Bibliography.

[1] A. Alexiewicz et W. Orlicz, *Sur la continuité et la classification de Baire des fonctions abstraites*, Fundamenta Mathematicae 35 (1948), p. 105-126.

[2] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Warszawa, 1932.

[3] N. Dunford, *Uniformity in linear spaces*, Transactions of the American Mathematical Society 44 (1938), p. 305-356.

[4] I. Gelfand, *Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren*, Recueil Mathématique 4 (1938), p. 235-286.

[5] S. Mazur et W. Orlicz, *Sur les espaces métriques linéaires I*, Studia Mathematica 10 (1948), p. 184-208.

[6] S. Mazur et W. Orlicz, *Sur les espaces métriques linéaires II*, to be published in Studia Mathematica.

[7] G. Sirvint, *Weak compactness in Banach spaces*, Studia Mathematica 11 (1950), p. 71-94.

PAŃSTWOWY INSTYTUT MATEMATYCZNY
STATE INSTITUTE OF MATHEMATICS

(Reçu par la Rédaction le 12. 9. 1950).

Sur les suites et les fonctions également réparties

par

C. RYLL-NARDZEWSKI (Wrocław).

On dit qu'une *suite* $\{\xi_n\}$ à termes réels est *également répartie* mod 1, lorsque la suite $\{n_j\}$ des indices n_j tels que $R(\xi_{n_j})<\alpha$, a la fréquence α quel que soit α entre 0 et 1; $R(x)$ désigne le reste de x mod 1. En abrégé: est ER.

Pareillement, on dit qu'une *fonction* $f(t)$, réelle et mesurable L, est *également répartie* mod 1 dans l'intervalle $(0,\infty)$, lorsque

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left|\underset{t}{E}\{R(f(t))<\alpha\}\cdot(0,T)\right|=\alpha,$$

quel que soit α entre 0 et 1. En abrégè: $f(t)$ est ER dans $(0,\infty)$.

Théorème. *Soit* $f(t)$ *une fonction réelle et mesurable* L. *Si l'une quelconque des conditions* (a), (b) *suivantes est remplie,* $f(t)$ *est* ER *dans* $(0,\infty)$*:*

(a) *la suite numérique* $\{f(n+t)\}$ *est* ER *pour presque tout* t *positif;*

(b) *la suite numérique* $\{f(nt)\}$ *est* ER *pour presque tout* t *positif.*

Démonstration. La condition (a) implique, d'après le critère de Weyl [1]),

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{2\pi ikf(n+t)}=0 \qquad (k=1,2,\dots) \tag{1}$$

pour presque tout t positif. En intégrant cette égalité dans (0,1) et en changeant l'ordre des opérations $\int$ et lim, ce qui est légitime, car la suite intégrée est uniformément bornée, il vient

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\int_n^{n+1}e^{2\pi ikf(t)}dt=0 \qquad (k=1,2,\dots). \tag{2}$$

[1]) H. Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*, Mathematische Annalen 77 (1916), p. 313-352, surtout 313-314.

icm©

En posant

$$J_n^k = \int_n^{n+1} e^{2\pi i k f(t)}\,dt,$$

la relation (2) prend la forme

$$(3)\qquad \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\int_0^N e^{2\pi i k f(t)}\,dt = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} J_n^k = 0 \qquad (k=1,2,\ldots).$$

D'après un critère de Steinhaus[2]) (3) implique que $f(t)$ est ER dans $(0,\infty)$.

Supposons maintenant la condition (b) remplie. La suite $\{f(nt)\}$ étant ER, la suite $\{f((n+1)t)\}$ l'est évidemment aussi. Il s'ensuit, d'après le critère de Weyl

$$(4)\qquad \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k f((n+1)t)} = 0 \qquad (k=1,2,\ldots)$$

pour presque tout t positif. L'intégration de (4) dans (0,1) et le changement de l'ordre des opérations conduit à la relation

$$(5)\qquad \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\int_0^1 e^{2\pi i k f((n+1)t)}\,dt = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} J_m^k = 0$$

$(k=1,2,\ldots)$. Or, on a $|J_m^k|\leqslant 1$ pour $m=0,1,\ldots,$ $k=1,2,\ldots,$ et un théorème de A. F. Andersen sur les moyennes des suites numériques aux termes bornées permet de déduire de la dernière égalité (5) la relation (3) et d'achever la démonstration dans le cas (b) par la voie prise dans le cas (a).

Remarque. Cette Note a été conçue à propos d'une question posée par M. H. Steinhaus.

PAŃSTWOWY INSTYTUT MATEMATYCZNY
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ÉTAT

[2]) H. Steinhaus, *Sur les fonctions indépendantes (VI)*, Studia Mathematica 9 (1940), p. 121-131; Théorème 1, p. 123.

(Reçu par la Rédaction le 25. 5. 1951).

On the Cesàro means

by

L. JEŚMANOWICZ (Toruń).

1. Given a series $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ we put

$$s_n^\alpha = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu A_{n-\nu}^\alpha,\qquad \sigma_n^\alpha = \frac{s_n^\alpha}{A_n^\alpha},\qquad \text{for } n=0,1,2,\ldots,$$

where

$$A_0^\alpha = 1,\qquad A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!} = \binom{n+\alpha}{n}.$$

The expressions s_n^α are called *n-th Cesàro sums of order α* for the series Σa_ν; the expressions σ_n^α denote *n-th Cesàro means of order α* for this series, A_n^α being the binomial coefficients. We shall say that the series Σa_ν is *summable by the α-th Cesàro means*, or *summable (C,α), to the sum s*, if $\sigma_n^\alpha \to s$ as $n\to\infty$. The following well-known relations[1]) will often be used in the sequel:

$$A_n^{\alpha+\beta+1} = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^\alpha A_{n-\nu}^\beta,\qquad s_n^{\alpha+\beta+1} = \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu^\alpha A_{n-\nu}^\beta,$$

$$A_n^\alpha \cong \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},\qquad \alpha\neq -1,-2,\ldots$$

2. J. M. Hyslop has generalized[2]) the following theorems well-known in the theory of Cesàro means:

Theorem 1. *If $\sigma_n^\alpha = O(n^\beta)$, $\beta>0$, then the series $\Sigma a_\nu \nu^{-\beta-\varepsilon}$ is summable (C,α) for every $\varepsilon>0$.*

[1]) Cf. A. Zygmund, *Trigonometrical Series*, Monografie Matematyczne, Warszawa 1935, p. 42.

[2]) J. M. Hyslop, *On the approach of a series to its Cesàro limit*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2), 5 (1938), p. 182-201.