STUDIA MATHEMATICA 118 (2) (1996)

Régularité du temps local brownien dans les espaces de Besov–Orlicz

par

B. BOUFOUSSI (Nancy)

Abstract. Let $(B_t, t \geq 0)$ be a linear Brownian motion and $(L(t,x),\ t > 0,\ x \in \mathbb{R})$ its local time. We prove that for all $t > 0$, the process $(L(t,x),\ x \in [0,1])$ belongs almost surely to the Besov–Orlicz space $B^{1/2}_{M_1,\infty}$ with $M_1(x) = e^{|x|} - 1$.

1. Introduction et notations. En 1992, Z. Ciesielski, G. Kerkyacharian et B. Roynette ont montré dans [CKR], en utilisant les techniques de l'approximation constructive des fonctions, que les espaces de type Besov (pour la définition voir le paragraphe 2) sont isomorphes à des espaces de suites réelles. Ceci présente d'une part une généralisation du théorème de Ciesielski [C1], qui établit un isomorphisme entre l'espace de Hölder $\mathcal{C}_\alpha([0,1])$ pour $0 < \alpha < 1$ et un espace de suites réelles; d'autre part, cette caractérisation a permis de donner une extension des résultats de N. Wiener [W] et de P. Lévy [L] sur la régularité de la trajectoire du mouvement brownien, et d'obtenir des théorèmes d'appartenance de certaines trajectoires aléatoires à ces espaces (processus de Lévy stable, mouvement brownien fractionnaire). Dans cet article, nous allons utiliser les mêmes techniques pour montrer que la trajectoire spatiale du temps local brownien appartient presque sûrement à un espace de type Besov–Orlicz, ce qui généralise le résultat de [BR], à savoir que cette trajectoire appartient presque sûrement à l'espace de Besov $B^{1/2}_{p,\infty}$ pour tout $p > 2$, et en particulier ceci entraîne qu'elle est localement p.s. hölderienne d'indice strictement plus petit que 1/2.

Nous tenons à remercier le referee qui nous a fait part de plusieurs remarques importantes, notamment la remarque 3.

Les paragraphes 2 et 3 sont consacrés à rappeler la définition des espaces de Besov–Orlicz et le théorème de [CKR] qui donne une caractérisation d'une large classe de ces espaces en termes d'espaces de suites réelles. Nous allons considérer par la suite les notations suivantes :

1991 *Mathematics Subject Classification*: 41A15, 60J55.

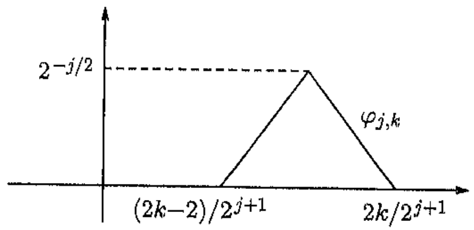
Soit $\{\chi_{j,k} : j \geq 0,\ k = 1, 2, \ldots, 2^j\}$ la base de Haar définie par

$$\chi_{j,k} = \begin{cases} 2^{j/2} & \text{sur } [(2k-2)/2^{j+1}, (2k-1)/2^{j+1}[, \\ -2^{j/2} & \text{sur } [(2k-1)/2^{j+1}, 2k/2^{j+1}[, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Le système de fonctions $\{\chi_{j,k}\}_{j,k}$, complété par $\chi_{0,0} = 1_{[0,1]}$, forme une base orthonormée de $L^2([0,1])$. Pour les mêmes indices que ci-dessus, les fonctions de Schauder sont données par

$$\forall t \in [0,1], \quad \varphi_{j,k}(t) := \int_0^t \chi_{j,k}(s)\,ds,$$
$$\varphi_{0,0}(t) := t1_{[0,1]}(t) \quad \text{et} \quad \varphi_{-1}(t) := 1_{[0,1]}(t).$$

Notons que pour j fixé ce sont des fonctions à supports disjoints pour $k \neq k'$.



Nous savons que toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ s'écrit

$$(1) \quad \forall t \in [0,1], \quad f(t) = f_{-1}\varphi_{-1}(t) + f_0\varphi_{0,0}(t) + \sum_{j\geq 0}\sum_{k=1}^{2^j} f_{j,k}\varphi_{j,k}(t),$$

où $f_{-1} = f(0)$, $f_0 = f(1) - f(0)$, et les coefficients $f_{j,k}$ sont des évaluations de f données par

$$(2) \quad f_{j,k} := 2^{j/2}\left\{2f\left(\frac{2k-1}{2^{j+1}}\right) - \left\{f\left(\frac{2k-2}{2^{j+1}}\right) + f\left(\frac{2k}{2^{j+1}}\right)\right\}\right\}.$$

2. Espaces de Besov–Orlicz. Une fonction $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est dite une $\mathcal{N}$-*fonction* si elle est nulle en 0, continue, convexe, croissante sur $\mathbb{R}_+$ et vérifiant

$$\lim_{x\to\infty} M(x)/x = \infty, \qquad \lim_{x\to 0} M(x)/x = 0.$$

Soit $I = [0,1]$ et f une fonction mesurable définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Notons

$$\varrho(f, M) := \int_I M(f(t))\,dt.$$

L'*espace d'Orlicz* $L^*_M(I)$ associé à la $\mathcal{N}$-fonction M est donné par

$$L^*_M(I) := \Big\{f : I \to \mathbb{R} \text{ mesurable} : \sup_{\varrho(g,N)<\infty} \Big|\int_I f(t)g(t)\,dt\Big| < \infty\Big\},$$

où N est la $\mathcal{N}$-fonction complémentaire de M (pour la théorie de base des espaces d'Orlicz nous renvoyons à [KR]).

L'espace $L^*_M(I)$ muni de la norme $\|f\|_M := \sup_{\varrho(g,N)\leq 1} |\int_I f(t)g(t)\,dt|$ est un espace de Banach; de plus, cette norme est équivalente à la norme de Luxemburg [Lu] donnée par

$$(3) \quad \|f\|_M \sim \inf_{\lambda>0} \frac{1}{\lambda}\{1 + \varrho(\lambda f, M)\}.$$

Exemple. Dans le cas où $M(u) = |u|^p/p$ $(p > 1)$, l'espace d'Orlicz associé est $L^p(I)$.

Pour tout $h \geq 0$, on note $I_h := \{x \in I : x + h \in I\}$ et pour tout $t > 0$, on définit le module de continuité d'une fonction f de $L^*_M(I)$ par

$$(4) \quad \omega_M(f,t) := \sup_{h\leq t} \|1_{I_h}(\cdot)(f(h+\cdot) - f(\cdot))\|_M.$$

Définition. Pour tout $\alpha \in]0,1[$ et $1 \leq q \leq \infty$, l'*espace de Besov–Orlicz* $B^\alpha_{M,q}(I)$ est l'espace des fonctions f de $L^*_M(I)$ telles que

$$\int_0^1 (t^{-\alpha}\omega_M(f,t))^q \frac{dt}{t} < \infty.$$

$B^\alpha_{M,q}(I)$ muni de la norme

$$\|f\|^\alpha_{M,q} := \|f\|_M + \left(\int_0^1 (t^{-\alpha}\omega_M(f,t))^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

est un espace de Banach (si $q = \infty$, alors on remplace la norme de L^q par la norme uniforme).

Notons que si $M(u) = |u|^p/p$, $p \geq 1$, alors le module de continuité donné par (4) est pris en norme $L^p(I)$, et donc nous retrouvons les espaces de Besov standards $B^\alpha_{p,q}$ dont la caractérisation est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1. *Soit $\alpha \in]0,1[$, $1 \leq p, q \leq \infty$. Si $\alpha > 1/p$, alors l'espace $B^\alpha_{p,q}$ est un espace de fonctions continues isomorphe à un espace de suites réelles et on a l'équivalence des normes suivantes :*

$$(5) \quad \|f\|^\alpha_{p,q} \sim \max\Big\{|f_{-1}|, |f_0|, \Big(\sum_{j\geq 0} 2^{-jq(1/2-\alpha+1/p)}\Big(\sum_{k=1}^{2^j} |f_{j,k}|^p\Big)^{q/p}\Big)^{1/q}\Big\},$$

où les coefficients f_{-1}, f_0 et $f_{j,k}$ sont donnés par (1).

La démonstration de ce théorème se trouve dans [CKR] et il est essentiel de noter que les constantes de l'équivalence (5) ne dépendent pas de p pour $p \geq p_0$, où p_0 est suffisamment grand.

Remarque 1. En particulier, les espaces de Besov $B^{1/2}_{p,\infty}$ sont caractérisés par l'équivalence des normes suivantes :

$$(6)\qquad \|f\|^{1/2}_{p,\infty} \sim \max\Big\{|f_{-1}|, |f_0|, \sup_{j\geq 0} 2^{-j/p}\Big(\sum_{k=1}^{2^j}|f_{j,k}|^p\Big)^{1/p}\Big\}, \qquad p<\infty.$$

Si $p=\infty$, alors pour tout $\alpha \in]0,1[$, on a

$$(7)\qquad \|f\|^{\alpha}_{\infty,\infty} \sim \max\{|f_0|, |f_1|, \sup_{j,k} 2^{-j(1/2-\alpha)}|f_{j,k}|\}.$$

Il est bien connu, d'après [C1], que le terme de droite de (7) est équivalent à la norme de l'espace de Banach $\mathcal{C}_\alpha$ des fonctions définies de $[0,1]$ à valeurs réelles et hölderiennes d'indice α; de plus, remarquons que d'après la définition des espaces de Besov, la norme $\|\cdot\|^{\alpha}_{\infty,\infty}$ coïncide avec la norme de $\mathcal{C}_\alpha$. Par ailleurs, puisque la norme Besov est croissante en fonction de p et de α, il est facile d'établir les injections suivantes :

$$(8)\qquad \mathcal{C}_{1/2} \hookrightarrow B^{1/2}_{p,\infty} \hookrightarrow \mathcal{C}_\alpha \quad \text{si } \alpha<1/2.$$

Dans [CKR] et [Ro] nous trouvons le résultat suivant: la trajectoire $t\to B_t$ ($t\in[0,1]$) appartient p.s. à $B^{1/2}_{p,\infty}$ pour tout $p>2$, ce qui améliore clairement d'après (8) la régularité classique de cette trajectoire.

3. Caractérisation des espaces de Besov–Orlicz associés à des $\mathcal{N}$-fonctions de type exponentiel. Soit $\beta>0$. Comme dans [C2] nous considérons les $\mathcal{N}$-fonctions M_β définies par

$$(9)\qquad M_\beta(x)=\begin{cases}\exp|x|^\beta-1 & \text{si } \beta\geq 1,\\ E_\beta(x)-E_\beta(0) & \text{si } 0<\beta<1,\end{cases}$$

où $E_\beta(x)=E_\beta(-x)$ est le prolongement de la partie convexe de e^{x^β} sur $[x_\beta,\infty[$ par sa tangente au point x_β (e^{x^β} change de concavité en x_β).

Notons $\nu=1/\beta$ et $L_\nu(I):=\{f\in L^1(I): \|f\|_p=\mathcal{O}(p^\nu),\ \forall p\geq 1\}$.

$L_\nu(I)$ muni de la norme $|f|_\nu := \sup_{p\geq 1}\|f\|_p/p^\nu$ est un espace de Banach. Nous renvoyons à [C2] (théorème 3.4) pour la démonstration du résultat suivant :

Théorème 2. *Soit $\beta>0$ et $\nu=1/\beta$. Les espaces de Banach $L^*_{M_\beta}(I)$ et $L_\nu(I)$ sont isomorphes et il existe une constante $C_\nu>0$ telle que pour toute fonction f de $L^*_{M_\beta}(I)$, on a*

$$\frac{1}{C_\nu}|f|_\nu \leq \|f\|_{M_\beta} \leq C_\nu|f|_\nu.$$

La démonstration de notre résultat (théorème 4) est basée sur le théorème suivant qui donne la caractérisation des espaces de Besov–Orlicz $B^{1/2}_{M_\beta,\infty}$ en termes d'espaces de suites réelles :

Théorème 3. *Pour tout $\beta>0$, soit M_β la $\mathcal{N}$-fonction donnée par (9). L'espace de Besov–Orlicz $B^{1/2}_{M_\beta,\infty}$ est isomorphe à un espace de suites réelles et on a l'équivalence des normes suivantes :*

$$(10)\qquad \|f\|^{1/2}_{M_\beta,\infty} \sim \max\Big\{|f_{-1}|, |f_0|, \sup_{j\geq 0}\sup_{p\geq 1}\frac{1}{p^\nu}2^{-j/p}\Big(\sum_{k=1}^{2^j}|f_{j,k}|^p\Big)^{1/p}\Big\},$$

où $\nu=1/\beta$.

La démonstration de ce théorème découle facilement du théorème 2, de la caractérisation des espaces $B^{1/2}_{p,\infty}$ donnée par (6) et des inégalités simples suivantes :

$$\forall p_0\geq 1,\qquad p_0^{-\nu}\sup_{p\geq 1}\frac{\|f\|_p}{p^\nu} \leq \sup_{p\geq p_0}\frac{\|f\|_p}{p^\nu} \leq \sup_{p\geq 1}\frac{\|f\|_p}{p^\nu}.$$

Remarque 2. Nous pouvons déduire à partir du théorème 3 et de la remarque 1 les injections suivantes :

$$(11)\qquad \mathcal{C}_{1/2} \hookrightarrow B^{1/2}_{M_\beta,\infty} \hookrightarrow B^{1/2}_{p,\infty} \quad \forall\beta>0,\ \forall p>2.$$

4. Régularité de la trajectoire spatiale du temps local brownien dans les espaces de Besov–Orlicz. Soit $(B_t,\ t\geq 0)$ un mouvement brownien linéaire et $(L(t,x),\ t\geq 0,\ x\in\mathbb{R})$ la version p.s. continue en (t,x) de son temps local dont l'existence est assurée par le théorème de H. Trotter dans [T]. Nous trouvons dans la littérature plusieurs résultats sur les propriétés de Markov, de martingale et sur l'estimation de certains modules de continuité du processus $(L(t,x),\ t\geq 0,\ x\in\mathbb{R})$; citons par exemple les travaux de D. Ray [Ra], H. P. McKean [M], F. B. Knight ([K1] et [K2]), S. M. Berman ([Be1] et [Be2]) et E. Perkins [P].

Z. Ciesielski a montré dans [C2] que la trajectoire du mouvement brownien $t\to B_t$, $t\in[0,1]$, appartient p.s. à l'espace de Besov–Orlicz $B^{1/2}_{M_2,\infty}$, donc si on note $T(1):=\inf\{t>0: B_t=1\}$, alors d'après le théorème de Ray–Knight ([RY], p. 420), le processus $Z_x:=L(T(1),1-x)$, $x\in[0,1]$, est un carré de Bessel de dimension 2 partant de 0 et il n'est pas difficile de montrer qu'il vérifie la même régularité Besov–Orlicz que la trajectoire brownienne.

Dans cet article nous allons montrer le résultat suivant :

Théorème 4. *Pour tout $t>0$, le processus $(L(t,x),\ x\in[0,1])$ appartient presque sûrement à l'espace de Besov–Orlicz $B^{1/2}_{M_1,\infty}$, où $M_1(x)=e^{|x|}-1$.*

Vu les injections (11) et (8), notons que ce théorème est plus fin que l'appartenance du temps local brownien à $B^{1/2}_{p,\infty}$ pour tout $p > 2$, résultat obtenu dans [BR] (en particulier, notre théorème montre que la trajectoire est localement p.s. hölderienne d'indice $\alpha < 1/2$).

Pour établir le théorème 4 nous avons besoin de quelques lemmes préliminaires :

LEMME 1. *Il existe une constante universelle $C > 0$ telle que pour tout $p \geq 1$ et toute martingale $(M_t,\ t \geq 0)$ nulle en 0, on a*

$$\mathbb{E}(M^{*p}_{\infty}) \leq C^p p^{p/2} \mathbb{E}(\langle M\rangle^{p/2}_{\infty}),$$

où $M^*_\infty := \sup_{s\geq 0}|M_s|$ et $\langle M\rangle_t$ est le processus à variation quadratique associé à M.

Le lemme 1 est un résultat de Barlow et Yor ([BY], Proposition 4.3); sa démonstration repose sur le lemme de Garsia–Rodemich–Rumsey, et il donne en particulier une bonne estimation de la constante de l'inégalité de Burkholder–Davis–Gundy.

LEMME 2. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $p \geq 1$, on a*

$$\mathbb{E}\{\sup_x L^p(1,x)\} \leq C^p p^{p+2}.$$

Démonstration. Soit $\lambda > 0$ et T_λ un temps exponentiel indépendant du mouvement brownien. Nous allons utiliser le résultat suivant donné par A. N. Borodin dans [Bo] :

$$\forall h > 0, \quad \mathbb{P}[\sup_x L(T_\lambda, x) \geq h] = \frac{4h\sqrt{2\lambda}\, e^{h\sqrt{2\lambda}}}{(e^{h\sqrt{2\lambda}} - 1)^2} \cdot \frac{J_1(h\sqrt{2\lambda})}{J_0(h\sqrt{2\lambda})},$$

où J_1 et J_0 sont les fonctions de Bessel modifiées données par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{(n+k)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n}.$$

Il est facile de voir que pour tout $t > 0$, on a $J_1(t)/J_0(t) \leq t/2$, et par suite pour un choix de $\lambda > 0$ suffisamment grand, on a

$$\forall h > 0, \quad \mathbb{P}[\sup_x L(T_\lambda, x) > h] \leq Ch^2 e^{-h\sqrt{2\lambda}}, \tag{12}$$

où C est une constante positive.

Si on note $L^*_t = \sup_x L(t,x)$, alors on a

$$\mathbb{E}[L^{*p}_1] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}(L^{*p}_1 1_{\{n \leq L^*_1 < n+1\}}) \leq \sum_{n\geq 0} (n+1)^p \mathbb{P}[L^*_1 \geq n].$$

Puisque $\{L^*_1 \geq n,\ T_\lambda \geq 1\} \subset \{L^*_{T_\lambda} \geq n\}$ et en vertu de l'hypothèse d'indépendance entre T_λ et le mouvement brownien, on a

$$\mathbb{P}\{L^*_1 \geq n\} \leq \mathbb{P}\{L^*_{T_\lambda} \geq n\} e^\lambda$$

et en appliquant (12), on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[L^{*p}_1] &\leq 1 + Ce^\lambda \sum_{n\geq 1}(n+1)^p n^2 e^{-n\sqrt{2\lambda}}\\ &\leq 1 + 2^p Ce^\lambda \sum_{n\geq 1} n^{p+2} e^{-n\sqrt{2\lambda}}.\end{aligned}$$

Le lemme 2 découle facilement de cette dernière inégalité. ∎

Démonstration du théorème 4. 1. Nous allons nous limiter à $t = 1$, le cas générale s'en déduit par un simple changement d'échelle. Puisque la trajectoire $x \to L(1,x)$ est p.s. continue, considérons sa décomposition par rapport à la base de Schauder :

$$L(1,x) = x_{-1}\varphi_{-1}(x) + x_0\varphi_0(x) + \sum_{j\geq 0}\sum_{k=1}^{2^j} x_{j,k}\varphi_{j,k}(x), \qquad \forall x \in [0,1].$$

D'après le théorème 3, il suffit de prouver que

$$\sup_{j\geq 0}\sup_{p\geq 1} \frac{2^{-j/p}}{p}\Big(\sum_{k=1}^{2^j}|x_{j,k}|^p\Big)^{1/p} < \infty \quad \text{p.s.} \tag{13}$$

Puisque la norme $\|\cdot\|^{1/2}_{p,\infty}$ est croissante en p, il suffit de voir (13) pour les p entiers pairs.

2. Appliquons maintenant la formule de Tanaka à $\varphi_{j,k}(B_1)$:

$$\varphi_{j,k}(B_1) = \int_0^1 \chi_{j,k}(B_s)\, dB_s + x_{j,k}.$$

Les fonctions $(\varphi_{j,k})_k$ sont à supports disjoints pour $k \neq k'$ et $\|\varphi_{j,k}\|_\infty = 2^{-j/2}$, ce qui entraîne

$$\frac{2^{-j/p}}{p}\Big(\sum_{k=1}^{2^j}|\varphi_{j,k}(B_1)|^p\Big)^{1/p} \leq \frac{2^{-j/p}2^{-j/2}}{p}.$$

Il suffit donc de montrer que

$$\sup_{j\geq 0}\sup_{p\geq 1} \frac{2^{-j/p}}{p}\Big(\sum_{k=1}^{2^j}|M_{j,k}(1)|^p\Big)^{1/p} < \infty \quad \text{p.s.}, \tag{14}$$

où $M_{j,k}(t) := \int_0^t \chi_{j,k}(B_s)\, dB_s$ sont des martingales orthogonales en k.

3. Nous noterons, pour tout entier $q \ge 1$,

$$A_{j,k}(s) := \int_0^s \chi_{j,k}^2(B_u)\,du, \quad \forall s \in [0,1],$$

$$\gamma_j(q) := \Big|\sum_{k=1}^{2^j}\int_0^1 M_{j,k}^q(s)\chi_{j,k}(B_s)\,dB_s\Big|,$$

$$\widetilde{\gamma}_j(q) := \Big|\sum_{k=1}^{2^j}\int_0^1 M_{j,k}^q(s)A_{j,k}(s)\chi_{j,k}(B_s)\,dB_s\Big|,$$

$$H_j(q) := \gamma_j(q) + \widetilde{\gamma}_j(q),$$

$$u_j(q) := \sum_{k=1}^{2^j}|M_{j,k}|^q,$$

$$v_j(q) := \sum_{k=1}^{2^j}\int_0^1 M_{j,k}^q(s)\,dA_{j,k}(s),$$

$$a := \sup\{L_1^*, 1\}.$$

Montrons le lemme suivant :

Lemme 3. (i) *Pour tout $s \in [0,1]$, on a $A_{j,k}(s) \le L_1^* \le a$.*

(ii) *Il existe deux constantes $C > 0$ et $K > 0$ telles que pour tout entier $q \ge 2$, on a*

$$\mathbb{E}\{H_j^2(q)\} \le KC^q q^{2q+1}2^j.$$

Démonstration. Le point (i) découle simplement de la formule d'occupation et du fait que les fonctions $(\chi_{j,k})_{j,k}$ forment une base orthonormée de $L^2([0,1])$.

Pour le point (ii) remarquons que les martingales $\int_0^s M_{j,k}^q(u)\chi_{j,k}(B_u)\,dB_u$ sont orthogonales en k, donc

$$\mathbb{E}\{\gamma_j^2(q)\} = \sum_k \mathbb{E}\Big\{\int_0^1 M_{j,k}^{2q}(u)\chi_{j,k}^2(B_u)\,du\Big\}$$

$$\le \sum_k \mathbb{E}\Big\{\sup_{s\in[0,1]} M_{j,k}^{2q}(s)\int_0^1 \chi_{j,k}^2(B_u)\,du\Big\}.$$

Appliquons l'inégalité de Hölder et le lemme 1 :

$$\mathbb{E}\{\gamma_j^2(q)\} \le C^q q^q \sum_k \Big\{\mathbb{E}\Big(\int_0^1 \chi_{j,k}^2(B_s)\,ds\Big)^{2q}\Big\}^{1/2}\Big\{\mathbb{E}\Big(\int_0^1 \chi_{j,k}^2(B_s)\,ds\Big)^2\Big\}^{1/2}.$$

En appliquant le point (i) nous obtenons

$$\mathbb{E}\{\gamma_j^2(q)\} \le C^q q^q \sum_k \{\mathbb{E}(L_1^{*2q})\}^{1/2}\{\mathbb{E}(L_1^*)^2\}^{1/2}.$$

Notons $K_1 = \{\mathbb{E}(L_1^*)^2\}^{1/2}$. Le lemme 2 entraîne que

$$\mathbb{E}\{\gamma_j^2(q)\} \le C^q K_1 q^{2q+1}2^j.$$

En utilisant les mêmes arguments pour $\widetilde{\gamma}_j(q)$, nous avons

$$\mathbb{E}\{\widetilde{\gamma}_j^2(q)\} \le C^q q^{2q+1}2^j K_2$$

avec $K_2 = \{\mathbb{E}(L_1^{*4})\}^{1/2}$, ce qui entraîne le lemme 3. ■

4. Pour tout entier pair $p \ge 2$, appliquons la formule d'Itô à $M_{j,k}^p(1)$:

$$M_{j,k}^p(1) = p\int_0^1 M_{j,k}^{p-1}(s)\chi_{j,k}(B_s)\,dB_s + \frac{p(p-1)}{2}\int_0^1 M_{j,k}^{p-2}(s)\,dA_{j,k}(s),$$

ce qui entraîne

$$u_j(p) \le p\gamma_j(p-1) + \frac{p(p-1)}{2}v_j(p-2). \tag{15}$$

Montrons maintenant que pour tout entier pair $p \ge 2$, on a la formule de récurrence suivante :

$$v_j(p) \le a^{p/2}\Big[\sum_{i=0}^{p/2-1}\frac{p!}{(p-2i-1)!}H_j(p-2i-1) + p!v_j(0)\Big]. \tag{16}$$

Remarquons qu'en vertu de (15), l'inégalité (16) reste vraie si on remplace $v_j(p)$ par $u_j(p)$. Pour la démonstration de (16) nous allons nous limiter à $p = 2$, pour le cas général il suffit d'utiliser les mêmes techniques et une récurrence sur p.

Appliquons la formule d'Itô à $M_{j,k}^2(s)$:

$$\forall s \in [0,1], \quad M_{j,k}^2(s) = 2C_{j,k}(s) + A_{j,k}(s)$$

avec $C_{j,k}(s) := \int_0^s M_{j,k}(u)\chi_{j,k}(B_u)dB_u$. Par une intégration par partie on obtient

$$\int_0^1 M_{j,k}^2(s)\,dA_{j,k}(s)$$

$$= 2C_{j,k}(1)A_{j,k}(1) - 2\int_0^1 M_{j,k}(s)A_{j,k}(s)\chi_{j,k}(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}A_{j,k}^2(1)$$

$$= M_{j,k}^2(1)A_{j,k}(1) - 2\int_0^1 A_{j,k}(s)M_{j,k}(s)\chi_{j,k}(B_s)\,dB_s - \frac{1}{2}A_{j,k}^2(1).$$

Dans la deuxième égalité on a écrit $2C_{j,k}(1) = M_{j,k}^2(1) - A_{j,k}(1)$, ce qui entraîne d'après (15) et le point (i) du lemme 3 que

$$v_j(2) \le a\{u_j(2) + v_j(0) + 2\widetilde{\gamma}_j(1)\} \le a\{2H_j(1) + 2v_j(0)\}.$$

5. Terminons maintenant la démonstration du théorème 4 : Pour tout entier pair $p \ge 2$, d'après (15) et (16) nous avons

$$\frac{2^{-j/p}}{p}\Big\{\sum_{k=1}^{2^j} M_{j,k}^p(1)\Big\}^{1/p} \le \sqrt{a}\,\frac{2^{-j/p}}{p}\Big\{\sum_{i=0}^{p/2-1}\frac{p!}{(p-2i-1)!}H_j(p-2i-1)\Big\}^{1/p} + \sqrt{a}\,2^{-j/p}\Big(\frac{p!}{p^p}\Big)^{1/p}\Big\{\sum_{k=0}^{2^j}\int_0^1 \chi_{j,k}^2(B_s)\,ds\Big\}^{1/p}.$$

Regardons d'abord le deuxième terme à droite de l'inégalité. Puisque $\sum_{k=1}^{2^j}\chi_{j,k}^2(B_s) = 2^j 1_{[0,1]}(B_s)$, on a

$$2^{-j/p}\Big(\frac{p!}{p^p}\Big)^{1/p}\Big\{\sum_{k=0}^{2^j}\int_0^1 \chi_{j,k}^2(B_s)\,ds\Big\}^{1/p} = \Big(\frac{p!}{p^p}\Big)^{1/p}\Big\{\int_0^1 I_{[0,1]}(B_s)\,ds\Big\}^{1/p}.$$

Il est donc clair que

$$\sup_{j\ge 0}\sup_{p\ge 1}\sqrt{a}\,2^{-j/p}\Big(\frac{p!}{p^p}\Big)^{1/p}\Big\{\sum_{k=0}^{2^j}\int_0^1 \chi_{j,k}^2(B_s)\,ds\Big\}^{1/p} < \infty \quad \text{p.s.}$$

Pour terminer, soit $\lambda > 0$. Notons

$$\mathcal{A}_{j,p} := \frac{2^{-j/p}}{p}\Big\{\sum_{i=0}^{p/2-1}\frac{p!}{(p-2i-1)!}H_j(p-2i-1)\Big\}^{1/p}.$$

En écrivant $p!/(p-2i-1)! \le p^{2i+1}$, il découle de l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev que

$$\mathbb{P}[\mathcal{A}_{j,p} > \lambda] \le 2^{-2j}\Big(\frac{\lambda^{-p}}{2}\Big)^2\sum_{i=0}^{p/2-1} p^{2(2i+2-p)}\mathbb{E}\{H_j^2(p-2i-1)\}.$$

En appliquant l'estimation donnée par le lemme 3, on obtient

$$\mathbb{P}[\mathcal{A}_{j,p} > \lambda] \le 2^{-j}KC^p\frac{p^4}{\lambda^{2p}}$$

et pour un choix de λ sufisamment grand on a

$$\sum_{j,p}\mathbb{P}[\mathcal{A}_{j,p} > \lambda] < \infty.$$

Le lemme de Borel–Cantelli termine la démonstration du théorème 4. ∎

Remarque 3. 1. Nous avons préféré pour des raisons de clarté étudier le processus $L(t,x)$ pour les x dans $[0,1]$. Pour être plus précis, il faut

noter que puisque pour tout $t > 0$, la trajectoire $x \to L(t,x)$ est p.s. à support compact, c'est-à-dire que p.s. il existe un entier $n \ge 0$ tel que $\operatorname{supp} L(t,x) \subset I_n$, où $I_n := [-2^{n-1}, 2^{n-1}]$; alors en considérant les fonctions de Schauder $\varphi_{j,k}^n(s) := 2^{n/2}\varphi_{j,k}(s2^{-n})$ et en utilisant les mêmes techniques que ci-dessus, nous pouvons voir que la trajectoire $x \to L(t,x)$ appartient p.s. à $B_{M_1,\infty}^{1/2}(I_n)$.

2. Puisque le temps local est une fonctionnelle spécifique du mouvement brownien, il serait intéressant de formuler les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonctionnelle quelconque du mouvement brownien soit suffisamment régulière.

Bibliographie

[BY] M. T. Barlow and M. Yor, *Semi-martingale inequalities via the Garsia–Rodemich–Rumsey lemma, and applications to local times*, J. Funct. Anal. 49 (1982), 198–229.

[Be1] S. M. Berman, *Sojourns and Extremes of Stochastic Processes*, Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, 1992.

[Be2] —, *Local times and sample function properties of stationary Gaussian processes*, Trans. Amer. Math. Soc. 137 (1969), 277–299.

[Bo] A. N. Borodin, *Distribution of integral functionals of Brownian motion*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 119 (1982), 19–38 (in Russian).

[BR] B. Boufoussi et B. Roynette, *Le temps local brownien appartient p.s. à l'espace de Besov $\mathscr{B}_{p,\infty}^{1/2}$*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 316 (1993), 843–848.

[C1] Z. Ciesielski, *On the isomorphisms of the spaces H_α and m*, Bull. Acad. Polon. Sci. 8 (1960), 217–222.

[C2] —, *Orlicz spaces, spline systems, and Brownian motion*, Constr. Approx. 9 (1993), 191–222.

[CKR] Z. Ciesielski, G. Kerkyacharian et B. Roynette, *Quelques espaces fonctionnels associés à des processus gaussiens*, Studia Math. 107 (1993), 171–204.

[K1] F. B. Knight, *Random walks and a sojourn density process of Brownian motion*, Trans. Amer. Math. Soc. 109 (1963), 56–86.

[K2] —, *Essentials of Brownian Motion and Diffusion*, Math. Surveys 18, Amer. Math. Soc., Providence, 1981.

[KR] M. A. Krasnosel'skiĭ and Ya. B. Rutitskiĭ, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, Noordhoff, Groningen, 1961.

[L] P. Lévy, *Le Mouvement Brownien*, Mém. Sci. Math. 126, Gauthier-Villars, Paris, 1954.

[Lu] W. A. J. Luxemburg, *Banach function spaces*, Thesis, Technische Hogeschool te Delft, 1955; MR 17 (1956), 285.

[M] H. P. McKean, *A Hölder condition for Brownian local time*, J. Math. Kyoto Univ. 1 (1962), 195–201.

[P] E. Perkins, *Local time is a semi-martingale*, Z. Warsch. Verw. Gebiete 60 (1982), 79–117.

[Ra] D. B. Ray, *Sojourn times of diffusion processes*, Illinois J. Math. 7 (1963), 615–630.

[RY] D. Revuz and M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer, 1991.

[Ro] B. Roynette, *Mouvement brownien et espaces de Besov*, Stochastics Stochastics Rep. 43 (1993), 221–260.

[T] H. Trotter, *A property of Brownian motion paths*, Illinois J. Math. 2 (1958), 425–433.

[W] N. Wiener, *Generalized harmonic analysis*, Acta Math. 55 (130), 117–258.

Institut E. Cartan
B.P. 239
54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex, France

Received March 9, 1995 (3429)
Revised version August 21, 1995

STUDIA MATHEMATICA 118 (2) (1996)

Positive operator bimeasures and a noncommutative generalization

by

KARI YLINEN (Turku)

Abstract. For C^*-algebras A and B and a Hilbert space H, a class of bilinear maps $\Phi : A \times B \to L(H)$, analogous to completely positive linear maps, is studied. A Stinespring type representation theorem is proved, and in case A and B are commutative, the class is shown to coincide with that of positive bilinear maps. As an application, the extendibility of a positive operator bimeasure to a positive operator measure is shown to be equivalent to various conditions involving positive scalar bimeasures, pairs of commuting projection-valued measures or pairs of commuting positive operator measures.

1. Introduction and notation. Positive operator measures (PO-measures for short), i.e. measures whose values are positive operators on a Hilbert space, play a central role e.g. in spectral theory and quantum mechanics. Early references on these aspects include [1] and [6]. An important issue is what is called "amalgamation" in [1]: Given σ-rings Σ_i and two commuting PO-measures $E_i : \Sigma_i \to L(H)$, $i = 1, 2$, one wants to construct a PO-measure E defined on the product σ-ring Σ of Σ_1 and Σ_2, such that $E(X \times Y) = E_1(X)E_2(Y)$ for all $X \in \Sigma_1$ and $Y \in \Sigma_2$. It is now (contrary to the situation in 1966, see [1, p. 87]) generally known that even in the case of spectral measures such a construction is not always possible (see our Remark 4.4 for references to counterexamples). A related question in the context of scalar bimeasures (i.e., separately σ-additive functions) has also been addressed in the literature: When is a positive bimeasure actually a measure? (See Remark 4.4 for references, also to the case of not necessarily positive bimeasures not discussed here.)

In this paper we show that these questions (concerning PO-measures, spectral measures or positive bimeasures) are equivalent (Theorem 4.3). This

1991 *Mathematics Subject Classification*: 28A10, 28B05, 46L05.

This paper was written while the author was visiting the University of Cambridge. The hospitality enjoyed at the Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences and at the Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics is gratefully acknowledged, as well as the financial support from the Academy of Finland.