[RL] B. Ramachandran and K. S. Lau, *Functional Equations in Probability Theory*, Academic Press, 1991.

[RS] C. R. Rao and D. N. Shanbhag, *Recent results on characterizations of probability distributions: A unified approach through an extension of Deny's theorem*, Adv. Appl. Probab. 18 (1986), 660–678.

[Sc] A. Schief, *Separation properties for self-similar sets*, Proc. Amer. Math. Soc. 122 (1994), 111–115.

[Sch] L. Schwartz, *Théorie générale des fonctions moyennes-périodiques*, Ann. of Math. 48 (1947), 857–929.

[S] E. Seneta, *Nonnegative Matrices*, Wiley, New York, 1973.

[Str1] R. Strichartz, *Self-similar measures and their Fourier transformations I*, Indiana Univ. Math. J. 39 (1990), 797–817.

[Str2] —, *Self-similar measures and their Fourier transformations II*, Trans. Amer. Math. Soc. 336 (1993), 335–361.

[Str3] —, *Self-similar measures and their Fourier transformations III*, Indiana Univ. Math. J. 42 (1993), 367–411.

[W] J. L. Wang, *Topics in fractal geometry*, Ph.D. Thesis, North Texas University, 1994.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF PITTSBURGH
PITTSBURGH, PENNSYLVANIA 15260
U.S.A.

GOLDSMITHS' COLLEGE
UNIVERSITY OF LONDON
LONDON SE14, ENGLAND

HOUSTON ADVANCED RESEARCH CENTER
4800 RESEARCH FOREST DRIVE
THE WOODLANDS, TEXAS 77381
U.S.A.

Received January 25, 1994
Revised version May 31, 1995 (3221)

STUDIA MATHEMATICA 117 (1) (1995)

Extension Gevrey et rigidité dans un secteur

par

VINCENT THILLIEZ (Lille)

Abstract. We study a rigidity property, at the vertex of some plane sector, for Gevrey classes of holomorphic functions in the sector. For this purpose, we prove a linear continuous version of Borel–Ritt's theorem with Gevrey conditions.

0. Introduction. On sait qu'une fonction f holomorphe dans un voisinage V de 0 dans $\mathbb{C}$ est complètement déterminée par la donnée des $f^{(n)}(0)$, $n \in \mathbb{N}$. En fait, cette donnée peut être remplacée par celle des $f^{(n)}(z_n)$, $n \in \mathbb{N}$, où $(z_n)_{n\geq 0}$ est une suite convenable de points de V. Divers auteurs, dont J. A. Marti [Ma] dresse la liste, ont ainsi donné des conditions suffisantes très précises sur la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ pour que soit vérifiée cette propriété, dite de "rigidité". A titre d'exemple, lorsque V contient le disque unité fermé, le corollaire 2.8 de [Ma] stipule que la condition

$$(*)\qquad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!p!}|z_n|^p \leq C < 2 \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

est suffisante pour que la nullité des $f^{(n)}(z_n)$, $n \in \mathbb{N}$, implique celle de f. La clef du problème dans [Ma] consiste à montrer que, moyennant une condition comme $(*)$, les formes linéaires $L_n : f \to \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$ et $K_n : f \to \frac{1}{n!}f^{(n)}(z_n)$ sont "suffisamment proches" en un sens topologiquement adéquat et, comme conséquence, que l'orthogonalité par rapport aux K_n implique l'orthogonalité par rapport aux L_n.

Il est alors naturel de chercher à savoir ce qui se passe dans la situation suivante : 0 est maintenant un point du bord de l'ouvert V et on considère des fonctions f holomorphes dans V, de classe C^∞ sur $\overline{V}$, présentant encore la propriété d'être uniquement déterminées par la donnée des $f^{(n)}(0)$, $n \in \mathbb{N}$. Existe-t-il alors encore une notion de rigidité comme celle évoquée auparavant?

1991 *Mathematics Subject Classification*: 30D60, 46E10.
Key words and phrases: Gevrey classes, continuous extension operators, sequences of uniqueness, rigidity.

Pour cette étude, on va choisir, comme prototype de la situation ci-dessus, le cas où V est un secteur angulaire de sommet 0 dans $\mathbb{C}$ et où les fonctions f étudiées appartiennent à une classe de Gevrey d'ordre $1+\alpha$ ($\alpha > 0$); c'est-à-dire que l'on a

$$\|f\|_\sigma := \sup_{n\in\mathbb{N},\, z\in V} \frac{|f^{(n)}(z)|}{\sigma^n n!^{1+\alpha}} < \infty$$

pour un réel $\sigma > 0$ convenable. En effet, lorsque $\alpha\pi$ est inférieur à l'ouverture angulaire de V, le lemme de Watson (voir (1.4)) assure alors la propriété d'unicité par rapport aux $f^{(n)}(0)$, $n \in \mathbb{N}$. L'idée est alors d'utiliser des techniques d'analyse fonctionnelle inspirées de [Ma], dans le cadre des topologies associées aux normes $\|\cdot\|_\sigma$. C'est cependant à ce niveau qu'on se heurte à une difficulté importante. Dans le cas holomorphe, [Ma] utilise essentiellement la convergence du développement de Taylor en 0 pour exprimer les formes linéaires K_n comme séries des L_n. Dans notre situation, ce développement est bien sûr divergent et les K_n apparaissent vite inadéquates : on est donc amené à suivre une stratégie différente, visant à leur substituer, dans un cadre naturel, une autre famille de formes linéaires, possédant de meilleures propriétés.

Pour ce faire, dans un premier temps (§1), on considère l'espace Γ_σ^α des suites $a = (a_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes satisfaisant $N_\sigma(a) := \sup_{n\geq 0} \frac{|a_n|}{\sigma^n n!^\alpha} < \infty$ et pour tout secteur $W \subset V$, d'ouverture inférieure à $\alpha\pi$, on construit un opérateur T_σ tel que, pour toute a de Γ_σ^α, $T_\sigma a$ soit holomorphe dans W, dépende linéairement de a, satisfasse $\frac{1}{n!}(T_\sigma a)^{(n)}(0) = a_n$ pour tout n et vérifie $\|T_\sigma a\|_{c\sigma} \leq C(\sigma) N_\sigma(a)$ pour des constantes $c \geq 1$ et $C(\sigma) > 0$ convenables.

Ce premier résultat (théorème (1.3)) peut être vu comme une version linéaire continue du théorème "Borel–Ritt–Gevrey" de J. P. Ramis ([Ra1], [Ra2]).

Ensuite (§2), on définit et on étudie des espaces fonctionnels adaptés au problème. On est alors en mesure (§3) d'obtenir une propriété de rigidité naturelle pour les T_σ (théorème (3.3)), moyennant une hypothèse de décroissance géométrique assez rapide sur la suite $(z_n)_{n\geq 0}$. Cette propriété constitue le résultat principal de notre étude. On obtient alors, comme on le souhaitait, un résultat d'unicité pour les fonctions comme simple corollaire de la rigidité des T_σ (cor. (3.4)).

Enfin, les méthodes utilisées permettent de construire un opérateur $\widetilde{T}_\sigma$ possédant les mêmes propriétés de continuité que T_σ, mais pour lequel la propriété $\frac{1}{n!}(T_\sigma a)^{(n)}(0) = a_n$ est remplacée par la propriété d'interpolation $\frac{1}{n!}(\widetilde{T}_\sigma a)^{(n)}(z_n) = a_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$. Ce résultat (théorème (3.6)) complète ainsi (1.3).

1. Définitions

(1.1) *Espaces de Gevrey holomorphes.* Pour $\theta \in \,]0, 2\pi[$, on désigne par V_θ le secteur non borné de $\mathbb{C}$ de sommet 0, d'ouverture θ, défini par $V_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg} z| < \theta/2\}$. On note $H(V_\theta)$ l'espace des fonctions holomorphes sur V_θ.

Soit à présent α un réel fixé, $\alpha > 0$. Pour tout réel σ, $\sigma > 0$, on note $HG_\sigma^{1+\alpha}(V_\theta)$ l'espace des fonctions f de $H(V_\theta)$ telles que l'on ait

$$\|f\|_\sigma := \sup_{n\in\mathbb{N},\, z\in V_\theta} \frac{|f^{(n)}(z)|}{\sigma^n n!^{1+\alpha}} < \infty. \tag{1.1.1}$$

Il est immédiat qu'une telle fonction est dans $C^\infty(\overline{V}_\theta)$ et on a $|f^{(n)}(z)| \leq \|f\|_\sigma \sigma^n n!^{1+\alpha}$ pour tout z de $\overline{V}_\theta$.

Muni de la norme $\|\cdot\|_\sigma$ définie en (1.1.1), $HG_\sigma^{1+\alpha}(V_\theta)$ est un espace de Banach. Pour $\sigma < \tau$, c'est un sous-espace (non fermé) de $HG_\tau^{1+\alpha}(V_\theta)$ et on a $\|\cdot\|_\tau \leq \|\cdot\|_\sigma$.

(1.2) *Espaces de suites.* Soit à présent Γ_σ^α l'espace des suites $a = (a_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes telles que l'on ait

$$N_\sigma(a) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|a_n|}{\sigma^n n!^\alpha} < \infty.$$

Muni de la norme N_σ, Γ_σ^α est un espace de Banach.

On considère aussi le sous-espace de Banach $\Gamma_{\sigma,0}^\alpha$ de Γ_σ^α défini par

$$\Gamma_{\sigma,0}^\alpha = \Big\{a \in \Gamma_\sigma^\alpha : \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{\sigma^n n!^\alpha} = 0\Big\}.$$

Clairement, le dual et bidual forts de $\Gamma_{\sigma,0}^\alpha$ sont donnés respectivement par

$$(\Gamma_{\sigma,0}^\alpha)' = \Big\{L = (\lambda_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n| \sigma^n n!^\alpha < \infty\Big\} \quad \text{et} \quad (\Gamma_{\sigma,0}^\alpha)'' = \Gamma_\sigma^\alpha.$$

On définit alors l'opérateur "jet de Taylor" $J : HG_\sigma^{1+\alpha}(V_\theta) \to \Gamma_\sigma^\alpha$ par

$$Jf := \Big(\frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\Big)_{n\geq 0}. \tag{1.2.1}$$

Pour $f \in HG_\sigma^{1+\alpha}(V_\theta)$, on posera aussi $N_\sigma(f) := N_\sigma(Jf)$ par abus. On constate que N_σ est une semi-norme sur $HG_\sigma^{1+\alpha}(V_\theta)$, que l'on a $N_\sigma(f) \leq \|f\|_\sigma$ et $N_\sigma(f) = 0$ si et seulement si f est plate en 0.

On définit maintenant les opérateurs T_σ qui constituent la clef de ce travail.

(1.3) THÉORÈME. *Soit θ un réel satisfaisant $0 < \theta < 2\pi$ et $\theta < \alpha\pi$. Pour tout réel $\sigma > 0$, il existe un opérateur linéaire $T_\sigma : \Gamma_\sigma^\alpha \to H(V_\theta)$ tel* *que l'on ait, pour toute suite a de Γ_σ^α,*

$$T_\sigma a \in HG^{1+\alpha}_{c\sigma}(V_\theta), \tag{1.3.1}$$

$$JT_\sigma a = a \tag{1.3.2}$$

et

$$\|T_\sigma a\|_{c\sigma} \le C(\sigma) N_\sigma(a), \tag{1.3.3}$$

où c et $C(\sigma)$ sont des constantes, $c \ge 1$, $C(\sigma) > 0$, ne dépendant respectivement que de α, θ et de α, θ, σ.

Les propriétés (1.3.1) et (1.3.2) contiennent le théorème de Borel–Ritt–Gevrey ([Ra1], [Ra2]). Le fait que l'on ne traite pas le cas limite $\theta = \alpha\pi$ de [Ra2] est lié à l'uniformité sur V_θ des constantes intervenant dans la définition des classes de Gevrey considérées, alors que [Ra2] étudie en fait la classe $\varprojlim_{\phi<\theta} \varinjlim_{\sigma>0,\, r>0} HG^{1+\alpha}_\sigma(V_\phi \cap \{|z| < r\})$.

La preuve de (1.3) s'inspire de la procédure d'interpolation dans [CC2] et utilise les résultats d'extension continue de [CC1] : c'est ainsi que l'on obtiendra, outre (1.3.1) et (1.3.2), la propriété de continuité (1.3.3).

Preuve du théorème. Dans la suite, on note c_i (resp. $C_i(\sigma)$) les constantes strictement positives ne dépendant que de α et θ (resp. de α, θ et σ). On va procéder en 5 étapes.

(i) *Extension non holomorphe.* D'après [CC1], n° 13 (voir aussi [P], 3.6), on sait qu'il existe une fonction g de classe C^∞ sur $\mathbb{C}$, à support compact, dépendant linéairement de a et satisfaisant

$$|D^n g| \le C_1(\sigma) N_\sigma(a) (c_1\sigma)^n n!^{1+\alpha} \quad \text{dans } \mathbb{C}, \tag{1.3.4}$$

pour toute dérivation $D^n = \partial^n/\partial z^{n'} \partial \overline{z}^{n''}$ $(n' + n'' = n)$, ainsi que

$$\frac{\partial^{p+q} g}{\partial z^p \partial \overline{z}^q}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \ne 0, \\ p!a_p & \text{si } q = 0, \end{cases} \tag{1.3.5}$$

pour tous p et q entiers naturels. On a alors, pour tout z de $\mathbb{C}$, et tous p et k de $\mathbb{N}$,

$$\left| D^p \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z) \right| \le C_1(\sigma) N_\sigma(a) (c_1\sigma)^{p+k+1} (p+k+1)!^{1+\alpha} \frac{|z|^k}{k!}$$

en vertu de la formule de Taylor à l'ordre k, du fait que $\partial g/\partial \overline{z}$ est plate en 0 et de (1.3.4). On en déduit aisément

$$\left| D^p \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z) \right| \le C_2(\sigma) N_\sigma(a) (c_2\sigma)^p p!^{1+\alpha} (c_2\sigma|z|)^k k!^\alpha. \tag{1.3.6}$$

(ii) *Construction de fonctions plates.* Pour $\mu > 0$ à déterminer, on considère la fonction $\Psi(z) = \exp(-\mu z^{-1/\alpha})$, holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Soit $\varepsilon > 0$

tel que l'on ait $\theta + \varepsilon < \alpha\pi$. Il est facile de voir que pour $z \in V_{\theta+\varepsilon}$, on a

$$\exp(-\mu|z|^{-1/\alpha}) \le |\Psi(z)| \le \exp(-\mu c_3 |z|^{-1/\alpha}) \tag{1.3.7}$$

avec $c_3 = \cos\left(\frac{\theta+\varepsilon}{2\alpha}\right)$. Notons par ailleurs que pour tout z de V_θ, le disque de centre z et de rayon $(\sin\varepsilon)|z|$ est contenu dans $V_{\theta+\varepsilon}$ en vertu de considérations élémentaires. La formule de Cauchy appliquée à Ψ sur ce disque donne, compte tenu de (1.3.7),

$$\begin{aligned} |\Psi^{(n)}(z)| &\le n!((\sin\varepsilon)|z|)^{-n} \exp(-\mu c_4 |z|^{-1/\alpha}) \\ &\le (c_5\mu^{-\alpha})^n n!^{1+\alpha} (((c_4\mu/(2\alpha))|z|^{-1/\alpha})^n/n!)^\alpha \exp(-\mu c_4 |z|^{-1/\alpha}) \end{aligned}$$

avec $c_4 = c_3(1 + \sin\varepsilon)^{-1/\alpha}$ et $c_5 = (2\alpha/c_4)^\alpha/\sin\varepsilon$.

On obtient donc

$$|\Psi^{(n)}(z)| \le (c_5\mu^{-\alpha})^n n!^{1+\alpha} \exp(-\mu c_6 |z|^{-1/\alpha}) \tag{1.3.8}$$

avec $c_6 = c_4/2$.

On a similairement

$$\left| \left(\frac{1}{\Psi}\right)^{(q)}(z) \right| \le \frac{q!}{((\sin\varepsilon)|z|)^q} \exp(\mu c_7 |z|^{-1/\alpha}) \tag{1.3.9}$$

pour tout z de V_θ et tout q de $\mathbb{N}$, avec $c_7 = (1 - \sin\varepsilon)^{-1/\alpha}$.

On peut supposer que l'on a $\varepsilon < \pi/6$, donc

$$c_7 \le 2^{1/\alpha}. \tag{1.3.10}$$

(iii) *Division.* On pose $h(t) = \inf_{k\ge0} t^k k!^\alpha$ pour $t > 0$. Il est facile de voir que pour t assez petit, on a

$$\exp(-2\alpha t^{-1/\alpha}) \le h(t) \le \exp\left(-\frac{\alpha}{2} t^{-1/\alpha}\right). \tag{1.3.11}$$

Soit alors $G = \frac{1}{\Psi}\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}$. On calcule les dérivées $D^n G$ à l'aide de la formule de Leibniz et on estime chaque produit $\left(D^p \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\right)\left(D^q \frac{1}{\Psi}\right)$ (avec $p + q = n$) qui apparaît, à l'aide de (1.3.9) et de (1.3.6) appliqué avec $k = q + l$, l entier quelconque. On obtient l'estimation

$$|D^n G(z)| \le C_3(\sigma) N_\sigma(a) (c_8\sigma)^n n!^{1+\alpha} (c_2\sigma|z|)^l l!^\alpha \exp(\mu c_7 |z|^{-1/\alpha}),$$

valable pour tous n et l de $\mathbb{N}$ et tout z de V_θ. En prenant la borne inférieure par rapport à l, il vient, compte tenu de (1.3.11),

$$|D^n G(z)| \le C_3(\sigma) N_\sigma(a) (c_8\sigma)^n n!^{1+\alpha} \exp((-c_9\sigma^{-1/\alpha} + \mu c_7)|z|^{-1/\alpha})$$

pour z assez petit dans V_θ. On choisit

$$\mu = 2^{-1-1/\alpha} c_9 \sigma^{-1/\alpha}. \tag{1.3.12}$$

De (1.3.10), de ce qui précède et du fait que G est à support compact, on déduit alors que l'on a

$$(1.3.13) \qquad |D^n G(z)| \leq C_4(\sigma) N_\sigma(a) (c_8\sigma)^n n!^{1+\alpha} \exp(-c_{10}\sigma|z|^{-1/\alpha})$$

pour tous n de $\mathbb{N}$ et z de V_θ. On rappelle qu'en outre, G dépend linéairement de a.

(iv) *Problème* $\overline{\partial}$. En utilisant encore [CC1], n° 13, on voit aussi qu'il existe une fonction $\widetilde{G}$ de classe C^∞ à support compact dans $\mathbb{C}$, dépendant linéairement de G, donc de a, satisfaisant

$$(1.3.14) \qquad \widetilde{G}_{|V_\theta} = G$$

et, compte tenu de (1.3.13),

$$(1.3.15) \qquad |D^n \widetilde{G}| \leq C_5(\sigma) N_\sigma(a) (c_{11}\sigma)^n n!^{1+\alpha} \quad \text{dans } \mathbb{C}.$$

On pose alors

$$u(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\widetilde{G}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta}.$$

On sait que l'on a $\partial u/\partial \overline{z} = \widetilde{G}$ dans $\mathbb{C}$, donc, par (1.3.14),

$$(1.3.16) \qquad \partial u/\partial \overline{z} = G \quad \text{dans} \quad V_\theta.$$

En outre, on a

$$D^n u(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{(D^n\widetilde{G})(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta},$$

donc, compte tenu de (1.3.15) et du fait que $\widetilde{G}$ est à support compact,

$$(1.3.17) \qquad |D^n u| \leq C_6(\sigma) N_\sigma(a) (c_{11}\sigma)^n n!^{1+\alpha} \quad \text{dans } \mathbb{C}.$$

(v) *Conclusion*. On considère alors $T_\sigma a = g - \Psi u$. Comme g et u, $T_\sigma a$ dépend linéairement de a. Par construction, elle est holomorphe dans V_θ. Par ailleurs, en utilisant (1.3.8), (1.3.12), (1.3.17) et la formule de Leibniz, on obtient

$$(1.3.18) \qquad |D^n(\Psi u)(z)| \leq C_7(\sigma) N_\sigma(a)(c_{12}\sigma)^n n!^{1+\alpha} \exp(-C_8(\sigma)|z|^{-1/\alpha})$$

pour tous n de $\mathbb{N}$ et z de V_θ. Compte tenu de (1.3.4), on en déduit (1.3.1) et (1.3.3). Enfin, (1.3.18) montre que Ψu est plate en 0, donc $(T_\sigma a)^{(p)}(0) = \frac{\partial^p g}{\partial z^p}(0) = p! a_p$ pour tout p, ce qui prouve (1.3.2). ■

(1.4) *Une propriété de* N_σ. Soit ϕ un réel; on suppose que l'on a $\alpha\pi \leq \phi < 2\pi$ et on considère une fonction f dans $HG_\sigma^{1+\alpha}(V_\phi)$, supposée plate en 0. Le lemme de Watson [Ra2] stipule alors que f est nulle (la condition $\alpha\pi < \phi$ de [Ra2] étant remplacée par $\alpha\pi \leq \phi$ à cause, encore une fois, de la définition "uniforme" de nos classes).

Au contraire, pour $0 < \phi < \alpha\pi$, la deuxième étape de la preuve de (1.3) montre qu'il existe dans $HG_\sigma^{1+\alpha}(V_\phi)$ des fonctions plates en 0, non nulles.

Autrement dit, on a l'énoncé suivant :

N_σ est une norme sur $HG_\sigma^{1+\alpha}(V_\phi)$ si et seulement si on a $\alpha\pi \leq \phi$.

2. Sur certains espaces fonctionnels

(2.1) *Préambule*. Dans tout le paragraphe 2, on considèrera α et θ fixés, $\alpha > 0$, $0 < \theta < 2\pi$ satisfaisant la condition $\theta < \alpha\pi$.

(2.2) DÉFINITIONS. Pour $\sigma > 0$, on note H_σ l'espace des fonctions f de $HG_{c\sigma}^{1+\alpha}(V_\theta)$ telles que l'on ait $Jf \in \Gamma_{\sigma,0}^\alpha$ (c désigne la constante définie dans l'énoncé du théorème (1.3)). On munit H_σ de la norme $\|\cdot\|_\sigma^\wedge$ définie par

$$(2.2.1) \qquad \|f\|_\sigma^\wedge = \|f\|_{c\sigma} + N_\sigma(f),$$

ce qui en fait un espace de Banach.

On désigne par F_σ le sous-espace (fermé) de H_σ constitué par les fonctions plates en 0, et par E_σ le quotient H_σ/F_σ. On note π_σ la projection canonique de H_σ sur E_σ.

Soit $\dot{f}$ dans E_σ; on définit de façon standard la norme $M_\sigma(\dot{f})$ de $\dot{f}$ dans E_σ par

$$(2.2.2) \qquad M_\sigma(\dot{f}) = \inf_{g \in F_\sigma} \|f + g\|_\sigma^\wedge,$$

où f est un représentant quelconque de $\dot{f}$ dans H_σ.

Compte tenu de (1.2), on peut définir une autre norme N_σ sur E_σ en posant simplement $N_\sigma(\dot{f}) := N_\sigma(f)$ et, d'après (2.2.1), on a

$$(2.2.3) \qquad N_\sigma(\dot{f}) \leq M_\sigma(\dot{f}).$$

(De même, J passe au quotient en posant $J\dot{f} := Jf$.)

On notera M'_σ (resp. N'_σ) la norme sur le dual fort de (E_σ, M_σ) (resp. (E_σ, N_σ)).

(2.3) *Injection des espaces* E_σ. Soient σ et τ avec $\sigma < \tau$, $\dot{f}$ un élément de E_σ et f un représentant quelconque de $\dot{f}$ dans H_σ. On définit l'injection $i_{\sigma,\tau} : E_\sigma \to E_\tau$ en posant $i_{\sigma,\tau}(\dot{f}) = \pi_\tau(f)$, ce qui a un sens en vertu des inclusions $F_\sigma \subset F_\tau$ et $H_\sigma \subset H_\tau$. On a en outre

$$M_\tau(i_{\sigma,\tau}(\dot{f})) = \inf_{g \in F_\tau} \|f + g\|_\tau^\wedge \leq \inf_{g \in F_\sigma} \|f + g\|_\tau^\wedge \leq M_\sigma(\dot{f}).$$

Ceci permet de considérer E_σ comme un sous-espace de E_τ, de définir la limite inductive

$$(2.3.1) \qquad E = \varinjlim_{\sigma > 0} (E_\sigma, M_\sigma)$$

et d'avoir, pour $\sigma < \tau$, l'inégalité

$$(2.3.2) \qquad M_\tau \leq M_\sigma \quad \text{sur } E_\sigma.$$

Il est alors immédiat que le dual fort E' de E est un espace de Fréchet, associé à la famille croissante de normes M'_σ, $\sigma > 0$.

La proposition ci-dessous est fondamentale dans la suite de ce travail.

(2.4) PROPOSITION. *Soit l'opérateur $P_\sigma = T_\sigma J$ sur H_σ. Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(2.4.1) *On a la somme directe topologique $H_\sigma = R_\sigma \oplus F_\sigma$, où $R_\sigma = T_\sigma(\Gamma^\alpha_{\sigma,0})$, et P_σ n'est autre que le projecteur sur R_σ associé à cette décomposition.*

(2.4.2) *Outre l'inégalité immédiate* (2.2.3), *on a*

$$M_\sigma(\dot f) \le (C(\sigma)+1)N_\sigma(\dot f)$$

pour tout $\dot f$ de E_σ (où $C(\sigma)$ a été définie en (1.3)). *En particulier, les normes M_σ et N_σ sont équivalentes sur E_σ.*

(2.4.3) *L'application $J : E_\sigma \to \Gamma^\alpha_{\sigma,0}$ est un isomorphisme, d'inverse $\pi_\sigma \circ T_\sigma$.*

Preuve. Soit $\dot f \in E_\sigma$ et soit f un représentant de $\dot f$ dans H_σ. Alors $P_\sigma f$ appartient à R_σ et $P_\sigma f - f$ est plate en 0. De plus, on a $\|P_\sigma f\|^\wedge_\sigma = \|P_\sigma f\|_{c\sigma} + N_\sigma(f) \le (C(\sigma)+1)N_\sigma(f)$ en vertu de (2.2) et (1.3). Ceci établit (2.4.1), puisque l'on a $N_\sigma(f) \le \|f\|^\wedge_\sigma$, d'où la continuité de P_σ. En outre, $P_\sigma f$ est un représentant de $\dot f$, donc $M_\sigma(\dot f) \le \|P_\sigma f\|^\wedge_\sigma \le (C(\sigma)+1)N_\sigma(\dot f)$, ce qui prouve (2.4.2). Enfin, (2.4.3) résulte de ce qui précède et des définitions. ∎

(2.5) Remarques. (i) La clef de (2.4) réside dans le fait que pour f dans H_σ, $P_\sigma f$ et f définissent le même élément $\dot f$ de E_σ mais $\|P_\sigma f\|_{c\sigma}$ est contrôlé par $N_\sigma(f)$, ce qui est clairement faux pour $\|f\|_{c\sigma}$, comme on le voit pour $f \in F_\sigma$, $f \ne 0$. En fait, même pour $f \in HG^{1+\alpha}_\sigma(V_\phi)$, $\phi \ge \alpha\pi$, l'auteur a pu montrer que l'on n'a pas d'estimation a priori du type $\|f\|_{c\sigma} \le CN_\sigma(f)$, bien que dans ce cas il n'existe pas de fonction plate en 0 non triviale d'après (1.4).

(ii) D'après (2.4.1), on a $P^2_\sigma = P_\sigma$. En fait, la propriété (1.3.2) permet même de voir que pour $\tau > \sigma$, $P_\tau P_\sigma$ a un sens, et $P_\tau P_\sigma = P_\tau$, en restriction à H_σ.

Les opérateurs P_σ joueront de nouveau un rôle important au paragraphe 3.

(2.6) DÉFINITIONS. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\dot f \in E_\sigma$, on pose $L_n(\dot f) = (J\dot f)_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$, où f est un représentant quelconque de $\dot f$ dans H_σ. On a $|L_n(\dot f)| \le \sigma^n n!^\alpha N_\sigma(\dot f) \le \sigma^n n!^\alpha M_\sigma(\dot f)$ pour tous $\sigma > 0$ et $\dot f$ de E_σ, donc

(2.6.1) $\qquad L_n$ appartient à E' et $\quad M'_\sigma(L_n) \le \sigma^n n!^\alpha$.

On considère par ailleurs la suite $a^{(n)} = (a^{(n)}_p)_{p\ge 0}$ définie par $a^{(n)}_p = \delta_{np}$ (symbole de Kronecker). La suite $a^{(n)}$ appartient à chaque $\Gamma^\alpha_{\sigma,0}$, on peut donc définir $f^\sigma_n = T_\sigma a^{(n)}$, dans H_σ. Pour $\tau > \sigma$, il résulte de (2.3) et (2.4.3) que $\pi_\sigma(f^\sigma_n)$ s'identifie à $\pi_\tau(f^\tau_n)$ dans E. On définit ainsi de façon cohérente un élément $\dot f_n$ de E et on a, par construction,

(2.6.2) $$L_p(\dot f_n) = \delta_{np}.$$

(En fait, $\dot f_n$ sert de substitut au monôme $z \to z^n$ dont on ne dispose pas dans H_σ, le secteur V_θ considéré étant non borné.)

A partir de (1.2) et (2.4), on obtient les propositions suivantes via des arguments standard.

(2.7) PROPOSITION. *La famille $(\dot f_n)_{n\ge 0}$ est une base de Schauder de E, en ce sens que l'on a*

$$\dot f = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\dot f)\dot f_n \quad \textit{dans } E_\sigma$$

pour tout $\sigma > 0$ et tout $\dot f$ de E_σ.

(2.8) PROPOSITION. *Pour tout L de E'_σ, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(2.8.1) *La série $\sum_{n=0}^\infty |L(\dot f_n)|\sigma^n n!^\alpha$ converge, a pour somme $N'_\sigma(L)$ et on a*

$$(C(\sigma)+1)^{-1}N'_\sigma(L) \le M'_\sigma(L) \le N'_\sigma(L).$$

(2.8.2) *On a $L = \sum_{n=0}^\infty L(\dot f_n)L_n$ dans E'_σ.*

Réciproquement, si $(\lambda_n)_{n\ge 0}$ est une suite de nombres complexes telle que $\sum_{n=0}^\infty |\lambda_n|\sigma^n n!^\alpha$ converge, alors la série $\sum_{n=0}^\infty \lambda_n L_n$ converge dans E'_σ et l'élément L de E'_σ qu'elle définit satisfait $L(\dot f_n) = \lambda_n$ pour tout n.

Pour tout $\sigma > 0$, la famille $(L_n)_{n\ge 0}$ est donc une base de Schauder pour E'_σ, comme conséquence de (2.8.2). Si on applique à E'_σ le théorème 1 de [Ar], on obtient alors la propriété suivante.

(2.9) PROPOSITION. *Soit $(K^\sigma_n)_{n\ge 0}$ une famille d'éléments de E'_σ. On suppose qu'il existe une constante k, $0 < k < 1$, telle que l'on ait*

$$M'_\sigma\Big(\sum_{n=0}^N \lambda_n(L_n - K^\sigma_n)\Big) \le kM'_\sigma\Big(\sum_{n=0}^N \lambda_n L_n\Big),$$

quels que soient l'entier N et les scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_N$. Alors la famille $(K^\sigma_n)_{n\ge 0}$ est une base de Schauder pour E'_σ. En outre, il existe un automorphisme A_σ de E'_σ tel que l'on ait $A_\sigma K^\sigma_n = L_n$ pour tout n.

Nous allons terminer ce paragraphe en mentionnant un résultat complémentaire, qu'il est aisé d'établir à partir d'arguments analogues à (2.4) et (2.8).

(2.10) PROPOSITION. *Le bidual fort E''_σ de E_σ s'identifie à $T_\sigma(\Gamma^\alpha_\sigma)$. En outre, l'espace E est réflexif.*

On donnera une application de ce résultat en (3.6). ∎

3. Rigidité

(3.1) DÉFINITION. On considère de nouveau α et θ fixés, avec $0 < \theta < 2\pi$ et $\theta < \alpha\pi$. Soit $(z_n)_{n\geq 0}$ une suite de points de V_θ. On reprend les notations du paragraphe 2 et, pour $\dot{f} \in E_\sigma$, on pose

$$K^\sigma_n(\dot{f}) := \frac{(P_\sigma f)^{(n)}}{n!}(z_n),$$

où f est un représentant quelconque de $\dot{f}$ dans H_σ et où $P_\sigma = T_\sigma J$ est l'opérateur étudié en (2.4). Il est facile de voir que cette définition a un sens et, d'après (1.3) et (2.2), que l'on a $K^\sigma_n \in E'_\sigma$ et $M'_\sigma(K^\sigma_n) \leq C(\sigma)(c\sigma)^n n!^\alpha$.

(3.2) PROPOSITION. *Il existe des constantes d et $D(\sigma)$, $d \geq 1$ et $D(\sigma) > 0$, ne dépendant respectivement que de α, θ et de α, θ, σ, telles que, sous la condition*

$$|z_n| \leq \frac{D(\sigma)}{d^n} \quad \textit{pour tout } n,$$

la famille $(K^\sigma_n)_{n\geq 0}$ soit totale dans E'_σ. Il existe alors un automorphisme A_σ de E'_σ tel que l'on ait $A_\sigma K^\sigma_n = L_n$ pour tout n.

Preuve. Soit $\dot{f} \in E_\sigma$ et soit f un représentant de $\dot{f}$ dans H_σ. On a clairement $L_n(\dot{f}) = \frac{(P_\sigma f)^{(n)}}{n!}(0)$, donc

$$(L_n - K^\sigma_n)(\dot{f}) = \frac{1}{n!}((P_\sigma f)^{(n)}(z_n) - (P_\sigma f)^{(n)}(0)).$$

L'inégalité des accroissements finis, la définition de P_σ et (1.3.3) donnent alors

$$\begin{aligned}|(L_n - K^\sigma_n)(\dot{f})| &\leq C(\sigma)N_\sigma(\dot{f})(c\sigma)^{n+1}(n+1)!^{1+\alpha}\frac{|z_n|}{n!}\\ &\leq 2^{1+\alpha}c\sigma C(\sigma)(2^{1+\alpha}c\sigma)^n n!^\alpha |z_n| M_\sigma(\dot{f}),\end{aligned}$$

compte tenu de (2.2.2) et de majorations élémentaires.

On prend $d = 2^{1+\alpha}c$ et

$$D(\sigma) = \frac{k(1+C(\sigma))^{-1}}{2^{1+\alpha}c\sigma C(\sigma)}$$

pour une constante k vérifiant $0 < k < 1$. En vertu de l'inégalité qui précède, on obtient alors

$$M'_\sigma\Big(\sum_{n=0}^N \lambda_n(L_n - K^\sigma_n)\Big) \leq k(1+C(\sigma))^{-1}\sum_{n=0}^N |\lambda_n|\sigma^n n!^\alpha$$

pour tout entier N et tous scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_N$. Le résultat annoncé est alors une conséquence de (2.9) et de l'inégalité

$$(1+C(\sigma))^{-1}\sum_{n=0}^N |\lambda_n|\sigma^n n!^\alpha \leq M'_\sigma\Big(\sum_{n=0}^N \lambda_n L_n\Big)$$

qui s'obtient par (2.8). ∎

On est maintenant en mesure d'énoncer la propriété de rigidité des opérateurs d'extension T_σ.

(3.3) THÉORÈME. *On suppose toujours que θ et α sont choisis tels que l'on ait $0 < \theta < 2\pi$, $\theta < \alpha\pi$. Soit $(z_n)_{n\geq 0}$ une suite de points de V_θ satisfaisant, pour tout entier n,*

$$|z_n| \leq \frac{D(\sigma)}{d^n},$$

où d et $D(\sigma)$ ont été définies en (3.2). On considère une suite a de $\Gamma^\alpha_{\sigma,0}$ et on suppose que l'on a

(3.3.1) $\qquad (T_\sigma a)^{(n)}(z_n) = 0 \quad$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

Alors a est nulle.

Preuve. A l'aide des définitions, on vérifie que l'on a

$$(T_\sigma a)^{(n)}(z_n) = n!K^\sigma_n(\pi_\sigma(T_\sigma a)).$$

La condition (3.3.1) et la proposition (3.2) imposent alors que l'on ait $\pi_\sigma(T_\sigma a) = 0$ dans E_σ. Autrement dit, $T_\sigma a$ est plate en 0, c'est-à-dire que a est nulle. ∎

Le corollaire qui suit est un substitut aux propriétés de rigidité de [Ma], comme on l'a évoqué dans l'introduction.

(3.4) COROLLAIRE. *Soient des réels α, θ, ϕ vérifiant*

$$0 < \theta < \alpha\pi \leq \phi < 2\pi.$$

Soit $(z_n)_{n\geq 0}$ une suite de points de V_θ satisfaisant

$$|z_n| \leq \frac{D(\sigma)}{d^n} \quad \textit{pour tout } n.$$

On considère une fonction f de $HG^{1+\alpha}_\sigma(V_\phi)$, on pose $\underline{f} = f_{|V_\theta}$ et on suppose que l'on a $J\underline{f} \in \Gamma^\alpha_{\sigma,0}$ et

(3.4.1) $\qquad (P_\sigma \underline{f})^{(n)}(z_n) = 0 \quad$ *pour tout n* de $\mathbb{N}$,

avec $P_\sigma = T_\sigma J$. Alors f est nulle.

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème (3.3) à $a = J\underline{f}$ pour établir que f est plate en 0. On conclut alors à l'aide de (1.4). ∎

(3.5) Remarques. (i) La question de savoir si on peut remplacer (3.4.1) par la condition "$f^{(n)}(z_n) = 0$ pour tout n" est un problème ouvert.

(ii) A partir des calculs de [CC3], de (1.3) et (3.2), il est en fait possible de donner une expression explicite de $D(\sigma)$ en fonction décroissante de σ. Ceci signifie que toute suite $(z_n)_{n\geq 0}$ permettant de "tester" la rigidité sur H_τ (au sens des résultats précédents) permet aussi de la tester sur H_σ pour $\sigma < \tau$ (ce qui est cohérent avec l'inclusion $H_\sigma \subset H_\tau$).

Pour conclure, on donne ici un théorème d'interpolation qui est une autre conséquence de (2.4) et (2.9).

(3.6) THÉORÈME. *Soient α, θ, σ satisfaisant $0 < \theta < \alpha\pi$, $\sigma > 0$, et soit $(z_n)_{n\geq 0}$ une suite de points de V_θ satisfaisant*

$$|z_n| \leq \frac{D(\sigma)}{d^n} \quad \textit{pour tout } n \textit{ de } \mathbb{N}.$$

Alors il existe un opérateur linéaire $\widetilde{T}_\sigma : \Gamma_\sigma^\alpha \to H(V_\theta)$ satisfaisant les propriétés suivantes :

(3.6.1) $\widetilde{T}_\sigma a \in HG_{c\sigma}^{1+\alpha}(V_\theta)$ *et* $\|T_\sigma a\|_{c\sigma} \leq \widetilde{C}(\sigma) N_\sigma(a)$ *pour tout a de Γ_σ^α*,

(3.6.2) $\frac{1}{n!}(\widetilde{T}_\sigma a)^{(n)}(z_n) = a_n$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$,

où $\widetilde{C}(\sigma)$ est une constante positive ne dépendant que de α, θ, σ.

Preuve. On considère l'automorphisme A_σ de E'_σ obtenu dans la proposition (3.2). Soit l'opérateur transposé A_σ^*; en vertu de (2.4) et (2.10) on vérifie que $J \circ A_\sigma^* \circ T_\sigma$ a un sens comme opérateur sur Γ_σ^α. On pose alors $\widetilde{T}_\sigma = T_\sigma \circ J \circ A_\sigma^* \circ T_\sigma$. On a clairement la propriété (3.6.1). De plus, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout a de Γ_σ^α, on a, en notant que $T_\sigma a$ s'identifie à un élément de E''_σ,

$$\frac{1}{n!}(\widetilde{T}_\sigma a)^{(n)}(z_n) = \langle K_n^\sigma, A_\sigma^*(T_\sigma a)\rangle = \langle A_\sigma K_n^\sigma, T_\sigma a\rangle = \langle L_n, T_\sigma a\rangle = a_n,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le crochet de dualité, d'où le résultat. ■

Références

[Ar] M. G. Arsove, *The Paley-Wiener theorem in metric linear spaces*, Pacific J. Math. 10 (1960), 365–379.

[CC1] J. Chaumat et A. M. Chollet, *Théorème de Whitney dans des classes ultradifférentiables*, C. R. Acad. Sci. Paris 315 (1992), 901–906.

[CC2] —, —, *Classes de Gevrey non isotropes et application à l'interpolation*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 15 (1988), 615–676.

[CC3] —, —, *Théorème de Whitney dans des classes ultradifférentiables*, Publ. IRMA, Lille 28 (1992), no. VIII.

[Ma] J. A. Marti, *Sur la rigidité comparée de fonctions, distributions ou hyperfonctions analytiques par rapport à un groupe de variables*, Pacific J. Math. 150 (1991), 359–382.

[P] H. J. Petzsche, *On E. Borel's theorem*, Math. Ann. 282 (1988), 299–313.

[Ra1] J. P. Ramis, *Dévissage Gevrey*, Astérisque 59–60 (1978), 173–204.

[Ra2] —, *Divergent series and holomorphic dynamical systems*, preprint, 1993.

U.R.A. 751 DU C.N.R.S. "GAT"
U.F.R. DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX, FRANCE
E-mail: THILLIEZ@GAT.UNIV-LILLE1.FR

Received July 5, 1994 (3311)
Revised version July 4, 1995