Sur les fonctions indépendantes (IX)

(Séries des fonctions positives)

par

CZ. RYLL-NARDZEWSKI et H. STEINHAUS (Wrocław).

Cette Note est consacrée à la démonstration de la propriété suivante des séries dont les termes sont des fonctions positives: quand on remplace chaque terme par un autre qui lui est équivalent, on obtient une autre série équivalente à la première; or, parmi toutes ces séries, celle dont tous les termes sont non-décroissants est convergente dans un ensemble de mesure maxima, tandis que celle dont les termes sont indépendants est convergente dans un ensemble de mesure minima.

Voilà les explications et les définitions nécessaires pour donner un sens précis à l'énoncé précédent:

Les termes des séries, dont il sera question dans la suite, sont des fonctions $f(t)$ de t, définies pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ et mesurables (L). Une telle fonction a une *distributrice* $F(\alpha)$ bien définie pour $-\infty < \alpha < \infty$,

$$F(\alpha) = |\underset{t}{E}\{f(t) < \alpha\}|. \tag{1}$$

On dira que la *fonction* $f(t)$ est *équivalente* à $g(t)$, si l'on a l'identité $F(\alpha) \equiv G(\alpha)$ de leurs distributrices respectives. On écrira alors $f \sim g$. On dira que la *série* $\sum f_n(t)$ est *équivalente* à la série $\sum g_n(t)$, si l'on a $f_n \sim g_n$ pour tous les n; on écrira alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} g_n. \tag{2}$$

La relation d'équivalence des séries est évidemment reflexive, symétrique et transitive. Étant donnée une série quelconque S, on peut la considérer comme représentant d'une classe K de toutes les séries qui lui sont équivalentes. Parmi les séries appartenant à K, il y a deux qui nous intéressent tout spécialement: la série S_1 dont tous les termes sont non-décroissants comme fonc-

tions de t, et la série S_2, dont les termes sont indépendants en bloc, au sens que nous donnons à cette expression dans les Notes précédentes[1]). Nous avons à démontrer l'existence de S_1 et S_2 pour un S quelconque.

On obtient S_1 en remplaçant chaque terme f_n de S par g_n, où $g_n(t)$ est défini de la manière suivante: en désignant par $F_n(\alpha)$ la distributrice de f_n, on écrit

$$t = F_n(g), \tag{3}$$

et l'on résout l'équation (3) par rapport à g pour tous les t où cela est possible; si plusieurs valeurs g correspondent au même t, on prend la plus grande d'entre elles, qui existe, car F_n est continu à gauche; ainsi on obtient $g = g_n(t)$, fonction inverse de F_n, qui n'est pas définie pour certains sousintervalles ouverts (α, β) de $\langle 0,1 \rangle$; on comble ces lacunes en posant $g_n(t) = g_n(\alpha)$ pour $\alpha < t < \beta$. La fonction $g_n(t)$ devient ainsi une fonction bien définie. Elle est non-décroissante et sa distributrice est $F_n(\alpha)$. Si $f_n(t)$ est non-négatif dans $\langle 0,1 \rangle$, $g_n(t)$ l'est aussi.

Pour obtenir S_2, nous tirons parti d'une suite auxiliaire $\{\theta_n(t)\}$ aux propriétés suivantes[2]):

1° les fonctions θ_n sont toutes équivalentes à la fonction t dans l'intervalle $\langle 0,1 \rangle$,

2° elles sont indépendantes en bloc,

3° $\theta_n(t)$ a la période $1/2^n$ (cette propriété sera utilisée plus tard).

En remplaçant $f_n(t)$, le terme général de S, par $f_n(\theta_n(t))$, on obtient la série cherchée S_2: l'équivalence $S_2 \sim S$ résulte de 1° et l'indépendance des termes de S_2 — de 2°. Or, il y a une infinité de séries qui partagent avec S_2 les deux propriétés en question; ce fait donne lieu à la remarque suivante:

La mesure de l'ensemble des points de convergence d'une série aux termes indépendants en bloc est déterminée par les distributrices de ses termes. Pour justifier cette remarque, il suffit d'invoquer l'interprétation d'une telle série comme série numérique aux termes aléatoires indépendants, ou bien d'écrire, en employant

---

[1]) *Sur les fonctions indépendantes* I-VIII, Studia Math. 6 (1936), pp. 46, 59, 89; 7 (1938), pp. 1, 96; 9 (1940), p. 121; 10 (1948), p. 1; 11 (1949), p. 133.

[2]) H. Steinhaus, *Sur la probabilité de la convergence de séries*, Studia Math. 2 (1930), p. 21-39.

le calcul des ensembles, la définition de l'ensemble de points de convergence.

Voici maintenant l'énoncé exact:

Théorème. *Soit S une série $\sum f_n(t)$ à termes non-négatifs, K la classe de toutes les séries X équivalentes à S, $M(X)$ la mesure de l'ensemble des points t où X est convergente. Alors $M(X)$ prend sa valeur maxima pour $X=S_1$, où chaque terme de S_1 est une fonction non-décroissante de t dans $\langle 0,1\rangle$, et sa valeur minima pour $X=S_2$, où les termes de S_2 sont indépendants en bloc.*

La démonstration repose sur quelques lemmes.

Lemme 1. *Les $f_n(t)$ étant non-négatifs et indépendants, la série $\sum f_n(t)$ convergente presque partout et $E_n=\underset{t}{E}\{|f_n(t)|>1\}$, on a*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|E_n|<\infty. \tag{4}$$

Lemme 2. *Mêmes hypothèses et notations qu'au lemme 1. Posons*

$$\bar{f}_n(t)=\begin{cases} 0 & \text{pour } t\epsilon E_n, \\ f_n(t) & \text{pour } t\epsilon C_n \ (C_n=\text{complémentaire de } E_n). \end{cases}$$

Alors

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \bar{f}_n(t)\,dt<\infty. \tag{5}$$

Les lemmes 1 et 2 sont des cas particuliers du célèbre „*théorème sur les trois séries*" de Kolmogoroff[3]). Voici l'énoncé de ce théorème:

La convergence presque partout dans $\langle 0,1\rangle$ de la série $\sum f_n(t)$ à termes indépendants en bloc équivaut à (4), (5) et (C), en désignant par (C) la condition que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_{C_n} f_n^2(t)\,dt-\Big(\int_{C_n} f_n(t)\,dt\Big)^2\right\}$$

soit convergente.

Lemme 3. *Soit $\{E_n\}$ une suite des ensembles mesurables, $\{c_n\}$ une suite à termes réels, $\varphi_n(t)$ la fonction caractéristique de E_n, et soit*

$$(n)\quad c_n\geqslant 0;\qquad \sum_{n=1}^{\infty}c_n=\infty;\qquad (n)\quad |E_n|\geqslant\alpha. \tag{6}$$

[3]) Voir p.ex. P. R. Halmos, *Measure theory*, New York, 1950, p. 199.

Alors

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n(t)=\infty \tag{7}$$

pour tout élément t d'un ensemble T de mesure $|T|\geqslant\alpha$.

Désignons par $\psi(t)$ la somme de la série (7) et par Q_M l'ensemble

$$\underset{t}{E}\{\psi(t)<M\}.$$

D'après un théorème classique de Lebesgue on a

$$\int_{Q_M}\psi(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\int_{Q_M}\varphi_n(t)\,dt,$$

donc

$$M\geqslant\int_{Q_M}\psi(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}c_n|Q_ME_n|. \tag{8}$$

Nous allons démontrer que $|Q_M|\leqslant 1-\alpha$ pour tout M fini. En effet, en supposant le contraire, on obtient $|Q_M|>1-\alpha+\varepsilon$ avec un ε positif, ce qui implique, à cause de (6), $|Q_ME_n|>\varepsilon>0$ pour tous les n; or, cette inégalité donne avec (6) et (8) $M\geqslant\infty$. On a donc $|Q_k|\leqslant 1-\alpha$ pour $k=1,2,3,\ldots$ En désignant par Q la somme $\sum_{k=1}^{\infty}Q_k$, on en tire $|Q|\leqslant 1-\alpha$, à cause de $Q_1\subset Q_2\subset Q_3\subset\ldots$ Or, Q est par sa définition même l'ensemble où $\psi(t)$ est fini, l'ensemble complémentaire T défini par (7) a donc une mesure non moindre que α, c. q. f. d.

Lemme 4. *Moyennant les mêmes hypothèses sur $f_n(t)$ qu'au lemme 1, toute série $\sum g_n(t)$ équivalente avec $\sum f_n(t)$ est convergente presque partout.*

Désignons par E_n et C_n les ensembles appellés ainsi dans les lemmes 1 et 2, et par F_n et D_n les ensembles analogues relatifs à $g_n(t)$; soit $\bar{f}_n(t)$ la fonction de l'énoncé du lemme 2, et $\bar{g}_n(t)$ la fonction analogue relative à $g_n(t)$. L'équivalence $\sum f_n\sim\sum g_n$ implique immédiatement

$$(n)\quad \int_0^1\bar{f}_n(t)\,dt=\int_0^1\bar{g}_n(t)\,dt\qquad\text{et}\qquad |E_n|=|F_n|. \tag{9}$$

En vertu des lemmes 1 et 2 on tire de (9)

$$\sum_{n=1}^{\infty}|F_n|<\infty\qquad\text{et}\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\bar{g}_n(t)\,dt<\infty. \tag{10}$$

icm©

La seconde inégalité (10) entraîne, par un théorème classique de Fatou, la convergence presque partout de la série $\sum \bar{g}_n(t)$, car les $g_n(t)$, donc les $\bar{g}_n(t)$, sont non-négatifs. Or, les $\bar{g}_n$ ne diffèrent des g_n que dans les ensembles F_n, et la première inégalité (10) donne pour tout ε positif un m tel que $\sum_{n=m}^{\infty} |F_n| < \varepsilon$; il en résulte qu'en remplaçant dans la série $\sum \bar{g}_n(t)$ les $\bar{g}_n$ par les g_n, on ne la change que dans un ensemble de mesure ε tout au plus, et l'on voit que la série $\sum g_n(t)$ ne peut diverger que dans cet ensemble; ε étant arbitraire $(\varepsilon > 0)$, la thèse du lemme est établie.

Lemme 5. *Toute série $\sum f_n(t)$ aux termes indépendants en bloc est convergente presque partout ou divergente presque partout.*

Ce lemme bien connu résulte, par exemple, de ce que, si l'on écrit $f_n(\theta_n(t))$ au lieu de $f_n(t)$, les distributrices des termes de la série ne changent pas (propriété 1⁰ du système $\{\theta_n(t)\}$); l'indépendance des termes subsiste (propriété 2⁰), donc, d'après la remarque du début, la mesure de l'ensemble des points de convergence ne change non plus. Or, les $f_n(\theta_n(t))$ ayant la période commune $1/2^q$ à partir de $n=q$ (propriété 3⁰), cet ensemble est identique à sa translation $1/2^q$, qui est arbitrairement petite; il est connu que les ensembles admettant des translations arbitrairement petites en eux-mêmes ont la mesure 0 ou 1.

Démonstration du théorème. La deuxième partie de la thèse, à savoir

$$\text{minimum de } M(X) = M(S_2), \qquad X \epsilon K, \tag{11}$$

résulte facilement des lemmes 4 et 5. En effet, si $M(S_2)=1$, on a d'après le lemme 4 $M(X)=1$ pour tout $X \epsilon K$, si $M(S_2)=0$, (11) devient évident, et le lemme 5 exclue un tiers cas.

Pour démontrer la première partie, supposons les $f_n(t)$ non-décroissants et $\sum g_n \sim \sum f_n$; on suppose, bien entendu, $f_n(t) \geqslant 0$ pour tous les n et pour presque tous les t, ce qui implique la même propriété pour les g_n. Soit t_0 la borne supérieure des t pour lesquels la série $\sum f_n(t)$ est convergente. Si $t_0=1$, tout est démontré, si $t_0<1$, on pose $c_n = f_n(t_0+\varepsilon)$ avec $0<\varepsilon<1-t_0$. Il est évident que

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \infty. \tag{12}$$

Soit, par définition,

$$G_n = \underset{t}{E}\{g_n(t) \geqslant c_n\};$$

on aura, à cause de $f_n \sim g_n$ et de la monotonie de $f_n(t)$,

$$|G_n| = |\underset{t}{E}\{f_n(t) \geqslant f_n(t_0+\varepsilon)\}| \geqslant 1 - t_0 - \varepsilon. \tag{13}$$

Soit $\gamma_n(t)$ la fonction caractéristique de G_n; on aura évidemment

$$g_n(t) \geqslant c_n \gamma_n(t) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \text{ et chaque } n; \tag{14}$$

d'autre part, le lemme 3 donne, en vertu de (12) et (13), au moins $1-t_0-\varepsilon$ comme mesure de l'ensemble de divergence de $\sum c_n \gamma_n(t)$; (14) permet de dire autant de la mesure de l'ensemble de divergence de $\sum g_n(t)$ et, comme ε est aussi petit que l'on veut, cette mesure est au moins $1-t_0$, donc la mesure de l'ensemble de convergence est tout au plus t_0; or, la non-décroissance des $f_n(t)$ et la définition de t_0 donnent exactement t_0 comme mesure de l'ensemble de convergence de $\sum f_n(t)$, ce qui établit la première partie de la thèse.

En employant un langage moins précis mais plus suggestif, résumons le théorème en disant qu'une suite des variables aléatoires non-négatives, dont chacune a une distribution donnée d'avance, donne lieu à une série dont la convergence est d'autant plus probable que la dépendance mutuelle des variables est plus stricte.

PAŃSTWOWY INSTYTUT MATEMATYCZNY
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ÉTAT

(Reçu par la Rédaction le 25. 5. 1950).