité comme un espace dans lequel il établit une sorte de topologie; les fonctions prolongeables y forment un ensemble non dense. On peut donner à la thèse de M. Borel un sens stochastique: la probabilité de l'existence d'un prolongement est nulle. En suivant la conception de M. Pólya, MM. Kierst et Szpilrajn [5]) ont obtenu des résultats remarquables sur les fonctions uniformes; leur mérite était, entre autres, d'avoir remplacé l'espace de Pólya par un espace (L) de Fréchet, espace qui se prête mieux à ces recherches; on trouve dans leur article une liste de travaux antérieurs. En choisissant l'interprétation stochastique, comme l'a fait un des auteurs de cette Note en 1929 [6]) et plusieurs autres mathématiciens, notamment Paley et Zygmund [7]), on rencontre la conjecture de M. Blackwell qui précise l'énoncé de M. Borel: toute série de puissances à coefficients aléatoires et indépendants présente avec probabilité 1 une coupure quand on en retranche une série appropriée à coefficients constants [8]).

La voie prise par notre Note diffère des deux chemins caractérisés tout à l'heure, quoique elle approche la direction indiquée par M. Pólya. La différence essentielle est que l'espace X associé au problème est un espace quelconque de Banach.

Quant à la méthode, elle rappelle celle que Saks a employé pour généraliser et préciser le principe de la condensation des singularités: dans le soi-disant théorème de Saks intervient aussi la division de l'intervalle en deux ensembles G et H et de l'espace X en R et S; on ne peut pas appliquer ce lemme immédiatement, car il est lié au phénomène de divergence des séries, tandis que notre objet ne l'est pas [9]).

[3]) Cf. J. Hadamard, *La série de Taylor*, p. 33-36.

[4]) G. Pólya, *Über die Potenzreihen, deren Konvergenzkreis ihre natürliche Grenze ist,* Acta Mathematica 41 (1916-18), p. 99-118.

[5]) S. Kierst et E. Szpilrajn, *Sur certaines singularités des fonctions analytiques uniformes*, Fundamenta Mathematicae 21 (1933), p. 276-294.

[6]) H. Steinhaus, *Über die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Konvergenzkreis einer Potenzreihe ihre natürliche Grenze ist,* Mathematische Zeitschrift 31 (1929), p. 408-416.

[7]) R. E. A. C. Paley and A. Zygmund, *On some series of functions*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 26 (1930), p. 337-357.

[8]) Cette conjecture a été confirmée par l'autre auteur de cette Note; sa démonstration paraîtra dans les Studia Mathematica.

[9]) Voir par exemple S. Kaczmarz und H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen,* Monografie Matematyczne VI, Warszawa-Lwów 1935, p. 19-26.

(Reçu par la Rédaction le 15. 12. 1950).