Sur l'équation de translation

par

J. ACZÉL (Miskolc), L. KALMÁR (Szeged)
et J. G.-MIKUSIŃSKI (Wrocław).

1. Par l'équation de translation, nous entendons l'équation fonctionnelle

$$f[f(x,u),v]=f(x,u+v). \tag{1}$$

Dans l'hypothèse de continuité et de stricte monotonie, on peut démontrer facilement que toute solution de (1) est de la forme

$$f(x,u)=\Omega[\omega(x)+u], \tag{2}$$

où Ω est la fonction inverse de ω.

En effet, en posant $\Omega(u)=f(x_0,u)$, avec un x_0 fixé arbitrairement, il vient de (1) que

$$f[\Omega(u),v]=\Omega(u+v), \tag{3}$$

d'où il résulte aussitôt, pour $u=\omega(x)$, la formule (2).

Il est intéressant qu'il suffit d'admettre la stricte monotonie de f (sans postuler la continuité) pour que la proposition soit encore valable; la continuité de f en est alors une conséquence. Pareillement, il suffit d'admettre la continuité de f (pourvu que f ne soit pas constante par rapport à u) pour assurer sa stricte monotonie et la validité de la proposition. De plus, il suffit d'admettre la continuité de f par rapport à l'une quelconque des variables x, u, et la stricte monotonie par rapport à l'autre.

Nous préciserons ces théorèmes dans la suite, en admettant pour f des hypothèses encore plus faibles. En particulier, il suffira,

dans certains cas, d'admettre que l'équation (2) soit satisfaite pour une seule valeur de x [1]).

2. Dans ce qui suit, nous supposons que la fonction $f(x,u)$ soit définie pour

$$a<x<b, \qquad -\infty<u<+\infty$$

et que ses valeurs appartiennent à (a,b); les nombres a et b peuvent d'ailleurs être finis ou infinis.

Théorème 1. *Si $f(x,u)$ satisfait aux quatre conditions suivantes:*

(α) *il existe un nombre $x_0 \in (a,b)$ tel que*

$$f[f(x_0,u),v]=f(x_0,u+v) \qquad \textit{pour } -\infty<u,v<+\infty;$$

(β) *la fonction $\Omega(u)=f(x_0,u)$ est strictement monotone;*

(γ) $\lim\limits_{u\to-\infty}\Omega(u)=a$ *et* $\lim\limits_{u\to\infty}\Omega(u)=b$ *ou* $\lim\limits_{u\to-\infty}\Omega(u)=b$ *et* $\lim\limits_{u\to\infty}\Omega(u)=a$;

(δ) *la fonction $f(x,u)$ est strictement monotone par rapport à x pour un ensemble non dénombrable de valeurs de u;*

alors $f(x,u)$ est de la forme (2), *où $\omega(x)$ est une fonction continue et strictement monotone, transformant l'intervalle (a,b) en $(-\infty,\infty)$.*

Démonstration. Supposons que Ω soit *croissante*. Nous montrerons qu'elle est *continue*. En effet, comme l'ensemble de points de discontinuité est dénombrable pour toute fonction monotone, il existe pour tout u_0 un v_0 tel que Ω est continue au point u_0+v_0, et que $f(x,v_0)$ est strictement monotone par rapport à x, c'est ce qui est une conséquence de (δ). On a

---

[1]) Sur ce point, nous tenons de donner une remarque générale: Soit X un ensemble quelconque et U un ensemble, où une opération associative $\circ$ est définie, c'est-à-dire une opération satisfaisant aux conditions suivantes:

1° si $u,v\in U$, alors $u\circ v\in U$;

2° si $u,v,w\in U$, on a $(u\circ v)\circ w=u\circ(v\circ w)$.

Soit $f(x,u)$ une fonction définie sur le produit cartésien $X\times U$, dont les valeurs appartiennent à X. Si, pour un certain $x_0\in X$, on a

$$f[f(x_0,u),v]=f(x_0,u\circ v) \qquad \text{pour tous les } u,v\in U,$$

alors l'équation

$$f[f(x,u),v]=f(x,u\circ v)$$

est satisfaite pour tous les x de la forme $x=f(x_0,w)$ $(w\in U)$ et pour tous les $u,v\in U$.

On a, en effet,

$$f\{f[f(x_0,w),u],v\}=f[f(x_0,w\circ u),v]=f[x_0,(w\circ u)\circ v]=f[x_0,w\circ(u\circ v)]=f[f(x_0,w),u\circ v].$$

$$f[\Omega(u), v_0] = \Omega(u+v_0), \tag{4}$$

et l'on voit que la fonction $f(x, v_0)$ est encore croissante. On a donc

$$f[\Omega(u_0-)-, v_0] = \Omega(u_0+v_0) = f[\Omega(u_0+)+, v_0]\ ^{2)},$$

d'où $\Omega(u_0-) = \Omega(u_0+)$, ce qui entraîne la continuité de Ω au point u_0. Comme u_0 peut être arbitraire, la continuité de Ω se trouve démontrée.

En vertu de (γ), Ω transforme l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ en (a, b).

En posant $u = \omega(x)$ dans (3), ω étant la fonction inverse de Ω, on obtient la formule désirée (2).

Théorème 2. *Le théorème* 1 *reste vrai, quand on y supprime la condition* (γ) *et remplace en même temps* (α) *et* (β) *par les conditions plus fortes*:

(α') *l'équation* (1) *est satisfaite pour tout* $x \in (a, b)$ *et pour tous les* u, v *réels*;

(β') *la fonction* $f(x, u)$ *est strictement monotone par rapport à* u, *pour toute valeur* $x \in (a, b)$.

Démonstration. Il suffit évidemment de démontrer que les conditions (α') et (β') entraînent (γ). Fixons x_0 arbitrairement et supposons que la fonction $\Omega(u) = f(x_0, u)$ soit *croissante*. On a alors $\Omega(\infty) = b$. En effet, si l'on avait $\Omega(\infty) = b' < b$, on aurait

$$b' = \lim_{u \to \infty} \Omega(u-1) = \lim_{u \to \infty} f[\Omega(u), -1] \leqslant f(b', -1) < f(b', 0),$$

en contradiction avec l'égalité $f(b', 0) = b'$ qui résulte de

$$f[f(b', 0), v] = f(b', v).$$

Pareillement on a $\Omega(-\infty) = a$.

Si Ω est *décroissante*, on aura, d'une façon analogue, $\Omega(+\infty) = a$ et $\Omega(-\infty) = b$.

Théorème 3. *Le théorème* 1 *reste vrai, quand la condition* (β) *y est remplacée par la suivante*:

(β'') *la fonction* $\Omega(u) = f(x_0, u)$ *est continue, mais non constante.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que (β'') entraîne (β). Si $\Omega(u_1) = \Omega(u_2)$, on a

$$\Omega[u + (u_2 - u_1)] = f[\Omega(u_2), u - u_1] = f[\Omega(u_1), u - u_1] = \Omega(u),$$

[2]) Nous écrivons généralement $\varphi(\xi+) = \lim_{0<h\to 0} \varphi(\xi+h)$ et $\varphi(\xi-) = \lim_{0<h\to 0} \varphi(\xi-h)$.

donc $u_2 - u_1$ est la période de Ω. Si $u_1 < u_2$, il existe, en vertu de (β''), pour tout $\varepsilon > 0$ deux nombres u_1' et u_2' tels que $u_1 < u_1' < u_2' < u_2$, $u_2' - u_1' < \varepsilon$ et $\Omega(u_1') = \Omega(u_2')$, donc la fonction Ω a des périodes arbitrairement petites et se réduit à une constante, par contre à (β''). Donc $\Omega(u_1) \neq \Omega(u_2)$ pour $u_1 \neq u_2$, c'est ce qui entraîne la stricte monotonie de Ω.

Théorème 4. *Le théorème* 1 *reste vrai, quand les conditions* (γ) *et* (δ) *y sont remplacées par les deux suivantes*:

(γ') *la fonction* $f(x, u)$ *ne se réduit à la constante pour aucune valeur fixe de* $x \in (a, b)$;

(δ') *la fonction* $f(x, u)$ *est continue par rapport à* x *pour tout* u *fixe.*

Démonstration. Supposons que Ω soit *croissante*. Nous montrerons qu'elle est *continue*. Soit u_0 un nombre réel quelconque. Il existe un v_0 tel que Ω est continue au point $u_0 + v_0$. On a

$$f[\Omega(u+v_0), -v_0] = \Omega(u),$$

d'où la continuité de Ω au point u_0.

Supposons que $\Omega(\infty) = b' < b$. Si $u \to \infty$, il vient de (3) $f(b', v) = b'$ pour tout v réel; or, ceci contredit à (γ'). Nous avons ainsi démontré que $\Omega(\infty) = b$. Pareillement on a $\Omega(-\infty) = a$. Donc la fonction Ω transforme l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ en (a, b) et l'on peut achever la démonstration comme dans le cas du théorème 1.

Théorème 5. *Le théorème* 1 *reste vrai, quand les conditions* (β), (γ) *et* (δ) *y sont remplacées par* (β''), (γ') *et* (δ') [3]).

Démonstration. En vertu du théorème 4, il suffit de remarquer que (β'') entraîne (β) (voir la démonstration du théorème 3).

3. On peut donner des exemples qui montrent qu'aucune des conditions (α), (β) etc. ne peut être supprimée dans les théorèmes précédents. Il nous semble qu'il serait superflu de reproduire tous ces exemples dans cet article. Nous tenons cependant à donner un autre, qui montre qu'en remplaçant l'hypothèse de continuité de f par celle de mesurabilité, on ne peut plus affirmer que toute solution de (1) soit de la forme (2) [4]).

[3]) La deuxième partie de la condition (β'') peut être supprimée car elle est contenue dans (γ').

[4]) Ici, il n'y a donc pas d'analogie avec l'équation $f(x+y) = f(x) + f(y)$, où l'hypothèse de mesurabilité de f conduit aux mêmes conséquences que celle de continuité.

Remarquons d'abord que, I étant un intervalle quelconque (ouvert ou fermé), si

(5) $$\Omega_1[\omega_1(x)+u]=\Omega_2[\omega_2(x)+u] \qquad x\epsilon I \text{ et } -\infty<u<+\infty,$$

alors $\omega_2(x)=c+\omega_1(x)$, où c est une constante. Autrement dit, si une fonction $f(x,u)$ se laisse représenter dans la forme (2), la fonction ω est déterminée à une constante additive près.

En effet, en posant $x=\Omega_1(0)$ et $u=\omega_1(y)$ dans la formule (5), on a $y=\Omega_2\{\omega_2[\Omega_1(0)]+\omega_1(y)\}$, d'où $\omega_2(y)=\omega_2[\Omega_1(0)]+\omega_1(y)$.

Soit maintenant $\omega(x)$ une fonction mesurable à période 1, qui transforme l'intervalle $(0,1]$ biunivoquement en $(-\infty,+\infty)$. Soit $\Omega_n(u)$ la fonction inverse de la fonction $\omega(x)$ réduite à l'intervalle $(n-1,n]$. Alors la fonction

$$f(x,u)=\Omega_n[\omega(x)+u] \qquad (n-1<x\leqslant n;\quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

satisfait à l'équation (1), mais elle ne peut pas être représentée par une seule formule du type (2). En effet, si l'on avait $f(x,u)=\tilde{\Omega}[\tilde{\omega}(x)+u]$ pour tous x et u réels, la fonction $\tilde{\omega}(x)$ admettrait une seule fois, dans l'intervalle $(-\infty,+\infty)$, toute valeur réelle. D'autre part, on aurait $\tilde{\omega}(x)=c+\omega(x)$, ce qui est absurde.

Nous avons traité, dans cet article, l'équation (1) dans le domaine $x\epsilon(a,b)$; $u,v\epsilon(-\infty,+\infty)$. On peut la traiter aussi dans d'autres domaines; dans ces cas la discussion serait différente. Nous laissons de côté ces considérations.

Remarquons enfin que, étant posé $\bar{f}(x,y)=f(x,\log y)$, l'équation (1) devient

$$\bar{f}[\bar{f}(x,y),z]=\bar{f}(x,yz);$$

cette dernière équation a été étudiée par S. Gołąb [5]) en connexion avec certains problèmes de la théorie des objets géométriques.

[5]) S. Gołąb, *Über eine Funktionalgleichung der Theorie der geometrischen Obiekte*, Wiadomości Matematyczne 45 (1938), p. 97-137.

(Reçu par la Rédaction le 5. 6. 1950).

On the existence of the generalized limit

by

R. SIKORSKI (Warszawa).

This paper contains two theorems which are a generalization of the well known theorems[1]) concerning the existence of the so-called generalized limit and of the generalized integral of real bounded sequences and functions.

The method of the proof is topological. It is based on Čech's compactification of completely regular spaces[2]).

§ 1. Let A be a *directed set*, i. e. an abstract set with a transitive relation $>$ having the property: given $\alpha,\beta\epsilon A$, there is a $\gamma\epsilon A$ such that $\gamma>\alpha$ and $\gamma>\beta$.

Every mapping defined on the directed set A will be called an *A-sequence*. A-sequences will be denoted by $\mathfrak{x}=\{x_\alpha\}$, $\mathfrak{y}=\{y_\alpha\}$ etc.

Suppose all terms x_α of an A-sequence $\mathfrak{x}$ belong to a topological space X. The closure of the set of all x_α will be denoted by $C(\mathfrak{x})$. A point $x_0\epsilon X$ is said to be a *limit point of* $\mathfrak{x}$ if for every neighbourhood U of x_0 and for every $\beta\epsilon A$ there is an $\alpha>\beta$ with $x_\alpha\epsilon U$. The set of all limit points of $\mathfrak{x}$ will be denoted by $L(\mathfrak{x})$. Evidently $L(\mathfrak{x})\subset C(\mathfrak{x})$. If $C(\mathfrak{x})$ is compact (=bicompact), then $L(\mathfrak{x})\neq 0$.

[1]) S. Mazur, *O metodach sumowalności*, Księga Pamiątkowa I Polskiego Zjazdu Matematycznego (Polish), Supplément aux Annales de la Société Polonaise de Mathématique (1929), p. 103; S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Warszawa 1932, p. 31-34.

[2]) E. Čech, *On bicompact spaces*, Annals of Mathematics 38 (1937), p. 823-844.