[QV] S.-L. Qiu and M. K. Vamanamurthy, *Sharp estimates for complete elliptic integrals*, SIAM J. Math. Anal., to appear.

[QVV1] S.-L. Qiu, M. K. Vamanamurthy and M. Vuorinen, *Inequalities for distortion functions and quasiconformal mappings*, manuscript, 1994.

[QVV2] —, —, —, *Sharp inequalities for Hersch–Pfluger distortion function*, Preprint 93, Nov. 1995, Dept. Math., University of Helsinki.

[VV] M. K. Vamanamurthy and M. Vuorinen, *Functional inequalities, Jacobi products, and quasiconformal maps*, Illinois J. Math. 38 (1994), 394–419.

[Vu1] M. Vuorinen, *Conformal Geometry and Quasiregular Mappings*, Lecture Notes in Math. 1319, Springer, 1988.

[Vu2] —, *Singular values, Ramanujan modular equations, and Landen transformations*, manuscript 1994.

[W] C.-F. Wang, *On the precision of Mori's theorem in Q-mapping*, Science Record 4 (1960), 329–333.

[WW] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, 4th ed., Cambridge Univ. Press, 1958.

[Z] J. Zając, *The distortion function Φ_K and quasihomographies*, in: Current Topics in Analytic Function Theory, H. M. Srivastava and S. Owa (eds.), World Sci., Singapore, 1992, 403–428.

DEPARTMENT OF BASIC SCIENCES
HANGZHOU INSTITUTE
OF ELECTRONICS ENGINEERING (HIEE)
HANGZHOU 310037, P.R. CHINA

MATHEMATICS DEPARTMENT
FIN-00014 UNIVERSITY OF HELSINKI
HELSINKI, FINLAND
E-mail: VUORINEN@CSC.FI

Received March 20, 1995
Revised version August 16, 1995 (3437)

STUDIA MATHEMATICA 117 (3) (1996)

Sur la conorme essentielle

par

MOSTAFA MBEKHTA et RODOLPHE PAUL (Lille)

Résumé. Pour un opérateur T borné sur un espace de Hilbert dans lui-même, nous montrons que $\gamma(\pi(T)) = \sup\{\gamma(T+K) : K \text{opérateur compact}\}$, où γ est la conorme (the reduced minimum modulus) et $\pi(T)$ est la classe de T dans l'algèbre de Calkin. Nous montrons aussi que ce supremum est atteint.

D'autre part, nous montrons que les opérateurs semi-Fredholm caractérisent les points de continuité de l'application $T \mapsto \gamma(\pi(T))$.

Dans ce travail X denotera un espace de Banach et $B(X)$ l'algèbre des opérateurs bornés de X dans lui-même. Si $T \in B(X)$, on notera respectivement $N(T)$, $R(T)$ et $\sigma(T)$ le noyau, l'image et le spectre de T.

Notons par $\gamma(T)$ la *conorme* de T, définie par

$$\gamma(T) = \inf\{\|Tx\| : d(x, N(T)) = 1\} \quad (\gamma(T) = \infty \text{ si } T = 0).$$

Alors (cf. [4], [9])

$$\gamma(T) > 0 \quad \text{si et seulement si} \quad R(T) \text{ fermé}; \tag{0.1}$$

$$\gamma(T) = \gamma(T^*). \tag{0.2}$$

Il est facile de voir que si $V \in B(X)$ est une isométrie alors

$$\gamma(T) = \gamma(VT). \tag{0.3}$$

D'autre part, la conorme joue un rôle important dans la théorie des perturbations des opérateurs semi-Fredholm. Rappelons qu'un opérateur T est dit *semi-Fredholm* (resp. *Fredholm*) si $R(T)$ est fermé et $\min\{\dim N(T), \operatorname{codim} R(T)\} < \infty$ (resp. si $R(T)$ est fermé et $\max\{\dim N(T), \operatorname{codim} R(T)\} < \infty$). Dans ce cas, on définit l'*indice* de T par

$$\operatorname{ind}(T) = \dim N(T) - \operatorname{codim} R(T).$$

Rappelons le résultat suivant ([4, Théorème V.1.6]) :

1991 *Mathematics Subject Classification*: 47A53, 47A55.
Key words and phrases: Calkin algebra, reduced minimum modulus, semi-Fredholm operators.

(0.4) Si T est semi-Fredholm et $S \in B(X)$ avec $\|T - S\| < \gamma(T)$ alors S est semi-Fredholm et $\operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(S)$.

Si $X = H$ est un espace de Hilbert, C. Apostol [2] a remarqué que

$$\gamma(T) = \inf\{\sigma(|T|) \setminus \{0\}\}, \tag{0.5}$$

où $|T| = (T^*T)^{1/2}$.

Si A est une C^*-algèbre et $a \in A$, notons par $L_a : A \to A$ l'opérateur défini par $L_a x = ax$ si $x \in A$. Alors, la conorme de $a \in A$ sera par définition $\gamma(a) = \gamma(L_a)$. Dans [8], on trouve les résultats suivants : si $a \in A$ alors

$$\gamma(a) = \inf\{\sigma(|a|) \setminus \{0\}\}; \tag{0.6}$$

$$\gamma(a)^2 = \gamma(|a|)^2 = \gamma(a^*a) = \gamma(aa^*) = \gamma(|a^*|)^2 = \gamma(a^*)^2. \tag{0.7}$$

Notons $K(H)$ l'idéal des opérateurs compacts et $C(H) = B(H)/K(H)$ l'algèbre de Calkin (voir, par exemple, [6]). Soit $\pi : B(H) \to C(H)$ la surjection canonique. D'après le théorème d'Atkinson, on a

$$\sigma(\pi(T)) = \sigma_{\mathrm{e}}(T), \tag{0.8}$$

où $\sigma_{\mathrm{e}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ n'est pas Fredholm}\}$ est le spectre essentiel.

Soit $T \in B(H)$. Alors $\gamma(\pi(T))$ sera appelée la *conorme essentielle* de T et sera notée $\gamma_{\mathrm{e}}(T)$. En utilisant (0.6), (0.7) et (0.8), on obtient

$$\gamma_{\mathrm{e}}(T) = \gamma_{\mathrm{e}}(|T|) = \inf\{\sigma_{\mathrm{e}}(|T|) \setminus \{0\}\}, \tag{0.9}$$

$$\gamma_{\mathrm{e}}(T) = \gamma_{\mathrm{e}}(T + K) \geq \gamma(T + K), \quad \forall K \in K(H). \tag{0.10}$$

THÉORÈME 1. *Soit* $T \in B(H)$. *Alors*

$$\gamma_{\mathrm{e}}(T) = \sup_{K \in K(H)} \gamma(T + K). \tag{1.1}$$

Démonstration. D'après (0.10), il suffit de montrer l'inégalité

$$\sup_{K \in K(H)} \gamma(T + K) \geq \gamma_{\mathrm{e}}(T). \tag{1.2}$$

Si $\gamma_{\mathrm{e}}(T) = 0$ alors l'égalité (1.1) est évidente. Supposons que $\gamma_{\mathrm{e}}(T) > 0$. Alors d'après (0.9), $]0, \gamma_{\mathrm{e}}(T)[\subset \varrho_{\mathrm{e}}(|T|) = \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{e}}(|T|)$.

Si $]0, \gamma_{\mathrm{e}}(T)[\subset \varrho(|T|) = \mathbb{C} \setminus \sigma(|T|)$, alors il est clair que $\gamma(T) \geq \gamma_{\mathrm{e}}(T)$. Par conséquent, $\sup_{K \in K(H)} \gamma(T + K) \geq \gamma(T) \geq \gamma_{\mathrm{e}}(T)$ et donc (1.2) est démontrée.

Supposons que $]0, \gamma_{\mathrm{e}}(T)[\not\subset \varrho(|T|)$. Alors il existe une suite de points distincts $(\lambda_n)_{n \geq 1} \subset\ ]0, \gamma_{\mathrm{e}}(T)[$ telle que

$$]0, \gamma_{\mathrm{e}}(T)[\setminus (\lambda_n)_{n \geq 1} \subset \varrho(|T|), \tag{1.3}$$

(1.4) les seuls points d'accumulation éventuels de la suite $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ sont 0 et $\gamma_{\mathrm{e}}(T)$.

Puisque $|T| \geq 0$ et $\lambda_n \in \sigma(|T|) \cap \varrho_{\mathrm{e}}(|T|)$ pour tout $n \geq 1$, on a

$$H = R(|T| - \lambda_n I) \oplus N(|T| - \lambda_n I), \tag{1.5}$$

la décomposition (1.5) est orthogonale et la dimension de $N(|T| - \lambda_n I)$ est finie.

Soit P_n la projection orthogonale sur $N(|T| - \lambda_n I)$. Alors $P_n^2 = P_n = P_n^*$, $P_n P_m = P_m P_n = P_n \delta_{n,m}$ et $|T| P_n = P_n |T| = \lambda_n P_n$.

Soit $\delta < \gamma_{\mathrm{e}}(T)$. Posons

$$I_\delta = \{n \geq 1 : \lambda_n \leq \delta\}.$$

Alors pour tout $x \in H$, la série $\sum_{n \in I_\delta} P_n x$ est convergente. En effet, $\|\sum_{n \in I_\delta} P_n x\|^2 = \sum_{n \in I_\delta} \|P_n x\|^2 \leq \|x\|^2$.

Soit $P_\delta x = \sum_{n \in I_\delta} P_n x$. Alors $P_\delta \in B(H)$, $P_\delta^2 = P_\delta = P_\delta^*$ et $P_\delta |T| = |T| P_\delta$.

Montrons que $|T| P_\delta$ est compact.

Si I_δ est fini, alors P_δ est un opérateur de rang fini. Par conséquent, $|T| P_\delta$ est aussi de rang fini et donc compact.

Si I_δ est infini, alors $\lambda_n \to 0$ quand $n \to \infty$ (cf. (1.4)). On peut supposer que la suite $(\lambda_n)_{n \geq 1,\, n \in I_\delta}$ est décroissante. Soit $x \in H$. On a

$$\Big\| |T| P_\delta x - \sum_{\substack{n=1 \\ n,m \in I_\delta}}^{m-1} |T| P_n x \Big\|^2 = \Big\| \sum_{\substack{n \geq m \\ n,m \in I_\delta}} \lambda_n P_n x \Big\|^2$$

$$= \sum_{\substack{n \geq m \\ n,m \in I_\delta}} \lambda_n^2 \|P_n x\|^2 \leq \lambda_m^2 \sum_{\substack{n \geq m \\ n,m \in I_\delta}} \|P_n x\|^2 \leq \lambda_m^2 \|x\|^2.$$

D'où

$$\Big\| |T| P_\delta - \sum_{\substack{n=1 \\ n,m \in I_\delta}}^{m-1} |T| P_n \Big\| \leq \lambda_m \to 0 \quad \text{quand } m \to \infty.$$

Donc $|T| P_\delta$ est compact comme limite d'opérateurs de rang fini dans $B(H)$.

Montrons qu'on a l'inclusion suivante :

$$]0, \delta] \subset \varrho(|T|(I - P_\delta)). \tag{1.6}$$

Puisque pour tout $\lambda \in\ ]0, \delta]$, $|T| - \lambda I$ est Fredholm d'indice zéro et $|T| P_\delta$ compact, $|T|(I - P_\delta) - \lambda I$ est Fredholm d'indice zéro pour tout $\lambda \in\ ]0, \delta]$. Donc, pour démontrer (1.6), il suffit de montrer que $N(|T|(I - P_\delta) - \lambda I) = \{0\}$ pour $\lambda \in\ ]0, \delta]$.

Soit $x \in N(|T|(I - P_\delta) - \lambda I)$. Alors

$$x = (I - P_\delta)|T| \lambda^{-1} x \quad \text{et} \quad (|T| - \lambda I) x = P_\delta |T| x.$$

D'où $(|T| - \lambda I) x = P_\delta |T| (I - P_\delta) |T| \lambda^{-1} x = 0$. Par conséquent, $x \in N(|T| - \lambda I)$.

Si $\lambda \neq \lambda_n$, $n \in I_\delta$, alors $|T| - \lambda I$ est inversible (d'après (1.3)) et donc $x = 0$.

Si $\lambda = \lambda_n$, $n \in I_\delta$, alors $x \in N(|T| - \lambda_n I)$ et donc $P_\delta x = x$. En outre, $\lambda_n x = |T|(I - P_\delta)x = |T|(I - P_\delta)P_\delta x = 0$. D'où $x = 0$, ce qui établit (1.6).

Comme $|T|(I - P_\delta) = |T(I - P_\delta)|$, (1.6) implique que $\gamma(T(I - P_\delta)) \geq \delta$.

D'autre part, on voit sans difficulté que $|T|P_\delta$ compact implique TP_δ compact. Par conséquent, pour tout $\delta < \gamma_e(T)$, il existe TP_δ compact tel que $\gamma(T - TP_\delta) \geq \delta$. D'où, pour tout $\delta < \gamma_e(T)$, $\sup_{K \in K(H)} \gamma(T + K) \geq \delta$, ce qui montre l'inégalité (1.2) et donc le théorème est démontré.

Le théorème suivant montre que le supremum dans (1.1) est atteint.

THÉORÈME 2. *Soit $T \in B(H)$. Alors il existe un opérateur compact K tel que*

$$\gamma_e(T) = \gamma(T + K). \tag{2.1}$$

Démonstration. Si $\gamma_e(T) = 0$ alors $\gamma(T) = 0$. Dans ce cas il suffit de prendre $K = 0$. Si $\gamma_e(T) = \infty$ alors T est compact. Dans ce cas il suffit de prendre $K = -T$. Supposons donc $0 < \gamma_e(T) < \infty$. Alors d'après le Théorème 1, il existe $K_0 \in K(H)$ tel que $\gamma(T + K_0) > 0$. On peut supposer que $\gamma(T) = \gamma(|T|) > 0$. Alors 0 n'est pas un point d'accumulation de $\sigma(|T|)$. Si $[\gamma(T), \gamma_e(T)[\subset \varrho(|T|)$ alors $\gamma_e(T) = \gamma(T)$. Dans ce cas l'égalité (2.1) est vérifiée pour $K = 0$. Sinon $[\gamma(T), \gamma_e(T)[\cap \sigma(|T|) = (\lambda_n)_{n \geq 1}$ est une suite de points distincts avec $\gamma_e(T)$ comme seul point d'accumulation éventuel. Comme dans la preuve du Théorème 1, soit P_n la projection orthogonale sur $N(|T| - \lambda_n I)$ et $Px = \sum_{n \geq 1} P_n x$, $x \in H$. Alors l'opérateur $K_1 = \gamma_e(T)P - |T|P$ est compact (car la suite $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ est finie ou $\gamma_e(T) - \lambda_n \to 0$ quand $n \to \infty$).

Puisque $|T| = (I - P)|T| + \gamma_e(T)P - K_1$,

$$\gamma_e(T) = \gamma_e(|T|) = \gamma_e((I - P)|T| + \gamma_e(T)P).$$

Montrons que $]0, \gamma_e(T)[\subset \varrho((I - P)|T| + \gamma_e(T)P)$. Pour cela, il suffit de montrer que $N((I - P)|T| + \gamma_e(T)P - \lambda I) = 0$ pour $\lambda \in]0, \gamma_e(T)[$.

Soit $x \in N((I - P)|T| + \gamma_e(T)P - \lambda I)$. Alors

$$\lambda x = (I - P)|T|x + \gamma_e(T)Px$$

et

$$(|T| - \lambda I)x = (|T| - \gamma_e(T)I)Px = (|T| - \gamma_e(T)I)\left(\frac{\gamma_e(T)}{\lambda}\right)^n Px$$

pour tout $n \geq 1$. D'où $Px = 0$ et par conséquent $x \in N(|T| - \lambda I)$.

Si $\lambda \neq \lambda_n$, alors $|T| - \lambda I$ est inversible et donc $x = 0$.

Si $\lambda = \lambda_n$, alors $x = P_n x = Px$. D'où $(|T| - \lambda I)x = (\lambda_n - \gamma_e(T))x = 0$ et par conséquent $x = 0$.

D'où finalement,

$$\begin{aligned}\gamma_e(T) = \gamma_e(|T|) &= \gamma_e((I - P)|T| + \gamma_e(T)P) \\ &= \gamma((I - P)|T| + \gamma_e(T)P) = \gamma(|T| + K_1).\end{aligned}$$

Maintenant, soit $T = V|T|$ la décomposition polaire de T avec V une isométrie ou co-isométrie (cf. [5, Problème 106]). Par symétrie de l'adjoint, on peut supposer que V est une isométrie. En utilisant (0.3), on obtient

$$\gamma_e(T) = \gamma(|T| + K_1) = \gamma(V(|T| + K_1)) = \gamma(T + K),$$

où $K = VK_1 \in K(H)$. Par conséquent, le théorème est démontré.

$T \in B(H)$ est dit *quasi-normal* si T commute avec T^*T (cf. [5, Problème 108]). Un opérateur normal est quasi-normal.

COROLLAIRE 3. *Soit $T \in B(H)$ quasi-normal et $\{T\}' = \{S \in B(H) : TS = ST\}$ le commutant de T. Alors*

$$\gamma_e(T) = \sup_{K \in K(H) \cap \{T\}'} \gamma(T + K); \tag{3.1}$$

(3.2) *il existe $K \in K(H) \cap \{T\}'$ tel que $\gamma_e(T) = \gamma(T + K)$;*

(3.3) *si T est normal alors pour tout $n \geq 1$, il existe $K \in K(H) \cap \{T\}'$ normal tel que*

$$\gamma_e(T^n) = \gamma((T + K)^n).$$

Démonstration. Pour obtenir (3.1) et (3.2), il suffit de remarquer que T quasi-normal implique T commute avec $|T|$ et utiliser les démonstrations des Théorèmes 1 et 2. Pour la preuve de (3.3), il suffit de remarquer que l'opérateur K obtenu dans le Théorème 2 est normal et commute avec T. D'où $T + K$ est normal. D'autre part, il est facile de voir que si T est normal alors pour tout $n \geq 1$, $\gamma(T^n) = \gamma(T)^n$ et $\gamma_e(T^n) = \gamma_e(T)^n$.

D'où $\gamma_e(T^n) = \gamma_e(T)^n = \gamma(T + K)^n = \gamma((T + K)^n)$ pour tout $n \geq 1$.

CONJECTURE. Soit $T \in B(H)$ et P un polynôme à coefficients complexes. Alors il existe K compact tel que

$$\gamma_e(P(T)) = \gamma(P(T + K)).$$

Remarque. Par un raisonnement analogue à celui du Théorème 2, on peut montrer que si $T \in B(H)$ alors il existe $K \in B(H)$ compact tel que

$$\|\pi(T)\| = \|T + K\|.$$

Ce dernier résultat donne une réponse partielle à la conjecture de C. Olsen et J. Plastiras [12, p. 389] (voir aussi [1] et [13]).

Si A est une C^*-algèbre, notons $\widehat{A} = \{a \in A : \exists b \in A,\ aba = a\}$; b est appelé *inverse généralisé* de a.

D'après [7], si $a \in \overline{A}$ alors il existe $a^+ \in A$, l'*inverse de Moore–Penrose* de a, vérifiant $aa^+a = a$, $a^+aa^+ = a^+$, $(aa^+)^* = aa^+$ et $(a^+a)^* = a^+a$. Lorsque $A = C(H)$, on a le résultat suivant :

COROLLAIRE 4.

(4.1) $$\overline{C(H)} = \pi(\overline{B(H)});$$

(4.2) *si* $\pi(T) \in \overline{C(H)}$ *et* $\pi(T)^+$ *note l'inverse de Moore–Penrose de* $\pi(T)$ *dans* $C(H)$ *alors*
$$\|\pi(T)^+\| = \inf_{K\in K(H)} \|(T+K)^+\|.$$

Démonstration. Pour établir (4.1), on utilise le théorème précédent et [7, Théorème 8]. L'assertion (4.2) se déduit de [8, Théorème 2].

COROLLAIRE 5. *Si* T *est semi-Fredholm et* $S \in B(H)$ *avec* $\|T - S\| < \gamma_e(T)$ *alors* S *est semi-Fredholm et* $\operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(S)$.

Démonstration. D'après le Théorème 2, il existe $K \in K(H)$ tel que $\gamma_e(T) = \gamma(T+K)$. D'où $\|T + K - (S+K)\| < \gamma(T+K)$. D'après (0.4), $S+K$ est semi-Fredhom et $\operatorname{ind}(T+K) = \operatorname{ind}(S+K)$. Comme les opérateurs semi-Fredholm ainsi que leurs indices sont stables par les perturbations compactes, le corollaire est démontré.

Notons
$$K_0(H) = \{T \in B(H) : \dim R(T) < \infty\},$$
$$\gamma_\infty(T) = \sup_{F\in K_0(H)} \gamma(T+F)$$
et
$$\sigma_{\text{S-F}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ n'est pas semi-Fredholm}\},$$
le *spectre essentiel semi-Fredholm*.

THÉORÈME 6. *Soit* $T \in B(H)$ *semi-Fredholm. Alors* $\lim_{n\to\infty} \gamma_e(T^n)^{1/n}$ *existe et on a*
$$\lim_{n\to\infty} \gamma_e(T^n)^{1/n} = d(0, \sigma_{\text{S-F}}(T)).$$

Démonstration. Supposons T semi-Fredholm et soit $d(T)$ le rayon de la plus grande boule ouverte centrée en T et inclue dans l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm. Alors, en utilisant le Corollaire 5, on obtient
$$\gamma_\infty(T^n)^{1/n} \le \gamma_e(T^n)^{1/n} \le d(T^n)^{1/n}, \quad \forall n \ge 1.$$
Maintenant, [14, Théorème 8.2] permet de conclure.

THÉORÈME 7. *Soit* $T \in B(H)$ *avec* $\gamma(T) > 0$. *Alors*

(7.1) $$\gamma_e(T) = \gamma_\infty(T).$$

Démonstration. On utilise les notations et les arguments de la démonstration du Théorème 1. Pour démontrer l'égalité (7.1), il suffit de remarquer que $\gamma(T) > 0$ implique que 0 n'est pas un point d'accumulation de $\sigma(|T|)$. Par conséquent, pour tout $\delta < \gamma_e(T)$, I_δ est un ensemble fini. Donc TP_δ est de rang fini. D'où pour tout $\delta < \gamma_e(T)$, $\sup_{F\in K_0(H)} \gamma(T+F) \ge \delta$, et donc $\gamma_\infty(T) \ge \gamma_e(T)$.

Remarques. Donnons quelques remarques concernant l'hypothèse "$\gamma(T) > 0$" dans le Théorème 7.

Si $R(T)$ est fermé alors pour tout $F \in K_0(H)$, $R(T+F)$ est fermé. En effet, $R(T)+R(F)$ est fermé dans H comme somme d'un sous-espace fermé et d'un sous-espace de dimension finie. D'autre part, $R(T+F) \subset R(T)+R(F)$ et $\dim (R(T)+R(F))/R(T+F) < \infty$ impliquent que $R(T+F)$ est fermé dans $R(T)+R(F)$ et donc fermé dans H. Par conséquent,

(7.2) $$\gamma(T) > 0 \Leftrightarrow \gamma_\infty(T) > 0.$$

D'autre part, il facile de voir que si $T \in K(H)$ alors
$$T \notin K_0(H) \Leftrightarrow \gamma(T) = 0.$$
Donc, il résulte de (7.2) que $T \in K(H)\backslash K_0(H)$ implique $\gamma(T) = 0 = \gamma_\infty(T)$. Par contre, $\gamma_e(T) = \infty$.

EXEMPLE 1. Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\ge1}$ une base hilbertienne de H. Soit $T \in B(H)$ défini par $Te_n = \frac{1}{n}e_n$ pour $n \ge 1$. Alors $T \in K(H)\backslash K_0(H)$ et $\gamma(T) = 0 = \gamma_\infty(T) \ne \gamma_e(T) = \infty$.

EXEMPLE 2. Donnons un exemple d'opérateur $T \notin K(H)$ et tel que $\gamma(T) = \gamma_\infty(T) = 0 \ne \gamma_e(T)$. Soit H comme dans l'exemple 1 et soit P la projection orthogonale sur le sous-espace engendré par $(e_{2n})_{n\ge1}$ et $Ke_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}e_{2n-1}$, $Ke_{2n} = 0$ pour $n \ge 1$. Posons $T = P + K$. Alors $\gamma(T) = \gamma_\infty(T) = 0 \ne \gamma_e(T) = 1$.

(7.3) Il est clair que si $\gamma_e(T) = 0$ alors $\gamma(T) = \gamma_\infty(T) = \gamma_e(T) = 0$.

EXEMPLE 3. Donnons un exemple d'opérateur T tel que $\gamma_e(T) = 0$. Soit $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_n \oplus \ldots$, où $H_n = \ell^2(\mathbb{N}^*)$. Soit $T \in B(H)$ défini par $Tx = (x_n/n)_{n\ge1}$, où $x = (x_n)_{n\ge1} \in H$. Notons T_n la restriction de T à H_n. Alors $T_n : H_n \to H_n$ est un isomorphisme. Donc T n'est pas compact et pour tout opérateur compact $K \in B(H)$, $T + K = (T+K)_n : H_n \to H$ est semi-Fredholm avec $\dim N((T+K)_n) < \infty$. Soit $e_i \in H_n$, où $(e_i)_{i\ge1}$ est la base canonique de $H_n = \ell^2$. Alors, $\|(T+K)_n e_i\| \to 1/n$ quand $i \to \infty$ et $d(e_i, N((T+K)_n)) \to 1$ quand $i \to \infty$.

Or, $\gamma((T+K)_n)d(e_i, N((T+K)_n)) \le \|(T+K)_n e_i\|$, d'où, en faisant tendre $i \to \infty$, on obtient $\gamma((T+K)_n) \le 1/n$. Et comme $\gamma(T+K) \le \gamma((T+K)_n) \le 1/n$ pour tout $n \ge 1$, on en déduit que $\gamma(T+K) = 0$ pour tout compact $K \in B(H)$. Par conséquent, $\gamma_e(T) = 0$.

Points de continuité de la conorme essentielle

THÉORÈME 8. *Un opérateur $T \in B(H)$ est un point de continuité pour la fonction $\gamma_e : B(H) \to [0,\infty]$ si et seulement si $\gamma_e(T) = 0$ ou T est semi-Fredholm.*

Pour la démonstration de ce théorème on aura besoin des lemmes suivants.

LEMME 9. *La fonction $\gamma_e : B(H) \to [0,\infty]$ est semi-continue supérieurement.*

Démonstration. Conséquence immédiate de [8, Théorème 7].

LEMME 10. *Soit $T, S \in B(H)$, T semi-Fredholm. Alors*

$$\|T - S\| < \gamma_e(T) \Rightarrow |\gamma_e(T) - \gamma_e(S)| \le \|T - S\|.$$

Démonstration. Puisque T est semi-Fredholm, $\pi(T)$ est inversible à gauche ou inversible à droite dans $C(H)$. Sans perte de généralité on peut supposer que $\pi(T)$ est inversible à gauche (car sinon on considérera $\pi(T^*)$).

Soit maintenant $S \in B(H)$ tel que $\|\pi(T) - \pi(S)\| < 1/\|\pi(T)^+\|$. Alors

$$\|\pi(T)^+(\pi(T) - \pi(S))\| < 1,$$

d'où $I - \pi(T)^+(\pi(T) - \pi(S)) = \pi(T)^+\pi(S)$ est inversible. Donc

$$[\pi(T)^+\pi(S)]^{-1}\pi(T)^+\pi(S) = I,$$

ce qui implique que $\pi(S)$ est inversible à gauche. En utilisant [8, Théorème 5], on voit facilement que $|\gamma_e(T) - \gamma_e(S)| \le \|\pi(T) - \pi(S)\|$. Donc on a montré l'implication suivante :

$$\|\pi(T) - \pi(S)\| < \frac{1}{\|\pi(T)^+\|} \Rightarrow |\gamma_e(T) - \gamma_e(S)| \le \|\pi(T) - \pi(S)\|.$$

Et, comme $\gamma_e(T) = 1/\|\pi(T)^+\|$ (cf. [8, Théorème 2]) et $\|\pi(T) - \pi(S)\| \le \|T - S\|$, le lemme est démontré.

Démonstration du Théorème 8. "Si". Quand $\gamma_e(T) = 0$, la continuité de γ_e découle de sa semi-continuité supérieure (cf. Lemme 9). Supposons donc que $\gamma_e(T) > 0$ et que T est semi-Fredholm. Alors la continuité de γ_e se déduit du Lemme 10.

"Seulement si". Supposons la fonction γ_e continue au point T et $\gamma_e(T) > 0$. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que si $\|T - S\| < \alpha$ alors $\gamma_e(S) \ge \gamma_e(T)/2 = \delta$. D'autre part, l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm est dense dans $B(H)$ (cf. [5, Problème 109]). Donc il existe une suite $(T_n)_n$ d'opérateurs semi-Fredholm telle que $T_n \to T$ dans $B(H)$. Alors pour $\varepsilon = \min\{\alpha, \delta\} > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|T_N - T\| < \min\{\alpha, \delta\}$. D'où $\gamma_e(T_N) \ge \delta$ et $\|T_N - T\| < \delta$. Par conséquent, $\|T_N - T\| < \gamma_e(T_N)$. Le Corollaire 5 permet de conclure.

COROLLAIRE 11. *Soit $T \in B(H)$ avec $\gamma_e(T) > 0$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *T est un point de continuité pour la fonction $\gamma_e : B(H) \to [0,\infty]$,*

(2) *Il existe $\alpha, \beta > 0$ tel que pour tout $S \in B(H)$,*

$$\|T - S\| < \alpha \Rightarrow \gamma_e(S) \ge \beta,$$

(3) *Il existe $\alpha, \beta > 0$ tel que pour tout $S \in B(H)$,*

$$\|T - S\| < \alpha \Rightarrow \,]0,\beta[\, \subset \varrho_e(|S|),$$

(4) *Il existe $\alpha, \beta > 0$ tel que pour tout $S \in B(H)$,*

$$\|T - S\| < \alpha \Rightarrow \,]0,\beta[\, \subset \varrho_e(|S^*|),$$

(5) *T est semi-Fredholm.*

Démonstration. Les implications (1)⇒(2)⇒(3) sont facile à voir.

(3)⇔(4). Il suffit de remarquer que

$$]0,\beta[\, \subset \varrho_e(T^*T) \Leftrightarrow \,]0,\beta[\, \subset \varrho_e(TT^*)$$

et ensuite appliquer le théorème de l'application spectrale.

(3)⇒(5). Puisque l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm est dense dans $B(H)$ (cf. [5, Problème 109]), il existe $S \in B(H)$ semi-Fredholm tel que $\|T - S\| < \min\{\alpha, \beta\}$. D'où, par l'hypothèse (3), $\|T - S\| < \gamma_e(S)$. Maintenant le Corollaire 5 permet de conclure.

(5)⇒(1). Voir le Théorème 8.

Remarques. 1) Dans [10] les auteurs ont étudié les points de continuité de la fonction $\gamma : S \mapsto \gamma(S)$, où S appartient à l'ensemble des opérateurs fermés à domaines denses dans H. L'égalité (1.1) a été considérée dans [11].

2) Si T est semi-Fredholm alors

$$\gamma_e(T) = \max\{m_e(T), m_e(T^*)\},$$

où $m_e(T) = \inf\{\sigma_e(|T|)\}$. Il est clair que les Théorèmes 1 et 2 restent valable si on remplace "$\gamma_e(T)$" par "$m_e(T)$". Dans [15, Proposition 1], on trouve une version du Lemme 9 dans le cas des espaces de Banach.

3) L'égalité (1.1) ne reste plus valable lorsque $T \in B(X)$, X un espace de Banach. En effet, M. Gonzalez nous a fait remarquer qu'il existe un espace de Banach X et un opérateur $T \in B(X)$ (cf. [3, la preuve du Théorème 3.5]) tel que T est semi-Fredholm, $L_{\pi(T)}$ injectif et il existe $R_n \in B(X)$ vérifiant $\|\pi(R_n)\| = 1$ et $\|\pi(TR_n)\| \to 0$ quand $n \to \infty$. D'où $\gamma_e(T) = \gamma(L_{\pi(T)}) = 0$ et $\gamma(T) > 0$.

Remerciements. Nous tenons à remercier M. Gonzalez, J. Ph. Labrousse, K. Laursen et J. Zemánek pour toutes les discussions qui nous ont permis d'améliorer ce travail.

Références

[1] C. A. Akemann and G. K. Pedersen, *Ideal perturbations of elements in C^*-algebras*, Math Scand. 41 (1977), 117–139.

[2] C. Apostol, *The reduced minimum modulus*, Michigan Math. J. 32 (1985), 279–294.

[3] K. Astala and H.-O. Tylli, *On the bounded compact approximation property and measures of noncompactness*, J. Funct. Anal. 70 (1987), 388–401.

[4] S. Goldberg, *Unbounded Linear Operators*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[5] P. R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, D. Van Nostrand, 1967.

[6] P. de la Harpe, *Initiation à l'algèbre de Calkin*, in: Lecture Notes in Math. 725, Springer, 1978, 180–219.

[7] R. E. Harte and M. Mbekhta, *On generalized inverses in C^*-algebras*, Studia Math. 103 (1992), 71–77.

[8] —, —, *Generalized inverses in C^*-algebras II*, ibid. 106 (1993), 129–138.

[9] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, Berlin, 1966.

[10] J. Ph. Labrousse et M. Mbekhta, *Les opérateurs points de continuité pour la conorme et l'inverse de Moore-Penrose*, Houston J. Math. 18 (1992), 7–23.

[11] L. E. Labuschagne, A. Ströh and J. Swart, *The uniqueness of operational quantities in von Neumann algebras*, preprint.

[12] C. L. Olsen and J. K. Plastiras, *Quasialgebraic operators, compact perturbations, and the essential norm*, Michigan Math. J. 21 (1974), 385–397.

[13] G. K. Pedersen, *Spectral formulas in quotient C^*-algebras*, Math. Z. 148 (1976), 299–300.

[14] J. Zemánek, *Geometric characteristics of semi-Fredholm operators and their asymptotic behaviour*, Studia Math. 80 (1984), 219–234.

[15] —, *The semi-Fredholm radius of a linear operator*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 32 (1984), 67–76.

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET
TECHNOLOGIES DE LILLE
U.R.A. D 751 CNRS "GAT"
U.F.R. DE MATHÉMATIQUES
F-59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX, FRANCE

Adresse actuelle de Mostafa Mbekhta:
UNIVERSITÉ GALATASARAY
CIRAGAN CAD. NO. 102
ORTAKOY 80840
ISTANBUL, TURQUIE

Received August 10, 1995
Revised version August 18, 1995 (3450)

STUDIA MATHEMATICA 117 (3) (1996)

On the exponential Orlicz norms of stopped Brownian motion

by

GORAN PEŠKIR (Aarhus and Zagreb)

Abstract. Necessary and sufficient conditions are found for the exponential Orlicz norm (generated by $\psi_p(x) = \exp(|x|^p) - 1$ with $0 < p \le 2$) of $\max_{0\le t\le\tau} |B_t|$ or $|B_\tau|$ to be finite, where $B = (B_t)_{t\ge 0}$ is a standard Brownian motion and τ is a stopping time for B. The conditions are in terms of the moments of the stopping time τ. For instance, we find that $\|\max_{0\le t\le\tau} |B_t|\|_{\psi_1} < \infty$ as soon as

$$E(\tau^k) = O(C^k k^k)$$

for some constant $C > 0$ as $k \to \infty$ (or equivalently $\|\tau\|_{\psi_1} < \infty$). In particular, if $\tau \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ or $|N(0,\sigma^2)|$ then the last condition is satisfied, and we obtain

$$\|\max_{0\le t\le\tau} |B_t|\|_{\psi_1} \le K\sqrt{E(\tau)}$$

with some universal constant $K > 0$. Moreover, this inequality remains valid for any class of stopping times τ for B satisfying $E(\tau^k) \le C(E\tau)^k k^k$ for all $k \ge 1$ with some fixed constant $C > 0$. The method of proof relies upon Taylor expansion, Burkholder–Gundy's inequality, best constants in Doob's maximal inequality, Davis' best constants in the L^p-inequalities for stopped Brownian motion, and estimates of the smallest and largest positive zero of Hermite polynomials. The results extend to the case of any continuous local martingale (by applying the time change method of Dubins and Schwarz).

1. Introduction. The main aim of the paper is to investigate and establish necessary and sufficient conditions for the exponential integrability of the supremum of a reflecting Brownian motion taken over a random time interval (as well as of stopped Brownian motion itself).

More precisely, let $B = (B_t)_{t\ge 0}$ be a standard Brownian motion, let τ be a stopping time for B, and let $\|\cdot\|_\psi$ denote the Orlicz norm generated

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 60G40, 60J65; Secondary 46E30, 60G44, 60H05.

Key words and phrases: Brownian motion (Wiener process), stopping time, exponential Young function, exponential Orlicz norm, Doob's maximal inequality for martingales, Burkholder–Gundy's inequality, Davis' best constants, Hermite polynomial, continuous (local) martingale, Ito's integral, the quadratic variation process, time change (of Brownian motion), Kahane–Khinchin's inequalities.