STUDIA MATHEMATICA

Executive Editors: **Z. Ciesielski, A. Pełczyński, W. Żelazko**

The journal publishes original papers in English, French, German and Russian, mainly in functional analysis, abstract methods of mathematical analysis and probability theory. Usually 3 issues constitute a volume.

Detailed information for authors is given on the inside back cover. Manuscripts and correspondence concerning editorial work should be addressed to

STUDIA MATHEMATICA

Śniadeckich 8, P.O. Box 137, 00-950 Warszawa, Poland, fax 48-22-6293997

Subscription information (1996): Vols. 117(2, 3)–121 (14 issues); $30 per issue.

Correspondence concerning subscription, exchange and back numbers should be addressed to

Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences
Publications Department

Śniadeckich 8, P.O. Box 137, 00-950 Warszawa, Poland, fax 48-22-6293997

Published by the Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences
Typeset in TEX at the Institute
Printed and bound by

PRINTED IN POLAND

ISSN 0039-3223

STUDIA MATHEMATICA 117 (3) (1996)

Régularité Besov des trajectoires du processus intégral de Skorokhod

par

GÉRARD LORANG (Nancy)

Abstract. Let $\{W_t : 0 \le t \le 1\}$ be a linear Brownian motion, starting from 0, defined on the canonical probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Consider a process $\{u_t : 0 \le t \le 1\}$ belonging to the space $\mathcal{L}^{2,1}$ (see Definition II.2). The Skorokhod integral $U_t = \int_0^t u\delta W$ is then well defined, for every $t \in [0,1]$. In this paper, we study the Besov regularity of the Skorokhod integral process $t \mapsto U_t$. More precisely, we prove the following

THEOREM III.1. (1) *If $0 < \alpha < 1/2$ and $u \in \mathcal{L}^{p,1}$ with $1/\alpha < p < \infty$, then a.s. $t \mapsto U_t \in \mathcal{B}^{\alpha}_{p,q}$ for all $q \in [1,\infty]$, and $t \mapsto U_t \in \mathcal{B}^{\alpha,0}_{p,\infty}$.*

(2) *For every even integer $p \ge 4$, if there exists $\delta > 2(p+1)$ such that $u \in \mathcal{L}^{\delta,2} \cap L^\infty([0,1]\times\Omega)$, then a.s. $t \mapsto U_t \in \mathcal{B}^{1/2}_{p,\infty}$.*

(For the definition of the Besov spaces $\mathcal{B}^{\alpha}_{p,q}$ and $\mathcal{B}^{\alpha,0}_{p,\infty}$, see Section I; for the definition of the spaces $\mathcal{L}^{p,1}$ and $\mathcal{L}^{p,2}, p \ge 2$, see Definition II.2.)

An analogous result for the classical Itô integral process has been obtained by B. Roynette in [R]. Let us finally observe that D. Nualart and E. Pardoux [NP] showed that the Skorokhod integral process $t \mapsto U_t$ admits an a.s. continuous modification, under smoothness conditions on the integrand similar to those stated in Theorem II.1 (cf. Theorems 5.2 and 5.3 of [NP]).

I. Rappels sur les espaces de Besov.

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Pour $0 < \alpha < 1$ et $1 \le p, q \le \infty$, on définit

$$\omega_p(t,f) = \sup_{|h|\le t} \Big(\int_{I_h} |f(x-h) - f(x)|^p \, dx \Big)^{1/p}, \tag{I.1}$$

où $I_h = \{x \in [0,1] : x - h \in [0,1]\}$, et

$$\|f\|_{\alpha,p,q} = \|f\|_{L^p([0,1])} + \Big(\int_0^1 \Big(\frac{\omega_p(t,f)}{t^\alpha} \Big)^q \frac{dt}{t} \Big)^{1/q}. \tag{I.2}$$

On note $\mathcal{B}^{\alpha}_{p,q}$ l'espace de Banach associé à cette norme. Lorsque $p = \infty$ ou $q = \infty$, on remplace dans (I.2) les normes L^p ou L^q par la norme L^∞.

1991 *Mathematics Subject Classification*: 60G17, 60H05.

2. Soit $\{\chi_{00}, \chi_{jk} : j = 0,1,2,\ldots;\ k = 1,2,\ldots,2^j\}$ la base de Haar, définie par les relations

$$\text{(I.3)}\quad (\forall t \in [0,1])\quad \chi_{jk}(t) = \begin{cases} 2^{j/2} & \text{si } t \in [(k-1)/2^j, (k-1/2)/2^j[,\\ -2^{j/2} & \text{si } t \in [(k-1/2)/2^j, k/2^j[,\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}$$

et

$$\text{(I.4)}\qquad (\forall t \in [0,1])\quad \chi_{00}(t) = 1.$$

Ces fonctions constituent un système orthonormé complet de $L^2([0,1])$.

Pour les mêmes indices que ci-dessus, on définit les fonctions de Schauder :

$$\text{(I.5)}\qquad \varphi_{jk}(t) = \int_0^t \chi_{jk}(s)\,ds.$$

Remarquons que $\varphi_{00}(t) = t$ et que les graphes des autres fonctions φ_{jk} ressemblent à de petites tentes de hauteur $2^{-j/2-1}$, centrées en $(k-1/2)/2^j$ et de support $[(k-1)/2^j, k/2^j]$.

Soit maintenant $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, nulle en 0. Il est clair qu'on a la décomposition suivante :

$$\text{(I.6)}\qquad f(t) = \sum_{j,k} f_{jk}\varphi_{jk}(t),\quad \text{où}\quad f_{jk} = \int_0^1 \chi_{jk}(s)\,df(s),$$

avec convergence uniforme en t de la série. L'écriture $f_{jk} = \int_0^1 \chi_{jk}\,df$ n'impose pas que f soit dérivable. Elle signifie simplement que

$$\text{(I.7)}\qquad f_{jk} = 2^{j/2}\Big[2f\Big(\frac{k-1/2}{2^j}\Big) - f\Big(\frac{k-1}{2^j}\Big) - f\Big(\frac{k}{2^j}\Big)\Big].$$

3. Si $\alpha > 1/p$, l'espace de Besov $\mathcal{B}^{\alpha}_{p,q}$ est contenu dans l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$. On montre dans ce cas (cf. [CKR]) que $\mathcal{B}^{\alpha}_{p,q}$ est isomorphe à un espace de suites. Plus précisément,

$$\text{(I.8)}\qquad \|f\|_{\alpha,p,q} \simeq \Big\{\sum_j 2^{-jq(1/2-\alpha+1/p)}\Big(\sum_k |f_{jk}|^p\Big)^{q/p}\Big\}^{1/q}$$

avec $f = \sum_{j,k} f_{jk}\varphi_{jk}$ et $\alpha > 1/p$.

Désignons par ℓ_q ($q < \infty$) (resp. ℓ_∞) l'espace des suites $\{x_j : j \ge 0\}$ telles que $(\sum_j |x_j|^q)^{1/q} < \infty$ (resp. $\sup_j |x_j| < \infty$). La norme ℓ_q d'une suite étant une fonction décroissante de q, il est clair que $\|\cdot\|_{\alpha,p,q}$ décroît avec q.

Ecrivant par ailleurs (I.8) sous la forme

$$\text{(I.9)}\qquad \|f\|_{\alpha,p,q} \simeq \Big\{\sum_j 2^{-jq(1/2-\alpha)}\Big(\sum_k 2^{-j}|f_{jk}|^p\Big)^{q/p}\Big\}^{1/q}$$

on voit aisément que $\|\cdot\|_{\alpha,p,q}$ croît avec p et α. Lorsque $p = \infty$ ou $q = \infty$, on remplace dans (I.9) les normes ℓ_p ou ℓ_q par la norme ℓ_∞. En particulier, lorsque $p = q = \infty$, (I.9) devient

$$\text{(I.10)}\qquad \|f\|_{\alpha,\infty,\infty} \simeq \sup_{j,k} 2^{-j(1/2-\alpha)}|f_{jk}|$$

et l'on sait depuis un résultat de Z. Ciesielski (cf. [C]) que cette norme est équivalente à la norme höldérienne d'indice α $(0 < \alpha < 1)$:

$$\text{(I.11)}\qquad \|f\|_{\alpha,\infty,\infty} \simeq \sup_{0\le s\ne t\le 1} \frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^{\alpha}}.$$

Notons que pour tout $q < \infty$, $\mathcal{B}^{\alpha}_{p,q}$ est un espace séparable.

Dire que $f = \sum_{j,k} f_{jk}\varphi_{jk} \in \mathcal{B}^{\alpha}_{p,\infty}$ signifie que la suite

$$\Big\{\varepsilon_j := 2^{-j(1/2-\alpha+1/p)}\Big(\sum_k |f_{jk}|^p\Big)^{1/p} : j \ge 0\Big\} \in \ell_\infty.$$

Nous dirons que $f \in \mathcal{B}^{\alpha,0}_{p,\infty}$ si de plus $\lim_{j\to\infty}\varepsilon_j = 0$; $\mathcal{B}^{\alpha,0}_{p,\infty}$ est encore un espace de Banach séparable.

II. Rappels sur l'intégrale de Skorokhod. Nous présentons dans cette section un bref aperçu sur l'intégration au sens de Skorokhod. Nous suivons de près l'exposé de D. Nualart et E. Pardoux dans [NP].

1. Soit $\{W_t : 0 \le t \le 1\}$ un mouvement Brownien linéaire, défini sur l'espace de probabilité canonique $(\Omega, \mathcal{F}, P)$: Ω est l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, nulles en 0, à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ est la tribu borélienne sur Ω, complétée par rapport à la mesure de Wiener P. On appellera *fonction régulière* toute variable aléatoire $F : \Omega \to \mathbb{R}$ de la forme $F = f(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})$, où $f \in \mathcal{C}^\infty_b(\mathbb{R}^n)$, espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui sont bornées et ont des dérivées bornées de tout ordre. Notons que l'espace $\mathcal{S}$ des fonctions régulières est contenu dans $L^2(\Omega)$.

La *dérivée au sens de Malliavin* d'une fonction régulière F est définie comme étant le processus stochastique

$$\text{(II.1)}\qquad D_tF = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(W_{t_1},\ldots,W_{t_n})\mathbf{1}_{[0,t_i]}(t),\qquad t \in [0,1].$$

La dérivée DF peut être considérée comme une variable aléatoire à valeurs dans $L^2([0,1])$. Plus généralement, la dérivée N-ième de F, notée D^NF, est une variable aléatoire à valeurs dans $L^2([0,1]^N)$:

$$\begin{aligned}\text{(II.2)}\qquad (D^NF)_{s_1,\ldots,s_N} &= D_{s_1}D_{s_2}\ldots D_{s_N}F\\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_N=1}^n \frac{\partial^N f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_N}} f(W_{t_1},\ldots,W_{t_n})\mathbf{1}_{[0,t_{i_1}]}(s_1)\ldots\mathbf{1}_{[0,t_{i_N}]}(s_N).\end{aligned}$$

Introduisons maintenant, pour un entier $N \geq 1$ et un réel $p \geq 2$, la semi-norme

$$\|F\|_{p,N} = \|F\|_p + \sum_{k=1}^{N} \| \|D^k F\|_{L^2([0,1]^k)} \|_p \tag{II.3}$$

sur $\mathcal{S}$, et désignons par $\mathcal{D}_{p,N}$ l'espace de Sobolev associé, i.e. l'espace de Banach qui est la complétion de $\mathcal{S}$ par rapport à la semi-norme $\|\cdot\|_{p,N}$.

L'opérateur de dérivation est un opérateur linéaire non borné, fermé, défini sur $\mathcal{D}_{2,1}$ et à valeurs dans $L^2([0,1] \times \Omega)$. Nous définissons alors l'opérateur d'intégration au sens de Skorokhod, noté δ, comme étant l'adjoint de D. Il en résulte aussitôt la proposition suivante :

PROPOSITION II.1. *Soit $u \in L^2([0,1] \times \Omega)$. Alors u est intégrable au sens de Skorokhod si et seulement si il existe une constante c telle que*

$$(\forall F \in \mathcal{D}_{2,1}) \quad \Big| E\Big(\int_0^1 u_t D_t F \, dt \Big) \Big| \leq c \|F\|_2, \tag{II.4}$$

et dans ce cas, on a la formule de dualité

$$E\Big(\int_0^1 u_t D_t F \, dt \Big) = E(F \delta(u)). \tag{II.5}$$

Remarque. On notera $\operatorname{Dom} \delta$ le domaine de l'opérateur δ, i.e. l'ensemble des processus $u \in L^2([0,1] \times \Omega)$ intégrables au sens de Skorokhod. Si $u \in \operatorname{Dom} \delta$, on notera $\delta(u) = \int_0^1 u \delta W$.

Nous allons maintenant rappeler quelques propriétés fondamentales de l'opérateur δ. Nous observons d'abord que $\operatorname{Dom} \delta$ est un espace trop grand à ces fins.

DÉFINITION II.2. Soit p un nombre réel ≥ 2. On note $\mathcal{L}^{p,1}$ la classe des processus $u \in L^p([0,1] \times \Omega)$ tels que $u_t \in \mathcal{D}_{p,1}$ t-p.p. et il existe une version mesurable de $D_s u_t$ vérifiant

$$E \int_0^1 \int_0^1 |D_s u_t|^p \, ds \, dt < \infty. \tag{II.6}$$

On note $\mathcal{L}^{p,2}$ la classe des processus $u \in \mathcal{L}^{p,1}$ tels que $u_t \in \mathcal{D}_{p,2}$ t-p.p. et il existe une version mesurable de $D_r D_s u_t$ vérifiant

$$E \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |D_r D_s u_t|^p \, dr \, ds \, dt < \infty. \tag{II.7}$$

On munit les espaces $\mathcal{L}^{p,1}$ et $\mathcal{L}^{p,2}$ respectivement des normes

$$|||u|||_{p,1} = \Big(E \int_0^1 |u_t|^p \, dt \Big)^{1/p} + \Big(E \int_0^1 \int_0^1 |D_s u_t|^p \, ds \, dt \Big)^{1/p}, \tag{II.8}$$

$$|||u|||_{p,2} = \Big(E \int_0^1 |u_t|^p \, dt \Big)^{1/p} + \Big(E \int_0^1 \int_0^1 |D_s u_t|^p \, ds \, dt \Big)^{1/p} + \Big(E \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |D_r D_s u_t|^p \, dr \, ds \, dt \Big)^{1/p}. \tag{II.9}$$

Ce sont alors des espaces de Banach. En utilisant la décomposition en chaos de Wiener du processus u et la définition correspondante de l'intégrale de Skorokhod (cf. [NP]), on montre aisément que $\mathcal{L}^{p,2} \subset \mathcal{L}^{p,1} \subset \operatorname{Dom} \delta$, $p \geq 2$.

Les propriétés suivantes sont classiques. Nous les rappelons ici pour notre usage ultérieur.

PROPOSITION II.3 (Isométrie). *Soit $u \in \mathcal{L}^{2,1}$. Alors*

$$E(\delta(u)^2) = \int_0^1 E(u_t^2) \, dt + \int_0^1 \int_0^1 E(D_s u_t D_t u_s) \, ds \, dt. \tag{II.10}$$

PROPOSITION II.4 (Dérivée d'une intégrale de Skorokhod). *Soit $u \in \mathcal{L}^{2,2}$. Alors l'intégrale de Skorokhod $\delta(u)$ appartient à $\mathcal{D}_{2,1}$ et*

$$D_t \Big(\int_0^1 u_s \delta W_s \Big) = \int_0^1 (D_t u_s) \delta W_s + u_t \quad t\text{-p.p.} \tag{II.11}$$

PROPOSITION II.5 (Inégalités L^p). *Soit $u \in \mathcal{L}^{2,1}$. Alors, pour $p \geq 2$, il existe une constante positive c_p telle que*

$$\Big\| \int_0^1 u_t \delta W_t \Big\|_p \leq c_p \Big[\Big(\int_0^1 (E u_t)^2 \, dt \Big)^{1/2} + \Big\| \Big(\int_0^1 \int_0^1 (D_s u_t)^2 \, ds \, dt \Big)^{1/2} \Big\|_p \Big]. \tag{II.12}$$

Si $u \in \mathcal{L}^{2,1}$, il en est de même pour $u \mathbf{1}_{[0,t]}$, t étant fixé dans $[0,1]$. Dans ce cas, le processus $\{\int_0^t u_s \delta W_s := \delta(u \mathbf{1}_{[0,t]}) : 0 \leq t \leq 1\}$ est bien défini. Nous aurons besoin dans la suite de la formule d'Itô pour l'intégrale de Skorokhod. Nous n'énonçons pas la version la plus générale de cette formule (cf. théorème 6.1 dans [NP]), mais deux cas particuliers simples dont nous nous servirons ultérieurement.

PROPOSITION II.6 (Formule d'Itô). *Soient $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $u \in \mathcal{L}^{2,2} \cap L^\infty([0,1] \times \Omega)$ tel que $U_t = \int_0^t u_s \delta W_s$ admet une version continue.*

Alors

$$\Phi(U_t) = \Phi(0) + \int_0^t \Phi'(U_s) u_s \delta W_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Phi''(U_s) u_s^2 \, ds + \int_0^t \Phi''(U_s) \Big(\int_0^s D_s u_r \delta W_r \Big) u_s \, ds. \tag{II.13}$$

PROPOSITION II.7 (Formule d'intégration par parties). *Soit* $u \in \mathcal{L}^{p,1}$ *avec* $p > 2$, *et* $U_t = \int_0^t u_s \delta W_s$, $0 \le t \le 1$. *Soit* $\{V_t : 0 \le t \le 1\}$ *une fonction non aléatoire, continue, à variation finie. Alors*

$$U_t V_t = \int_0^t U_s \, dV_s + \int_0^t V_s u_s \delta W_s, \quad 0 \le t \le 1, \ p.s. \tag{II.14}$$

Remarque. La continuité de $t \mapsto U_t$ dans la proposition II.7 résultera de la première partie du théorème III.1.

III. Appartenance de l'intégrale de Skorokhod aux espaces de Besov. On étudie dans cette section l'appartenance du processus $t \mapsto \int_0^t u\delta W$ aux espaces de Besov. On généralise ainsi les travaux de D. Nualart et E. Pardoux qui démontrent l'existence d'une version continue de ce processus sous des hypothèses de régularité convenables sur u (cf. théorèmes 5.2 et 5.3 dans [NP]). Notons également que l'appartenance de l'intégrale stochastique d'Itô aux espaces de Besov a été étudiée par B. Roynette dans [R].

Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME III.1. *Notons* $U_t = \int_0^t u\delta W$ *et* $U = \{U_t : 0 \le t \le 1\}$.

(1) *Si* $0 < \alpha < 1/2$ *et* $u \in \mathcal{L}^{p,1}$ *avec* $1/\alpha < p < \infty$, *alors p.s.* $U \in \mathcal{B}^{\alpha}_{p,q}$ *pour tout* $1 \le q \le \infty$ *et* $U \in \mathcal{B}^{\alpha,0}_{p,\infty}$.

(2) *Soit p un entier pair* ≥ 4 *et* $\delta > 2(p+1)$. *Si* $u \in \mathcal{L}^{\delta,2} \cap L^\infty([0,1] \times \Omega)$, *alors p.s.* $U \in \mathcal{B}^{1/2}_{p,\infty}$.

Démonstration. Décomposons formellement le processus U dans la base de Schauder :

$$U_t = \sum_{j,k} \mu_{jk} \varphi_{jk}(t) \quad \text{p.s.},$$

avec

$$\mu_{jk} = \int_0^1 \chi_{jk} u \delta W = 2^{j/2} [2U_{(k-1/2)/2^j} - U_{(k-1)/2^j} - U_{k/2^j}]. \tag{III.1}$$

Montrer que $U \in \mathcal{B}^{\alpha}_{p,q}$ revient donc à prouver que

$$\sum_j 2^{-jq(1/2-\alpha+1/p)} \Big(\sum_k |\mu_{jk}|^p \Big)^{q/p} < \infty \quad \text{p.s.} \tag{III.2}$$

(Lorsque $p = \infty$ ou $q = \infty$, on remplace dans III.2 la norme ℓ_p ou ℓ_q par la norme ℓ_∞.)

LEMME III.2. *Soit* $u \in \mathcal{L}^{2,1}$ *et* $\mu_{jk}(t) = \int_0^t \chi_{jk} u\delta W$, $0 \le t \le 1$. *Pour tous* $p \ge 2$ *et* $\delta \ge 1$ *on a*

$$E|\mu_{jk}(t)|^p \le c 2^{jp/(2\delta)} \Big\{ \Big(E \int_0^1 |u_s|^{2\delta} \mathbf{1}_{jk}(s) \, ds \Big)^{p/(2\delta)} + E \Big(\int_0^1 \int_0^1 |D_r u_s|^{2\delta} \mathbf{1}_{jk}(s) \, dr \, ds \Big)^{p/(2\delta)} \Big\}, \tag{III.3}$$

où c est une constante dépendant uniquement de p et $\mathbf{1}_{jk}$ *désigne la fonction indicatrice de l'intervalle dyadique* $[(k-1)/2^j, k/2^j]$.

Remarquons que l'estimation (III.3) est indépendante de t.

Démonstration du lemme III.2. D'après la proposition II.5, on a

$$\begin{aligned} E|\mu_{jk}(t)|^p &= E \Big| \int_0^1 \chi_{jk} u \mathbf{1}_{[0,t]} \delta W \Big|^p \\ &\le c \Big\{ \Big(\int_0^1 E\chi_{jk}^2(s) u_s^2 \, ds \Big)^{p/2} + E \Big(\int_0^1 \int_0^1 \chi_{jk}^2(s) |D_r u_s|^2 \, dr \, ds \Big)^{p/2} \Big\} \\ &\le c \Big(\int_0^1 \chi_{jk}^{2\delta'}(s) \, ds \Big)^{p/(2\delta')} \Big\{ \Big(E \int_0^1 |u_s|^{2\delta} \mathbf{1}_{jk}(s) \, ds \Big)^{p/(2\delta)} \\ &\quad + E \Big(\int_0^1 \int_0^1 |D_r u_s|^{2\delta} \mathbf{1}_{jk}(s) \, dr \, ds \Big)^{p/(2\delta)} \Big\} \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Hölder avec $1/\delta + 1/\delta' = 1$. On obtient alors l'inégalité (III.3) en observant que

$$\Big(\int_0^1 \chi_{jk}^{2\delta'}(s) \, ds \Big)^{p/(2\delta')} = (2^{j(\delta'-1)})^{p/(2\delta')} = 2^{jp/(2\delta)}.$$

Pour démontrer la première partie du théorème III.1, on applique le lemme précédent avec $\delta = p/2 \ge 1$:

$$\text{(III.4)}\quad E\Big(\sum_{k=1}^{2^j}|\mu_{jk}(1)|^p\Big) \le c2^j\sum_{k=1}^{2^j}\Big\{E\int_0^1|u_s|^p\mathbf{1}_{jk}(s)\,ds + E\int_0^1\int_0^1|D_ru_s|^p\mathbf{1}_{jk}(s)\,dr\,ds\Big\}$$
$$= c2^j\Big\{E\int_0^1|u_s|^p\,ds + E\int_0^1\int_0^1|D_ru_s|^p\,dr\,ds\Big\} \le c2^j|||u|||^p_{p,1}.$$

Soit maintenant $0<\beta<1/2-\alpha$. On a

$$P\Big\{2^{-jp(1/2-\alpha+1/p)}\sum_k|\mu_{jk}|^p > 2^{-jp\beta}\Big\} \le 2^{-jp(1/2-\alpha-\beta+1/p)}E\Big(\sum_k|\mu_{jk}|^p\Big) \le c2^{-jp(1/2-\alpha-\beta)}|||u|||^p_{p,1}.$$

Les assertions de la partie (1) du théorème III.1 découlent alors du lemme de Borel–Cantelli, aussi bien dans le cas $q<\infty$ que dans le cas $q=\infty$.

Pour prouver la deuxième partie, il faut voir que

$$\text{(III.5)}\qquad \sup_j 2^{-j}\sum_{k=1}^{2^j}|\mu_{jk}|^p<\infty\quad \text{p.s.},$$

où p est un entier pair.

D'après la formule d'Itô pour l'intégrale de Skorokhod (cf. proposition II.6),

$$\text{(III.7)}\quad \mu^p_{jk}(t) = p\int_0^t\mu^{p-1}_{jk}(s)\chi_{jk}(s)u_s\delta W_s + \frac{p(p-1)}{2}\int_0^t\mu^{p-2}_{jk}(s)\chi^2_{jk}(s)u^2_s\,ds + p(p-1)\int_0^t\mu^{p-2}_{jk}(s)\chi_{jk}(s)u_s\Big(\int_0^s\chi_{jk}(r)D_su_r\delta W_r\Big)\,ds.$$

La démonstration de (III.5) se fait donc en plusieurs étapes.

(a) Soit $\gamma_{jk}(t)=\int_0^t\mu^{p-1}_{jk}(s)\chi_{jk}(s)u_s\delta W_s$, $0\le t\le 1$. Montrons que

$$\text{(III.8)}\qquad \sup_j 2^{-j}\Big|\sum_{k=1}^{2^j}\gamma_{jk}(1)\Big|<\infty\quad\text{p.s.}$$

Pour cela, nous allons établir que

$$\text{(III.9)}\qquad E\Big(\sum_{k=1}^{2^j}\gamma_{jk}(1)\Big)^2\le c2^{j\theta},$$

où $0<\theta<2$ et c est une constante dépendant de p et de u. (III.8) sera alors une conséquence immédiate de (III.9) et du lemme de Borel–Cantelli.

(a.1) On a

$$\text{(III.10)}\quad E(\gamma_{jk}(1))^2 = E\Big(\int_0^1\mu^{p-1}_{jk}(t)\chi_{jk}(t)u_t\delta W_t\Big)^2 \le c\Big\{\int_0^1\chi^2_{jk}(t)E\mu^{2p-2}_{jk}(t)\,dt + E\int_0^1\int_0^1\chi^2_{jk}(t)|D_s(\mu^{p-1}_{jk}(t)u_t)|^2\,ds\,dt\Big\}$$

d'après la proposition II.5 et l'hypothèse que $u\in L^\infty([0,1]\times\Omega)$. ($c$ est une constante dépendant de p et de u, pouvant changer d'une ligne à l'autre dans la suite.)

(a.1.1) D'après le lemme III.2, où l'on remplace p par $2p-2$ et l'on choisit $\delta=p-1$, on a

$$\text{(III.11)}\quad E\mu^{2p-2}_{jk}(t)\le c2^j\Big\{E\int_0^1|u_s|^{2p-2}\mathbf{1}_{jk}(s)\,ds + E\int_0^1\int_0^1|D_ru_s|^{2p-2}\mathbf{1}_{jk}(s)\,dr\,ds\Big\}.$$

Par conséquent,

$$\text{(III.12)}\quad \sum_{k=1}^{2^j}\int_0^1\chi^2_{jk}(t)E\mu^{2p-2}_{jk}(t)\,dt \le \sum_{k=1}^{2^j}c2^j\Big\{E\int_0^1|u_s|^{2p-2}\mathbf{1}_{jk}(s)\,ds + E\int_0^1\int_0^1|D_ru_s|^{2p-2}\mathbf{1}_{jk}(s)\,dr\,ds\Big\}\int_0^1\chi^2_{jk}(t)\,dt \le c2^j|||u|||^{2p-2}_{2p-2,1}.$$

(a.1.2) Majorons maintenant le deuxième terme de (III.10). D'après la proposition II.4,

$$\text{(III.13)}\quad D_s(\mu^{p-1}_{jk}(t)u_t) = (p-1)\mu^{p-2}_{jk}(t)u_t\int_0^t\chi_{jk}(r)D_su_r\delta W_r + (p-1)\mu^{p-2}_{jk}(t)u_tu_s\chi_{jk}(s)\mathbf{1}_{[0,t]}(s) + \mu^{p-1}_{jk}(t)D_su_t.$$

Ainsi $E\int_0^1\int_0^1\chi^2_{jk}(t)|D_s\mu^{p-1}_{jk}(t)u_t|^2\,ds\,dt$ se décompose en trois termes.

(a.1.3) Commençons par majorer le troisième terme. On applique l'inégalité de Hölder avec $1/\lambda + 1/\lambda' + 1/\lambda'' = 1$:

$$\begin{aligned}
&E\int_0^1\int_0^1 \chi_{jk}^2(t)\mu_{jk}^{2(p-1)}(t)|D_s u_t|^2\,ds\,dt\\
&\le \Big\{\int_0^1 \chi_{jk}^{2\lambda'}(t)\,dt\Big\}^{1/\lambda'}\\
&\quad\times\Big\{\int_0^1 \mathbf{1}_{jk}(t)E|\mu_{jk}(t)|^{2\lambda(p-1)}\,dt\Big\}^{1/\lambda}\Big\{E\int_0^1\int_0^1 |D_s u_t|^{2\lambda''}\,ds\,dt\Big\}^{1/\lambda''}\\
&\le c2^{j(1-1/\lambda'-1/\lambda)}2^{j(p-1)/\delta}\Big\{\Big(E\int_0^1 |u_s|^{2\delta}\,ds\Big)^{\lambda(p-1)/\delta}\\
&\quad+E\Big(\int_0^1\int_0^1 |D_r u_s|^{2\delta}\,dr\,ds\Big)^{\lambda(p-1)/\delta}\Big\}^{1/\lambda}\Big\{E\int_0^1\int_0^1 |D_s u_t|^{2\lambda''}\,ds\,dt\Big\}^{1/\lambda''}
\end{aligned}$$

d'après le lemme III.2. On choisit alors

$$\delta = \lambda(p-1) = p \quad\text{et}\quad \lambda'' = q > p.$$

Par conséquent,

$$\text{(III.14)}\qquad \sum_{k=1}^{2^j} E\int_0^1\int_0^1 \chi_{jk}^2(t)\mu_{jk}^{2(p-1)}(t)|D_s u_t|^2\,ds\,dt \le c2^{j\theta}|||u|||_{2p,1}^{2p-2}\Big\{E\int_0^1\int_0^1 |D_s u_t|^{2q}\,ds\,dt\Big\}^{1/q},$$

où $\theta = 2-(1/p-1/q)$ et $q > p$.

(a.1.4) Majorons le deuxième terme :

$$\begin{aligned}
\text{(III.15)}\qquad &\sum_{k=1}^{2^j} E\int_0^1\int_0^1 \chi_{jk}^2(t)\mu_{jk}^{2(p-2)}(t)u_t^2u_s^2\chi_{jk}^2(s)\mathbf{1}_{[0,t]}(s)\,ds\,dt\\
&\le c\sum_{k=1}^{2^j}\int_0^1\int_0^1 \chi_{jk}^2(t)\chi_{jk}^2(s)E\mu_{jk}^{2(p-2)}(t)\,ds\,dt \le c2^j|||u|||_{2p-4,1}^{2p-4}
\end{aligned}$$

où l'on a procédé comme pour établir (III.12).

(a.1.5) Pour majorer le premier terme on aura besoin du

LEMME III.3. *Soit* $u \in \mathcal{L}^{2,2}$ *et* $\nu_{jk}^{(s)}(t) = \int_0^t \chi_{jk}(r)D_s u_r\delta W_r$, $(s,t)\in[0,1]^2$. *Pour tous* $p\ge 2$ *et* $\delta\ge 1$ *on a*

$$\begin{aligned}
E|\nu_{jk}^{(s)}(t)|^p \le c2^{jp/(2\delta)}\Big\{&\Big(E\int_0^1 |D_s u_r|^{2\delta}\mathbf{1}_{jk}(r)\,dr\Big)^{p/(2\delta)}\\
&+E\Big(\int_0^1\int_0^1 |D_v D_s u_r|^{2\delta}\mathbf{1}_{jk}(r)\,dv\,dr\Big)^{p/(2\delta)}\Big\}
\end{aligned}$$

pour presque tout $s\in[0,1]$, *et où* c *est une constante dépendant uniquement de* p.

Ce lemme se démontre de la même façon que le lemme III.2. On en déduit que

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{2^j} E\int_0^1\int_0^1 \chi_{jk}^2(t)\mu_{jk}^{2(p-2)}(t)u_t^2|\nu_{jk}^{(s)}(t)|^2\,ds\,dt\\
&\le c\sum_{k=1}^{2^j}\Big\{\int_0^1 \chi_{jk}^{2\lambda'}(t)\,dt\Big\}^{1/\lambda'}\Big\{\int_0^1 \mathbf{1}_{jk}(t)E|\mu_{jk}(t)|^{2\lambda(p-2)}\,dt\Big\}^{1/\lambda}\\
&\quad\times\Big\{\int_0^1\int_0^1 \mathbf{1}_{jk}(t)E|\nu_{jk}^{(s)}(t)|^{2\lambda''}\,ds\,dt\Big\}^{1/\lambda''}\\
&\le c2^{j(2-1/\lambda')}2^{-j/\lambda}2^{j(p-2)/\delta}\\
&\quad\times\Big\{\Big(E\int_0^1 |u_s|^{2\delta}\,ds\Big)^{\lambda(p-2)/\delta}+E\Big(\int_0^1\int_0^1 |D_r u_s|^{2\delta}\,dr\,ds\Big)^{\lambda(p-2)/\delta}\Big\}^{1/\lambda}\\
&\quad\times 2^{-j/\lambda''}2^{j/\delta'}\Big\{\int_0^1\Big[\Big(E\int_0^1 |D_s u_r|^{2\delta'}\,dr\Big)^{\lambda''/\delta'}\\
&\quad+E\Big(\int_0^1\int_0^1 |D_v D_s u_r|^{2\delta'}\,dv\,dr\Big)^{\lambda''/\delta'}\Big]\,ds\Big\}^{1/\lambda''}
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Hölder avec $1/\lambda+1/\lambda'+1/\lambda''=1$, le lemme III.2 avec $\delta\ge 1$ et le lemme III.3 avec $\delta'\ge 1$. Le membre de droite ci-dessus est donc majoré par

$$\text{(III.17)}\qquad c2^{j(2p-1)/p}|||u|||_{2p,1}^2|||u|||_{2p,2}^2,$$

où l'on a choisi $\delta=\delta'=p=\lambda''=\lambda(p-2)$. (Dans le cas $p=2$ on a $\lambda=\infty$.)

Résumant les inégalités (III.12), (III.14), (III.15) et (III.17), on a prouvé qu'il existe une constante c dépendant de p et de u et une constante $\theta < 2$

telles que

$$\sum_{k=1}^{2^j} E(\gamma_{jk}(1))^2 \le c2^{j\theta}. \tag{III.18}$$

(a.2) Soit à présent k et l deux indices distincts appartenant à $\{1,2,\ldots,2^j\}$. En utilisant la propriété d'isométrie de l'intégrale de Skorokhod (cf. proposition II.3), on a

$$\begin{aligned} |E\gamma_{jk}(1)\gamma_{jl}(1)| &= \Big|E\Big(\int_0^1 \mu_{jk}^{p-1}(s)\chi_{jk}(s)u_s\delta W_s \int_0^1 \mu_{jl}^{p-1}(t)\chi_{jl}(t)u_t\delta W_t\Big)\Big| \\ &\le \int_0^1\int_0^1 |\chi_{jk}(s)\chi_{jl}(t)|\cdot|E[D_t(\mu_{jk}^{p-1}(s)u_s)D_s(\mu_{jl}^{p-1}(t)u_t)]|\,ds\,dt. \end{aligned} \tag{III.19}$$

Or, d'après la proposition II.4,

$$D_t(\mu_{jk}^{p-1}(s)u_s) = (p-1)\mu_{jk}^{p-2}(s)u_s \int_0^s \chi_{jk}(r)D_tu_r\delta W_r + \mu_{jk}^{p-1}(s)D_tu_s,$$

$$D_s(\mu_{jl}^{p-1}(t)u_t) = (p-1)\mu_{jl}^{p-2}(t)u_t \int_0^t \chi_{jl}(r)D_su_r\delta W_r + \mu_{jl}^{p-1}(t)D_su_t.$$

Le membre de droite dans (III.19) se décompose donc en 4 termes.

(a.2.1) Pour majorer le premier terme posons $E_l^{(s)}(t) = \mu_{jl}^{p-2}(t)u_t\nu_{jl}^{(s)}(t)$. Or,

$$\begin{aligned} &\int_0^1\int_0^1 |\chi_{jk}(s)\chi_{jl}(t)|\cdot|E[E_l^{(s)}(t)E_k^{(t)}(s)]|\,ds\,dt \\ &\qquad \le \int_0^1\int_0^1 |\chi_{jk}(s)\chi_{jl}(t)|[E(E_l^{(s)}(t))^2]^{1/2}[E(E_k^{(t)}(s))^2]^{1/2}\,ds\,dt \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Schwarz.

Majorant $E(E_l^{(s)}(t))^2$ (resp. $E(E_k^{(t)}(s))^2$) par une expression indépendante de t (resp. s), l'intégrale précédente est à variables séparées et se majore par

$$\begin{aligned} &c\Big(\int_0^1 |\chi_{jk}(s)|2^{j/(2\delta)}\Big[\Big(E\int_0^1 |D_su_r|^{2\delta}\,dr\Big)^{\lambda'/\delta} \\ &\qquad\qquad + E\Big(\int_0^1\int_0^1 |D_vD_su_r|^{2\delta}\,dv\,dr\Big)^{\lambda'/\delta}\Big]^{1/(2\lambda')} ds\Big) \\ &\times\Big(\int_0^1 |\chi_{jl}(t)|2^{j/(2\delta)}\Big[\Big(E\int_0^1 |D_tu_r|^{2\delta}\,dr\Big)^{\lambda'/\delta} \\ &\qquad\qquad + E\Big(\int_0^1\int_0^1 |D_vD_tu_r|^{2\delta}\,dv\,dr\Big)^{\lambda'/\delta}\Big]^{1/(2\lambda')} dt\Big) \\ &\times 2^{j(p-2)/\delta}\Big[\Big(E\int_0^1 |u_r|^{2\delta}\,dr\Big)^{\lambda(p-2)/\delta} + E\Big(\int_0^1\int_0^1 |D_vu_r|^{2\delta}\,dv\,dr\Big)^{\lambda(p-2)/\delta}\Big]^{1/\lambda} \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Hölder avec $1/\lambda + 1/\lambda' = 1$ et les lemmes III.1 et III.2 avec $\delta \ge 1$. Ainsi le membre de droite ci-dessus se majore par

$$\begin{aligned} &c2^{j/\delta}2^{j(1-2/\lambda)}2^{j(p-2)/\delta}\Big\{\int_0^1 \Big[\Big(E\int_0^1 |D_su_r|^{2\delta}\,dr\Big)^{\lambda'/\delta} \\ &\qquad\qquad + E\Big(\int_0^1\int_0^1 |D_vD_su_r|^{2\delta}\,dv\,dr\Big)^{\lambda'/\delta}\Big]^{1/2} ds\Big\}^{2/\lambda'} \\ &\qquad \times\Big\{\Big(E\int_0^1 |u_r|^{2\delta}\,dr\Big)^{\lambda(p-2)/\delta} + E\Big(\int_0^1\int_0^1 |D_vu_r|^{2\delta}\,dv\,dr\Big)^{\lambda(p-2)/\delta}\Big\}^{1/\lambda} \end{aligned}$$

(on a utilisé ici l'inégalité de Hölder et le fait que les deux premiers facteurs de la ligne précédente ont même majorant indépendant de l et de k).

Le nombre de termes à sommer étant de l'ordre de 2^{2j} (puisque $k \ne l \in \{1,2,\ldots,2^j\}$), il faut imposer la condition $1 - 2/\lambda + (p-1)/\delta < 0$. Posant $\lambda' = \delta$ et $\lambda = \delta/(\delta-1)$, il vient

$$\delta > p+1. \tag{III.20}$$

D'où

$$\begin{aligned} \sum_{k\ne l}\int_0^1\int_0^1 |\chi_{jk}(s)\chi_{jl}(t)|\cdot|[E_l^{(s)}(t)E_k^{(t)}(s)]|\,ds\,dt \\ \le c2^{j(1+(p+1)/\delta)}|||u|||_{2\delta,2}^4|||u|||_{2\delta,1}^{2(p-2)}. \end{aligned} \tag{III.21}$$

(a.2.2) Pour majorer le quatrième terme on applique l'inégalité de Hölder avec $1/\lambda + 1/\lambda' = 1$ et l'inégalité de Schwarz :

$$\begin{aligned} &\int_0^1\int_0^1 |\chi_{jk}(s)\chi_{jl}(t)|\cdot|E\mu_{jk}^{p-1}(s)\mu_{jl}^{p-1}(t)D_tu_sD_su_t|\,ds\,dt \\ &\le \int_0^1\int_0^1 |\chi_{jk}(s)\chi_{jl}(t)|\{E|\mu_{jk}(s)|^{2\lambda(p-1)}E|\mu_{jl}(t)|^{2\lambda(p-1)}\}^{1/(2\lambda)} \\ &\qquad\qquad \times\{E|D_tu_sD_su_t|^{\lambda'}\}^{1/\lambda'}\,ds\,dt \end{aligned}$$

$$\le c2^{(j(p-1))/\delta}\Big\{\Big(E\int_0^1 |u_r|^{2\delta}\,dr\Big)^{\lambda(p-1)/\delta} + E\Big(\int_0^1\int_0^1 |D_v u_r|^{2\delta}\,dv\,dr\Big)^{\lambda(p-1)/\delta}\Big\}^{1/\lambda}$$
$$\times\Big\{\int_0^1\int_0^1 |\chi_{jk}(s)\chi_{jl}(t)|^{\lambda}\,ds\,dt\Big\}^{1/\lambda}\Big\{\int_0^1\int_0^1 E|D_t u_s D_s u_t|^{\lambda'}\,ds\,dt\Big\}^{1/\lambda'}.$$

Choisissant, comme dans la partie (a.2.1), $\lambda' = \delta > p+1$ et $\lambda = \delta/(\delta-1)$ et remarquant que $\{\int_0^1\int_0^1 |\chi_{jk}(s)\chi_{jl}(t)|^{\lambda}\,ds\,dt\}^{1/\lambda} = 2^{j(1-2/\lambda)}$, on obtient

$$\text{(III.22)}\qquad \sum_{k\neq l}\int_0^1\int_0^1 |\chi_{jk}(s)\chi_{jl}(t)|\cdot|E\mu_{jk}^{p-1}(s)\mu_{jl}^{p-1}(t)D_t u_s D_s u_t|\,ds\,dt$$
$$\le c2^{j(1+(p+1)/\delta)}|||u|||_{2\delta,1}^{2(p-1)}\Big\{E\int_0^1\int_0^1 |D_t u_s|^{2\delta}\,ds\,dt\Big\}^{1/\delta}.$$

(a.2.3) Pour majorer les deuxième et troisième termes, on utilise des arguments analogues aux précédents. Ecrivant que

$$E|\mu_{jk}^{p-2}(s)\mu_{jl}^{p-1}(t)u_s D_s u_t \nu_{jk}^{(t)}(s)|$$
$$\le \{E|\mu_{jk}(s)|^{2\lambda(p-2)}\}^{1/(2\lambda)}$$
$$\times\{E|\mu_{jl}(t)|^{2\lambda(p-1)}\}\{E|D_s u_t|^{2\lambda'}\}^{1/(2\lambda')}\{E|\nu_{jk}^{(t)}|^{2\lambda'}\}^{1/(2\lambda')}$$

avec $1/\lambda + 1/\lambda' = 1$, on aboutit aisément à l'estimation désirée :

$$\text{(III.23)}\qquad \sum_{k\neq l}\int_0^1\int_0^1 |\chi_{jk}(s)\chi_{jl}(t)|\cdot|E\mu_{jk}^{p-2}(s)\mu_{jl}^{p-1}(t)u_s D_s u_t \nu_{jk}^{(t)}(s)|\,ds\,dt \le c2^{j(1+(p+1)/\delta)},$$

où $\delta > p+1$ et c est une constante dépendant de p et de la norme $|||u|||_{2\delta,2}$.

En conclusion, d'après (III.21)–(III.23), on a

$$\text{(III.24)}\qquad \sum_{k\neq l}|E\gamma_{jk}(1)\gamma_{jl}(1)| \le c2^{j\theta},$$

où $0<\theta<2$ et c est une constante dépendant de p et de u. Finalement, (III.24) et (III.18) donnent (III.9).

(b) Soit $\psi_{jk}(t) = \int_0^t \mu_{jk}^{p-2}(s)\chi_{jk}(s)\nu_{jk}^{(s)}(s)\,ds$, $0\le t\le 1$. Montrons que

$$\text{(III.25)}\qquad \sup_j 2^{-j}\sum_{k=1}^{2^j}|\psi_{jk}(1)| < \infty \quad \text{p.s.}$$

Pour cela, il suffit de voir que

$$\text{(III.26)}\qquad E\sum_{k=1}^{2^j}|\psi_{jk}(1)| < c2^{j\theta},$$

où cette fois-ci, $0<\theta<1$ et c est une constante dépendant de p et de u. Or,

$$\sum_{k=1}^{2^j}E\int_0^1 |\chi_{jk}(t)|\cdot|\mu_{jk}^{p-2}(t)|\cdot|\nu_{jk}^{(t)}(t)|\,dt$$
$$\le\sum_{k=1}^{2^j}\Big\{\int_0^1 |\chi_{jk}(t)|^{\lambda'}\,dt\Big\}^{1/\lambda'}$$
$$\times\Big\{\int_0^1 \mathbf{1}_{jk}(t)E|\mu_{jk}(t)|^{\lambda(p-2)}\,dt\Big\}^{1/\lambda}\Big\{\int_0^1 |\nu_{jk}^{(t)}(t)|^{\lambda''}\,dt\Big\}^{1/\lambda''}$$
$$\le c2^j 2^{j(1/2-1/\lambda')}2^{-j/\lambda}2^{j(p-2)/(2\delta)}$$
$$\times\Big\{\Big(E\int_0^1 |u_s|^{2\delta}\,ds\Big)^{\lambda(p-2)/(2\delta)} + E\Big(\int_0^1\int_0^1 |D_r u_s|^{2\delta}\,dr\,ds\Big)^{\lambda(p-2)/(2\delta)}\Big\}^{1/\lambda}$$
$$\times 2^{j/(2\delta)}\Big\{\int_0^1\Big[\Big(E\int_0^1 |D_t u_s|^{2\delta}\,ds\Big)^{\lambda''/(2\delta)}$$
$$+E\Big(\int_0^1\int_0^1 |D_r D_t u_s|^{2\delta}\,dr\,ds\Big)^{\lambda''/(2\delta)}\Big]\,ds\Big\}^{1/\lambda''}$$
$$\le c2^{j/2(1+p/\delta)}|||u|||_{2\delta,1}^{p-2}|||u|||_{2\delta,2},$$

où l'on a choisi $2\delta = \lambda(p-2) = \lambda''$. Pour obtenir (III.26), il suffit de prendre $\delta > p$.

(c) Pour achever la preuve du théorème III.1, il reste à montrer que

$$\text{(III.27)}\qquad \sup_j 2^{-j}\sum_{k=1}^{2^j}\int_0^1 \mu_{jk}^{p-2}(t)\chi_{jk}^2(t)\,dt < \infty \quad \text{p.s.}$$

(Comme $u\in L^\infty([0,1]\times\Omega)$, on n'a pas besoin de tenir compte du facteur u_t^2 intervenant dans (III.7).)

Nous allons établir (III.27) en procédant par récurrence sur p, entier pair. Remarquons déjà que si $p=2$, (III.27) est trivial. Supposons (III.27) vrai à l'étape p et montrons que

$$\text{(III.28)}\qquad \sup_j 2^{-j}\sum_{k=1}^{2^j}\int_0^1 \mu_{jk}^{p}(t)\chi_{jk}^2(t)\,dt < \infty \quad \text{p.s.}$$

(Il faut bien sûr que les hypothèses de régularité sur u soient encore vérifiées à ce stade.)

D'après la formule d'Itô (III.7), la démonstration de (III.28) se fait en trois étapes.

(c.1) On a

$$\sup_j 2^{-j}\sum_{k=1}^{2^j}\int_0^1\Big(\int_0^t \mu_{jk}^{p-2}(s)\chi_{jk}^2(s)u_s^2\,ds\Big)\chi_{jk}^2(t)\,dt \le c\sup_j 2^{-j}\sum_{k=1}^{2^j}\int_0^1 \mu_{jk}^{p-2}(s)\chi_{jk}^2(s)\,ds<\infty \quad \text{p.s.} \tag{III.29}$$

d'après l'hypothèse de récurrence, après avoir changé l'ordre d'intégration dans l'intégrale double.

(c.2) On a

$$\sup_j 2^{-j}\sum_{k=1}^{2^j}\Big|\int_0^1\Big(\int_0^t \mu_{jk}^{p-2}(s)\chi_{jk}(s)u_s\nu_{jk}^{(s)}(s)\,ds\Big)\chi_{jk}^2(t)\,dt\Big| \le c\sup_j 2^{-j}\sum_{k=1}^{2^j}\int_0^1 |\mu_{jk}^{p-2}(s)\chi_{jk}(s)u_s\nu_{jk}^{(s)}(s)|\,ds<\infty \quad \text{p.s.} \tag{III.30}$$

d'après l'étape (b).

(c.3) Montrons finalement que

$$\sup_j 2^{-j}\Big|\sum_{k=1}^{2^j}\int_0^1 \gamma_{jk}(t)\chi_{jk}^2(t)\,dt\Big|<\infty \quad \text{p.s.} \tag{III.31}$$

Posons $\varrho_{jk}(t)=\int_0^t\chi_{jk}^2(s)\,ds$, $0\le t\le 1$. D'après la formule d'intégration par parties (II.14), on a

$$\gamma_{jk}(1)=\int_0^1 \gamma_{jk}(t)\chi_{jk}^2(t)\,dt+\int_0^1 \varrho_{jk}(t)\mu_{jk}^{p-1}(t)\chi_{jk}(t)u_t\delta W_t.$$

D'après (III.8), pour établir (III.31), il reste à voir que

$$\sup_j 2^{-j}\Big|\sum_{k=1}^{2^j}\int_0^1 \varrho_{jk}(t)\mu_{jk}^{p-1}(t)\chi_{jk}(t)u_t\delta W_t\Big|<\infty \quad \text{p.s.} \tag{III.32}$$

Or, pour cela, on procède comme dans l'étape (a); la fonction ϱ_{jk} étant continue, bornée et non aléatoire, ne pose aucun problème supplémentaire dans les majorations.

IV. Exemple. Soit $p>2$ et $\eta\in L^p(\Omega,\mathcal{F},P)$. Considérons l'équation stochastique intégrale

$$X_t=\eta+\int_0^t X_s\delta W_s,\quad t\in[0,1], \tag{IV.1}$$

où l'intégrale stochastique est prise au sens de Skorokhod. La solution de (IV.1) a été identifiée par Buckdahn [B] dans un cadre plus général. Plus précisément, on a

PROPOSITION IV.1. *Pour $t\in[0,1]$, soit*

$$Y_t=\exp(W_t-t/2),\quad Z_t=\eta(W-t\wedge\cdot),\quad X_t=Y_tZ_t.$$

Si $\eta\in L^p(\Omega)$ pour un $p>2$, alors $\mathbf{1}_{[0,t]}X$ est intégrable au sens de Skorokhod et (IV.1) *est satisfaite pour tout $t\in[0,1]$.*

La démonstration de cette proposition peut être trouvée dans [BI]. On en déduit une expression explicite du processus intégral de Skorokhod associé à X :

$$U_t=\int_0^t X_s\delta W_s=X_t-\eta.$$

Choisissons maintenant $\eta(W)=\varphi(W_1)$, où φ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. L'expression de X devient alors

$$X_t=\varphi(W_1-t)\exp(W_t-t/2),\quad t\in[0,1]. \tag{IV.2}$$

Prouvons directement dans cette situation que les hypothèses du théorème III.1 sont suffisantes pour assurer l'appartenance p.s. de $t\mapsto U_t$ à un espace de Besov.

DÉFINITION IV.2. Soit $\mu(dx)=(2\pi)^{-1/2}\exp(-x^2/2)\,dx$ et $p\ge 2$. On note $W^{1,p}(\mathbb{R},\mu)=\{\varphi\in L^p(\mathbb{R},\mu):\dot\varphi\in L^p(\mathbb{R},\mu)\}$, où $\dot\varphi$ désigne la dérivée de φ au sens des distributions.

Il est clair que $\varphi(W_1)\in\mathcal{D}_{p,1}$ si et seulement si $\varphi\in W^{1,p}(\mathbb{R},\mu)$.

PROPOSITION IV.3. *Soit $q>p>2$. Si $\varphi\in W^{1,q}(\mathbb{R},\mu)$ alors $X\in\mathcal{L}^{p,1}$.*

Démonstration. D'après le théorème de Girsanov, $W-t\wedge\cdot$ est un mouvement Brownien sous la probabilité $Y_t.P$. Par conséquent,

$$E\int_0^1 |X_t|^p dt=\int_0^1 E|Y_tZ_t|^p\,dt \le \Big(\int_0^1 E|Y_t|^{\lambda' p_1}\,dt\Big)^{1/\lambda'}\Big(\int_0^1 E(|Y_t|^{\lambda p_2}|Z_t|^{\lambda p})\,dt\Big)^{1/\lambda}$$

d'après l'inégalité de Hölder, où l'on a choisi $1/\lambda + 1/\lambda' = 1$, $p_1 + p_2 = p$, $\lambda p = q$, $\lambda p_2 = 1$. Le membre droit ci-dessus est donc majoré par

$$C\Big(\int_0^1 E(Y_t|\eta(W-t\wedge\cdot)|^q)\,dt\Big)^{1/\lambda} \le C\Big(\int_0^1 E|\eta(W)|^q\,dt\Big)^{1/\lambda} < \infty.$$

D'autre part,

$$D_sX_t = (D_sY_t)Z_t + Y_tD_sZ_t = Y_tZ_t\mathbf{1}_{[0,t]}(s) + Y_t\dot\varphi(W_1-t).$$

Pour démontrer que $E\int_0^1\int_0^1 |D_sX_t|^p\,ds\,dt < \infty$, on utilise la même technique que ci-dessus.

Observons maintenant que si $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R},\mu)$ alors la trajectoire $t \mapsto U_t = \varphi(W_1-t)Y_t - \varphi(W_1)$ appartient p.s. à l'espace de Besov $\mathcal{B}^{1/2}_{p,\infty}$. L'hypothèse que $\varphi \in W^{1,q}(\mathbb{R},\mu)$ avec $q > p > 2$ entraîne donc non seulement que $X \in \mathcal{L}^{p,1}$, mais aussi que la conclusion du théorème III.1 est vraie.

Remarques. (i) Des résultats analogues s'obtiennent évidemment dans le cas où φ est une fonction de plusieurs variables, i.e. lorsque $\eta(W) = \varphi(W_{t_1},\ldots,W_{t_n})$ avec $0 \le t_1 < \ldots < t_n \le 1$.

(ii) L'exemple étudié permet également de voir que les hypothèses du théorème III.1 ne sont pas nécessaires. En effet, choisissant $\varphi(x) = \sqrt{|x|}$, il est clair que l'application $t \mapsto U_t = \sqrt{|W_1-t|}Y_t - \sqrt{|W_1|}$ appartient p.s. à $\mathcal{B}^{1/2}_{p,\infty}$, alors que $X \notin \mathcal{L}^{2,1}$.

Remerciements. Je tiens à remercier B. Roynette pour son aide tout au long de l'élaboration de ce travail.

Bibliographie

[BI] M. T. Barlow and P. Imkeller, *On some sample path properties of Skorokhod integral processes*, in: Séminaire de Probabilités, XXVI, Lecture Notes in Math. 1526, Springer, Berlin, 1992, 1992, 70–80.

[BL] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation Spaces: An Introduction*, Springer, Berlin, 1976.

[B] R. Buckdahn, *Quasilinear partial stochastic differential equations without non-anticipation requirement*, preprint 176, Humboldt-Universität Berlin, 1988.

[C] Z. Ciesielski, *On the isomorphisms of the spaces H_α and m*, Bull. Acad. Polon. Sci. 8 (1960), 217–222.

[CKR] Z. Ciesielski, G. Kerkyacharian et B. Roynette, *Quelques espaces fonctionnels associés à des processus gaussiens*, Studia Math. 107 (1993), 171–204.

[GT] B. Gaveau et P. Trauber, *L'intégrale stochastique comme opérateur de divergence dans l'espace fonctionnel*, J. Funct. Anal. 46 (1982), 230–238.

[I1] P. Imkeller, *Regularity of Skorohod integral based on integrands in a finite Wiener chaos*, Probab. Theory Related Fields 98 (1994), 137–142.

[I2] —, *Occupation densities for stochastic integral processes in the second Wiener chaos*, ibid. 91 (1992), 1–24.

[NP] D. Nualart and E. Pardoux, *Stochastic calculus with anticipating integrands*, ibid. 78 (1988), 535–581.

[NZ] D. Nualart and M. Zakai, *Generalized stochastic integrals and the Malliavin calculus*, ibid. 73 (1986), 255–280.

[PP] E. Pardoux and Ph. Protter, *A two-sided stochastic integral and its calculus*, ibid. 76 (1987), 15–49.

[P] J. Peetre, *New Thoughts on Besov Spaces*, Duke Univ. Math. Ser. I, 1976.

[R] B. Roynette, *Mouvement Brownien et espaces de Besov*, Stochastics Stochastics Rep. 43 (1993), 221–260.

[S] A. V. Skorokhod, *On a generalization of a stochastic integral*, Theory Probab. Appl. 20 (1975), 219–233.

[W] S. Watanabe, *Lectures on Stochastic Differential Equations and Malliavin Calculus*, Tata Institute of Fundamental Research, Springer, Berlin, 1984.

INSTITUT ELIE CARTAN
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE NANCY I
BP 239
54506 VANDŒUVRE-LÈS-NANCY CEDEX, FRANCE

Received March 9, 1995
Revised version August 29, 1995
(3428)