Note that $C(T)$ is the linear span of $C(T)_+$. Consequently, each nonzero linear functional μ on $C(T)$ satisfies $\mu(f) \neq 0$ for some $f \in C(T)_+$. If in addition μ is positive, then we have $\mu(f) > 0$ for some $f \in C(T)_+$.

Let now $\mathcal{A} = C(T)/I$, where $I = C_{00}(T)$ is the ideal of functions $f \in C(T)$ with compact support. Assume that ω is a nonzero positive linear functional on $\mathcal{A}$. Since the quotient map $Q : C(T) \to \mathcal{A}$ is a $*$-homomorphism, the composition $\mu = \omega \circ Q$ is a nonzero positive linear functional on $C(T)$. Consequently, there exists an element $f \in C(T)_+$ such that $\mu(f) > 0$.

Let $g_0 \in C(T)$ and $K_n \subseteq T$ be as in the assumption of Theorem 2 and set $g = \max\{f, |g_0|\} \in C(T)$. Then $0 \leq f(t) \leq g(t)$ for all $t \in T$, and consequently $0 < \mu(f) \leq \mu(g)$. Moreover, all the sets

$$C_n = \{t \in T : g(t) \leq n\} \subseteq T, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

are compact (C_n is a closed subset of K_n). Let now $n \geq 1$ be arbitrary. Clearly $x \geq n \Rightarrow x^2 \geq nx$ for each real number x. Thus the function $g^2 \in C(T)$ satisfies $g^2 \geq ng$, except possibly on the compact set $C_n \subseteq K_n$.

Now set $h_n = n\|g\|_{K_n} \max\{0, n+1-|g_0|\}$ and note that $h_n \in C(T)_+$, h_n has compact support (contained in the set K_{n+1}) and $h_n(t) \geq n\|g\|_{K_n}$ for all $t \in K_n$. Consequently, $Q(h_n) = 0$ and $g^2 + h_n \geq ng$ at each point of T. Thus

$$\omega(Q(g^2)) = \mu(g^2 + h_n) \geq \mu(ng) = n\mu(g).$$

Recall that $\mu(g) > 0$ and let $n \uparrow \infty$ to obtain the contradiction $\omega(Q(g^2)) = +\infty$. ∎

Acknowledgements. The author wishes to express his gratitude to Ken Ross for useful conversation.

References

[1] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Complete Normed Algebras*, Springer, Berlin, 1973.
[2] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, Reading, 1970.
[3] B. Yood, *On the nonexistence of norms for some algebras of functions*, Studia Math. 111 (1994), 97–101.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
GEORGIA STATE UNIVERSITY
ATLANTA, GEORGIA 30303
U.S.A.

Received April 27, 1995
Revised version July 4, 1995 (3444)

Editorial note: See also the paper by Alexander R. Pruss in this issue.

STUDIA MATHEMATICA 116 (3) (1995)

Sur la caractérisation topologique des compacts à l'aide des demi-treillis des pseudométriques continues

par

TARAS BANAKH (Lviv)

Abstract. For a Tikhonov space X we denote by $\mathrm{Pc}(X)$ the semilattice of all continuous pseudometrics on X. It is proved that compact Hausdorff spaces X and Y are homeomorphic if and only if there is a positive-homogeneous (or an additive) semi-lattice isomorphism $T : \mathrm{Pc}(X) \to \mathrm{Pc}(Y)$.

A topology on $\mathrm{Pc}(X)$ is called admissible if it is intermediate between the compact-open and pointwise topologies on $\mathrm{Pc}(X)$. Another result states that Tikhonov spaces X and Y are homeomorphic if and only if there exists a positive-homogeneous (or an additive) semi-lattice homeomorphism $T : (\mathrm{Pc}(X), \tau_X) \to (\mathrm{Pc}(Y), \tau_Y)$, where τ_X, τ_Y are admissible topologies on $\mathrm{Pc}(X)$ and $\mathrm{Pc}(Y)$.

Des résultats caractérisant un espace compact X à l'aide de l'espace $C(X)$ des fonctions continues sont bien connus et classiques. Rappelons ici le théorème de I. M. Gelfand et A. N. Kolmogorov [GK], affirmant qu'un espace compact X est déterminé complètement par l'anneau $C(X)$ des fonctions continues, ou le théorème de Banach–Stone [Ba, XI, §4] caractérisant un espace compact X au moyen de l'espace de Banach $C(X)$. Il s'avère (voir [Se, 7.8.2]) que la caractérisation de Gelfand–Kolmogorov résulte du théorème de I. Kaplansky, qui a démontré dans [Ka] que le treillis $C(X)$ des fonctions continues détermine complètement un espace compact X. Dans [Sh] T. Shirota a généralisé ce théorème de I. Kaplansky en montrant qu'il reste vrai pour les espaces Hewitt-complets; entre autres, il a démontré dans [Sh] que le treillis $C(X)$ muni d'une topologie intermédiaire entre la topologie de la convergence simple et la topologie compacte-ouverte determinait complètement un espace de Tikhonov X.

Le but de cet article est d'obtenir des résultats analogues caractérisant un espace compact (ou de Tikhonov) X à l'aide de l'espace $\mathrm{Pc}(X)$ formé de toutes les pseudométriques continues sur X. L'espace $\mathrm{Pc}(X)$ avec l'ordre

1991 *Mathematics Subject Classification*: 54F65, 06A12, 54H12, 54C35.

Cet article a été ecrit pendant un séjour de l'auteur à l'Université Paris VI financé par une bourse du Ministère français de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche.

naturel est un demi-treillis pour l'opération de maximum. En plus de l'opération de demi-treillis, il y a sur $\mathrm{Pc}(X)$ les opérations d'addition et de multiplication par des réels positifs. Nous dirons qu'une application $T : \mathrm{Pc}(X) \to \mathrm{Pc}(Y)$ est un *morphisme de demi-treillis* (resp. *additive*, *positivement homogène*) si elle conserve l'opération correspondante.

Les deux théorèmes suivants sont les résultats principaux de cet article.

THÉORÈME 1. *Pour des espaces compacts séparés X et Y les conditions suivantes sont équivalentes* :

(1) *les espaces X et Y sont homéomorphes*;

(2) *il existe un isomorphisme de demi-treillis positivement homogène $T : \mathrm{Pc}(X) \to \mathrm{Pc}(Y)$*;

(3) *il existe un isomorphisme de demi-treillis additif $T : \mathrm{Pc}(X) \to \mathrm{Pc}(Y)$*.

Soit X un espace de Tikhonov. Nous dirons qu'une topologie τ sur $\mathrm{Pc}(X)$ est *admissible* si $\tau_{\mathrm{p}} \subset \tau \subset \tau_{\mathrm{c}}$, où τ_{p} est la topologie de la convergence simple et τ_{c} est la topologie compacte-ouverte sur $\mathrm{Pc}(X)$.

THÉORÈME 2. *Pour des espaces de Tikhonov X et Y les conditions suivantes sont équivalentes* :

(1) *les espaces X et Y sont homéomorphes*;

(2) *il existe un homéomorphisme de demi-treillis positivement homogène $T : (\mathrm{Pc}(X), \tau_X) \to (\mathrm{Pc}(Y), \tau_Y)$, où τ_X et τ_Y sont des topologies admissibles sur $\mathrm{Pc}(X)$ et $\mathrm{Pc}(Y)$*;

(3) *il existe un homéomorphisme de demi-treillis additif $T : (\mathrm{Pc}(X), \tau_X) \to (\mathrm{Pc}(Y), \tau_Y)$, où τ_X et τ_Y sont des topologies admissibles sur $\mathrm{Pc}(X)$ et $\mathrm{Pc}(Y)$*.

Remarquons que le théorème 1 n'est pas vrai pour les espaces de Tikhonov, donc les conditions topologiques dans le théorème 2 sont essentielles. Ceci est montré par

EXEMPLE. Considérons l'espace ω_1 de tous les ordinaux dénombrables muni de la topologie de l'ordre. Il est bien connu que le carré $\omega_1 \times \omega_1$ de ω_1 est un espace pseudocompact, i.e. que toute fonction continue réelle sur $\omega_1 \times \omega_1$ est bornée. De plus, le compactifié de Stone–Čech $\beta(\omega_1 \times \omega_1)$ est naturellement homéomorphe au produit $\beta\omega_1 \times \beta\omega_1$ (voir [En, 3.10.26, 3.12.20]). Par suite, toute pseudométrique sur ω_1 est bornée et admet un prolongement à $\beta\omega_1$. Donc, l'opérateur de restriction $r : \mathrm{Pc}(\beta\omega_1) \to \mathrm{Pc}(\omega_1)$ est bijectif. Evidemment, l'application r est additive, positivement homogène et conserve l'opération de demi-treillis. De plus, r est un homéomorphisme si $\mathrm{Pc}(\beta\omega_1)$ et $\mathrm{Pc}(\omega_1)$ sont munis de la topologie de la convergence uniforme.

Malgré cet exemple la réponse à la question suivante n'est pas claire.

QUESTION. Le théorème 1 est-il vrai pour les espaces Hewitt-complets?

Remarquons que pour les espaces Hewitt-complets le théorème de I. Kaplansky est vrai d'après le résultat de T. Shirota [Sh].

Un autre problème ouvert concernant les théorèmes 1 et 2 est de savoir si les conditions "positivement homogène" et "additif" sont réellement nécessaires. En d'autres termes, existe-t-il deux compacts X, Y non homéomorphes tels que les demi-treillis $\mathrm{Pc}(X)$ et $\mathrm{Pc}(Y)$ soient isomorphes?

Démonstrations des théorèmes 1 et 2. On va démontrer les implications (1)⇒(3)⇒(2)⇒(1).

L'implication (1)⇒(3) dans les théorèmes 1 et 2 est évidente. En effet, si $h : Y \to X$ est un homéomorphisme alors l'application $T : \mathrm{Pc}(X) \to \mathrm{Pc}(Y)$ definie par $T(d)(y, y') = d(h(y), h(y'))$, où $d \in \mathrm{Pc}(X)$ et $y, y' \in Y$, est additive, positivement homogène et conserve l'opération de demi-treillis. De plus, T est un homéomorphisme si on munit $\mathrm{Pc}(X)$ et $\mathrm{Pc}(Y)$ de la topologie de la convergence simple.

L'implication (3)⇒(2) résulte du lemme suivant.

LEMME 1. *Pour des espaces topologiques X et Y, toute application additive $T : \mathrm{Pc}(X) \to \mathrm{Pc}(Y)$ conservant l'opération de demi-treillis est positivement homogène.*

Démonstration. Remarquons que l'additivité de T implique que $T(rd) = rT(d)$ pour tout rationnel $t \in \mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$ et toute pseudométrique $d \in \mathrm{Pc}(X)$. Soient $a \in [0, \infty)$ et $d \in \mathrm{Pc}(X)$. Alors, pour tous les rationnels $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}_+$, si $r_1 \le a \le r_2$ nous avons $r_1 d \le ad \le r_2 d$. Puisque T conserve l'opération de demi-treillis, $T(r_1 d) = r_1 T(d) \le T(ad) \le r_2 T(d) = T(r_2 d)$. Puisque l'intersection

$$I = \bigcap_{a \ge r_1 \in \mathbb{Q}_+} \{\varrho \in \mathrm{Pc}(X) \mid \varrho \ge r_1 T(d)\} \cap \bigcap_{a \le r_2 \in \mathbb{Q}_+} \{\varrho \in \mathrm{Pc}(Y) \mid \varrho \le r_2 T(d)\}$$

se compose de la seule pseudométrique $aT(d)$ et que $T(ad) \in I$, nous obtenons $T(ad) = aT(d)$, i.e. l'application T est positivement homogène. ■

La démonstration de l'implication (2)⇒(1) est plus compliquée.

Nous noterons $\exp_2(X)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles non vides de X qui contiennent au plus deux points. L'espace X est plongé dans $\exp_2(X)$ par $X \ni x \mapsto \{x\} \in \exp_2(X)$. Puisque chaque pseudométrique $\varrho \in \mathrm{Pc}(X)$ est une fonction symétrique sur $X \times X$, on peut la considérer comme une fonction sur $\exp_2(X)$.

Pour $x, x' \in X$ soit $\mathcal{I}_{\{x,x'\}} = \{\varrho \in \mathrm{Pc}(X) \mid \varrho(\{x, x'\}) = 0\}$.

Pour la démonstration de l'implication (2)⇒(1) nous utiliserons le lemme suivant.

LEMME 2. *Soient X, Y des espaces de Tikhonov et $T : \mathrm{Pc}(X) \to \mathrm{Pc}(Y)$ une application bijective. S'il existe une bijection $\chi : \exp_2(X)\backslash X \to \exp_2(Y)\backslash Y$ telle que $T(\mathcal{I}_{\{x,x'\}}) = \mathcal{I}_{\chi\{x,x'\}}$ pour tout $\{x,x'\} \in \exp_2(X)\backslash X$ alors les espaces X et Y sont homéomorphes.*

Démonstration. Soit $\chi : \exp_2(X)\backslash X \to \exp_2(Y)\backslash Y$ une bijection telle que $T(\mathcal{I}_{\{x,x'\}}) = \mathcal{I}_{\chi\{x,x'\}}$ pour chaque $\{x,x'\} \in \exp_2(X)\backslash X$.

Si un des espaces X, Y (par exemple X) est fini, alors $\exp_2(X)$ est aussi fini. De plus, $|\exp_2(X)\backslash X| = |X|(|X|-1)$. Puisque χ est bijective, l'ensemble $\exp_2(Y)\backslash Y$ est fini, et $|\exp_2(Y)\backslash Y| = |\exp_2(X)\backslash X| = |X|(|X|-1)$. Puisque $|\exp_2(Y)\backslash Y| = |Y|(|Y|-1)$ on obtient $|X| = |Y|$ et, donc, les espaces finis X et Y sont homéomorphes.

Supposons maintenant que les espaces X et Y sont infinis. Nous allons démontrer qu'il existe un homéomorphisme $h : X \to Y$ tel que $\chi\{x,x'\} = \{h(x), h(x')\}$ pour tout couple de points distincts $(x,x') \in X \times X$.

Pour cela, nous allons montrer que pour trois points distincts $x, y, z \in X$ l'intersection $h_{y,z}(x) = \chi\{x,y\} \cap \chi\{x,z\} \subset \exp_2(Y)$ se compose d'un seul point ne dépendant que de x.

Remarquons d'abord que $\chi\{x,y\} \neq \chi\{x,z\}$, parce que χ est une bijection et $\{x,y\} \neq \{x,z\}$. Donc, l'intersection $h_{y,z}(x)$ ne peut pas contenir deux points.

Montrons maintenant que l'intersection $h_{y,z}(x)$ n'est pas vide. Si on supposait l'inverse, on pourrait construire une pseudométrique $d \in \mathrm{Pc}(Y)$ telle que $d(\chi\{x,y\}) = 0$, $d(\chi\{x,z\}) = 0$ et $d(\chi\{y,z\}) \neq 0$. Alors, $T^{-1}(d) \in T^{-1}(\mathcal{I}_{\chi\{x,y\}} \cap \mathcal{I}_{\chi\{x,z\}}) = \mathcal{I}_{\{x,y\}} \cap \mathcal{I}_{\{x,z\}}$ et, donc, $T^{-1}(d)(y,z) \le T^{-1}(d)(x,y) + T^{-1}(d)(x,z) = 0$, i.e. $T^{-1}(d) \in \mathcal{I}_{\{y,z\}}$. Alors, $d = T(T^{-1}(d)) \in \mathcal{I}_{\chi\{y,z\}}$, i.e. $d(\chi\{y,z\}) = 0$. Mais ceci contredit $d(\chi\{x,z\}) \neq 0$. Donc, l'intersection $h_{y,z}(x)$ se compose d'un seul point.

Pour démontrer que $h_{y,z}(x)$ ne dépend pas des points y, z, fixons un point $y' \in X$ tel que $y' \notin \{y,z\}$. On va démontrer que $h_{y',z}(x) = h_{y,z}(x)$. Supposons l'inverse: $h_{y,z}(x) = \chi\{x,y\} \cap \chi\{x,z\} \neq \chi\{x,y'\} \cap \chi\{x,z\} = h_{y',z}(x)$. Cela et $\chi\{x,y\} \cap \chi\{x,y'\} \neq \emptyset$ impliquent que $|\chi\{x,y\} \cup \chi\{x,y'\} \cup \chi\{x,z\}| = 3$. Prenons un point $y'' \in X\backslash\{x,y,y',z\}$. Alors, l'ensemble $\chi\{y'',x\}$ se compose de deux points et doit transverser l'ensembles $\chi\{x,y\}$, $\chi\{x,y'\}$ et $\chi\{x,z\}$. Mais c'est impossible. Donc, $h_{y,z}(x) = h_{y',z}(x)$.

Soient enfin $x, y, y', z, z' \in X$ tels que $|\{x,y,z\}| = 3$ et $|\{x,y',z'\}| = 3$. Alors, $h_{y,z}(x) = h_{y',z}(x) = h_{y',z'}(x)$, i.e. l'intersection $h_{y,z}(x)$ ne dépend que du point x.

Définissons une fonction $h : X \to Y$ par $\{h(x)\} = h_{y,z}(x)$, où $y, z \in X$ sont des points tels que $|\{x,y,z\}| = 3$. On va montrer que la fonction h est injective. Fixons des points distincts $x, x' \in X$ et supposons que $h(x) = h(x')$. Soit $y \in X\backslash\{x,x'\}$. Alors, $\chi\{x,y\} = \{h(x), u\}$, $\chi\{x',y\} = \{h(x'), v\} = \{h(x), v\}$ et $\chi\{x,x'\} = \{h(x), w\}$, où les points $u, v, w \in Y$ sont tous distincts. Soit $d \in \mathrm{Pc}(Y)$ une pseudométrique vérifiant $d(h(x), u) = d(h(x), v) = 0$ mais $d(h(x), w) \neq 0$. Alors, $T^{-1}(d) \in \mathcal{I}_{\{x,y\}} \cap \mathcal{I}_{\{x',y\}}$ mais $T^{-1}(d) \notin \mathcal{I}_{\{x,x'\}}$, ce qui est contradictoire. Donc, la fonction h est injective et pour tous $x, x' \in X$ distincts $\chi\{x,x'\} = \{h(x), h(x')\}$. La fonction h est aussi surjective puisque pour chaque $y \in Y$ et chaque $y' \in Y\backslash\{y\}$, la bijectivité de χ implique que $\{y,y'\} = \chi\{x,x'\} = \{h(x), h(x')\}$ pour un certain couple $(x,x') \in X \times X$. Donc, $h(x)$ ou $h(x')$ coïncide avec y.

Maintenant il nous reste à démontrer que la bijection $h : X \to Y$ est un homéomorphisme. Supposons par exemple que h ne soit pas continue. Alors, on peut trouver un point $y \in Y$, un voisinage $U \subset Y$ de y et une famille filtrée $(x_\alpha) \subset X\backslash h^{-1}(U)$ convergeant vers $h^{-1}(y)$. Soit $d \in \mathrm{Pc}(Y)$ une pseudométrique telle que $d(y,v) \neq 0$ et $d(v,v') = 0$ pour $v, v' \in Y\backslash U$. Alors, $T^{-1}(d)(h^{-1}(y), x) \neq 0$ et $T^{-1}(d)(x,x') = 0$ pour $x, x' \in X\backslash h^{-1}(U)$. Donc, pour tout $x \in X\backslash h^{-1}(U)$, $T^{-1}(d)(h^{-1}(y), x) \neq 0$ et $T^{-1}(d)(x_\alpha, x) = 0$. Mais cela est contradictoire parce que la pseudométrique $T^{-1}(d)$ est continue et que (x_α) converge vers $h^{-1}(y)$.

Par le même argument on peut démontrer que l'inverse h^{-1} est aussi continue. Par suite, les espaces X et Y sont homéomorphes. ∎

Pour appliquer le lemme 2 aux démonstrations des théorèmes 1 et 2, nous allons caractériser les sous-ensembles $\mathcal{I}_{\{x,x'\}}$ comme les idéaux maximaux du demi-treillis $\mathrm{Pc}(X)$.

Un sous-ensemble $\mathcal{I}$ de $\mathrm{Pc}(X)$ est appelé un *idéal* de $\mathrm{Pc}(X)$ s'il vérifie les quatre conditions suivantes:

(1) $\mathcal{I} \neq \mathrm{Pc}(X)$;
(2) pour tous $t \in [0,\infty)$ et $d \in \mathcal{I}$, $td \in \mathcal{I}$;
(3) si $d, \varrho \in \mathcal{I}$ alors $\max\{d, \varrho\} \in \mathcal{I}$;
(4) $\varrho \le d \in \mathcal{I}$ implique $\varrho \in \mathcal{I}$.

Un idéal $\mathcal{I} \subset \mathrm{Pc}(X)$ est dit *maximal* s'il n'existe pas d'idéal $\mathcal{I}' \subset \mathrm{Pc}(X)$ vérifiant $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}'$ et $\mathcal{I} \neq \mathcal{I}'$.

LEMME 3. *Soit X un espace de Tikhonov. Pour tout couple de points distincts $x, x' \in X$ l'ensemble $\mathcal{I}_{\{x,x'\}}$ est un idéal maximal de $\mathrm{Pc}(X)$.*

Démonstration. Fixons des points distincts $x, x' \in X$. Il est facile de voir que $\mathcal{I}_{\{x,x'\}}$ vérifie les conditions (1)–(4) et, donc, est un idéal dans $\mathrm{Pc}(X)$. Nous allons démontrer que l'idéal $\mathcal{I}_{\{x,x'\}}$ est maximal. Supposons le contraire : il existe un idéal $\mathcal{I}' \subset \mathrm{Pc}(X)$ tel que $\mathcal{I}_{\{x,x'\}} \subset \mathcal{I}'$ et $\mathcal{I}_{\{x,x'\}} \neq \mathcal{I}'$. Fixons une pseudométrique $p \in \mathcal{I}'$ vérifiant $p(x,x') > 0$. Nous allons démontrer que $\mathcal{I}' = \mathrm{Pc}(X)$. Soit $\varrho \in \mathrm{Pc}(X)$ une pseudométrique. Puisque $p(x,x') > 0$ il existe $t > 0$ tel que $tp(x,x') > \varrho(x,x')$. Soit $U = \{(y,y') \in X \times X \mid tp(y,y') > \varrho(y,y')\}$. Puisque $(x,x'), (x',x) \in U$ et que l'espace X

est separé, on peut trouver des voisinages $V, V' \subset X$ de x et x' vérifiant $V \cap V' = \emptyset$ et $V \times V' \cup V' \times V \subset U$.

Nous allons construire une pseudométrique $d \in \mathrm{Pc}(X)$ telle que $d(x,x') = 0$ et $d|(X\backslash V)\times(X\backslash V) \geq \varrho|(X\backslash V)\times(X\backslash V)$. Pour cela fixons une fonction continue $\xi : X \to [0, \varrho(x,x')]$ vérifiant $\xi|X\backslash V \equiv 0$ et $\xi(x) = \varrho(x,x')$ et considérons la pseudométrique $\bar{d} \in \mathrm{Pc}(X)$ definie par $\bar{d}(y,y') = \varrho(y,y') + |\xi(y) - \xi(y')|$ pour $y, y' \in X$. Maintenant définissons la pseudométrique $d \in \mathrm{Pc}(X)$ par

$$d(y,y') = \min\{\bar{d}(y,y'), \bar{d}(y,\{x,x'\}) + \bar{d}(y',\{x,x'\})\} \quad \text{pour } y, y' \in X.$$

Evidemment $d(x,x') = 0$. On va montrer que $d(y,y') \geq \varrho(y,y')$ quels que soient $y, y' \in X\backslash V$. Fixons $y, y' \in X\backslash V$ et remarquons que $\bar{d}(y,y') = \varrho(y,y') + |\xi(y) - \xi(y')| = \varrho(y,y') + 0 = \varrho(y,y')$, $\bar{d}(y,x) = \varrho(y,x) + \xi(x) = \varrho(y,x) + \varrho(x,x')$ et $\bar{d}(y,x') = \varrho(y,x') + \xi(x') = \varrho(y,x')$. Alors, $d(y,y') = \min\{\varrho(y,y'), \varrho(y,x)+\varrho(y',x')+\varrho(x,x'), \varrho(y,x')+\varrho(y',x)+\varrho(x,x')\}$. L'inégalité triangulaire pour ϱ implique $\varrho(y,y') \leq \min\{\varrho(y,x) + \varrho(x,x') + \varrho(x',y'), \varrho(y,x') + \varrho(x',x) + \varrho(x,y')\}$, par conséquent, $d(y,y') \geq \varrho(y,y')$.

Par analogie, on peut construire une pseudométrique $d' \in \mathrm{Pc}(X)$ telle que $d'(x,x') = 0$ et $d'|(X\backslash V') \times (X\backslash V') \geq \varrho|(X\backslash V') \times (X\backslash V')$. Puisque $(X\backslash V \times X\backslash V) \cup (X\backslash V' \times X\backslash V') \cup V \times V' \cup V' \times V = X \times X$, les inégalités $d|X\backslash V \times X\backslash V \geq \varrho|X\backslash V \times X\backslash V$, $d'|X\backslash V' \times X\backslash V' \geq \varrho|X\backslash V' \times X\backslash V'$ et $tp|V \times V' \cup V' \times V \geq \varrho|V \times V' \cup V \times V$ impliquent que $\varrho \leq \max\{tp, d, d'\}$. Alors, $\varrho \in \mathcal{I}$ parce que $d, d' \in \mathcal{I}_{\{x,x'\}} \subset \mathcal{I}$ et $p \in \mathcal{I}$. Cela est contradictoire. Donc, $\mathcal{I}_{\{x,x'\}}$ est un idéal maximal dans $\mathrm{Pc}(X)$. ∎

Lemme 4. *Soit X un espace compact séparé. Alors pour chaque idéal maximal $\mathcal{I} \subset \mathrm{Pc}(X)$ il existe un couple de points distincts $x, x' \in X$ tel que $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\{x,x'\}}$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{I}$ un idéal maximal dans $\mathrm{Pc}(X)$. Considérons l'ensemble $K = \bigcap\{p^{-1}(0) \mid p \in \mathcal{I}\} \subset X \times X$. Evidemment la diagonale Δ_X du produit $X \times X$ est contenue dans K. Nous allons démontrer que le complémentaire $K\backslash\Delta_X$ n'est pas vide. Supposons le contraire: $K = \Delta_X$, i.e. quels que soient les points distincts $x, x' \in X$ il y a une pseudométrique $p \in \mathcal{I}$ telle que $p(x,x') > 0$. Fixons une pseudométrique $p \notin \mathcal{I}$. Puisque $\mathcal{I}$ est un idéal maximal, $\{\varrho \in \mathrm{Pc}(X) \mid \exists t \in [0,\infty)\ \exists d \in \mathcal{I} \text{ tels que } \varrho \leq \max\{tp, d\}\} = \mathrm{Pc}(X)$. Il est facile de voir que $\sqrt{p}$ est une pseudométrique continue sur X. Alors, il existe $t \in [0,\infty)$ et $d \in \mathcal{I}$ tels que $\sqrt{p} \leq \max\{tp, d\}$. Puisque $\sqrt{p}|U \geq tp|U$ sur le voisinage $U = \{(x,x') \in X \times X \mid p(x,x') < 1/t^2\}$ de la diagonale, l'inégalité $\sqrt{p} \leq \max\{tp, d\}$ implique que $tp|U \leq \sqrt{p}|U \leq d|U$. Pour chaque couple $(x,x') \in X \times X\backslash U$ on peut choisir une pseudométrique $d_{x,x'} \in \mathcal{I}$ vérifiant $d_{x,x'}(x,x') > tp(x,x')$. Regardons le voisinage $U_{x,x'} = \{(y,y') \in X \times X \mid d_{x,x'}(y,y') > tp(y,y')\}$ de (x,x'). Puisque l'ensemble

$X \times X\backslash U$ est compact, il existe un recouvrement fini $\{U_{x_1,x_1'}, \ldots, U_{x_n,x_n'}\}$ de $X \times X\backslash U$. Alors, $tp \leq \max\{d, d_{x_1,x_1'}, \ldots, d_{x_n,x_n'}\} \in \mathcal{I}$, et par conséquent, $p \in \mathcal{I}$, ce qui est contradictoire. Donc, il existe $(x,x') \in K\backslash\Delta_X$. Alors, $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_{\{x,x'\}}$ et puisque l'idéal $\mathcal{I}$ est maximal, $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\{x,x'\}}$. ∎

A l'aide des lemmes 2–4, la démonstration du théorème 1 est très simple. Soient X et Y des espaces compacts séparés et $T : \mathrm{Pc}(X) \to \mathrm{Pc}(Y)$ une application de demi-treillis positivement homogène. Evidemment, l'image $T(\mathcal{I})$ de chaque idéal maximal $\mathcal{I}$ de $\mathrm{Pc}(X)$ est un idéal maximal de $\mathrm{Pc}(Y)$ et vice-versa. Puisque chaque idéal maximal dans $\mathrm{Pc}(X)$ est de la forme $\mathcal{I}_{\{x,x'\}}$ pour certain $\{x,x'\} \in \exp_2(X)\backslash X$, et puisque $\mathcal{I}_{\{x,x'\}} = \mathcal{I}_{\{y,y'\}}$ si et seulement si $\{x,x'\} = \{y,y'\}$, l'application T engendre une fonction bijective $\chi : \exp_2(X)\backslash X \to \exp_2(Y)\backslash Y$ telle que $T(\mathcal{I}_{\{x,x'\}}) = \mathcal{I}_{\chi\{x,x'\}}$. Maintenant le lemme 2 entraîne que X est homéomorphe à Y. ∎

Pour démontrer le théorème 2 nous allons obtenir d'abord un analogue topologique du lemme 4.

Lemme 5. *Soit X un espace de Tikhonov. Alors pour chaque idéal maximal $\mathcal{I} \subset \mathrm{Pc}(X)$ fermé pour la topologie compacte-ouverte, il existe des points distincts $x, x' \in X$ tels que $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\{x,x'\}}$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{I} \subset \mathrm{Pc}(X)$ un idéal maximal fermé pour la topologie compacte-ouverte. Regardons l'ensemble $K = \bigcap\{p^{-1}(0) \mid p \in \mathcal{I}\} \subset X \times X$. Comme dans le lemme 4, nous allons démontrer que le complémentaire $K\backslash\Delta_X$ n'est pas vide. Supposons le contraire: $K = \Delta_X$. Fixons une pseudométrique $\varrho \notin \mathcal{I}$: Nous allons montrer que $\varrho \in \mathcal{I}$. Puisque l'idéal $\mathcal{I}$ est fermé, il suffit pour cela de construire pour chaque compact $C \subset X$ une pseudométrique $\varrho_C \in \mathcal{I}$ telle que $\varrho_C|C \times C = \varrho|C \times C$. Fixons un compact $C \subset X$ et considérons la pseudométrique $\sqrt{\varrho} \in \mathrm{Pc}(X)$. Puisque l'idéal $\mathcal{I}$ est maximal et que $\varrho \notin \mathcal{I}$, il existe $t \in (0,\infty)$ et $d \in \mathcal{I}$ tels que $\sqrt{\varrho} \leq \max\{t\varrho, d\}$. Puisque $\sqrt{\varrho}|U \geq t\varrho|U$ sur le voisinage $U = \{(x,x') \in X \times X \mid \varrho(x,x') < 1/t^2\}$ de la diagonale, l'inégalité $\sqrt{\varrho} \leq \max\{t\varrho, d\}$ implique $t\varrho|U \leq \sqrt{\varrho}|U \leq d|U$. Puisque $K = \Delta_X$, pour chaque $(x,x') \in C \times C\backslash U$ il existe une pseudométrique $d_{x,x'} \in \mathcal{I}$ telle que $d_{x,x'}(x,x') > t\varrho(x,x')$. Posons $U_{x,x'} = \{(y,y') \in X \times X \mid d_{x,x'}(y,y') > t\varrho(y,y')\}$. Puisque l'ensemble $C \times C\backslash U$ est compact, il existe un recouvrement fini $\{U_{x_1,x_1'}, \ldots, U_{x_n,x_n'}\}$ de $C \times C\backslash U$. Evidemment $\varrho|C\times C \leq \bar{d}|C\times C$, où $\bar{d} = \frac{1}{t}\max\{d, d_{x_1,x_1'}, \ldots, d_{x_n,x_n'}\} \in \mathcal{I}$. Définissons la pseudométrique $\varrho_C \in \mathrm{Pc}(X)$ par

$$\varrho_C(x,x') = \inf\{\bar{d}(x,x'), \bar{d}(x,c) + \varrho(c,c') + \bar{d}(c',x') \mid c, c' \in C\} \quad \text{pour } x, x' \in X.$$

Il est facile de voir que ϱ_C est une pseudométrique continue sur X, $\varrho_C \leq \bar{d}$ et $\varrho_C|C \times C = \varrho|C \times C$. Remarquons que $\varrho_C \in \mathcal{I}$ parce que $\bar{d} \in \mathcal{I}$.

Donc, $K \neq \Delta_X$ et il existe $(x, x') \in K \backslash \Delta_X$. Alors, $\mathcal{I} \subset I_{\{x,x'\}}$ et puisque l'idéal $\mathcal{I}$ est maximal, $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\{x,x'\}}$. ■

Maintenant nous pouvons démontrer le théorème 2. Soient X et Y des espaces de Tikhonov. Rappelons qu'une topologie τ sur $\mathrm{Pc}(X)$ est dite admissible si $\tau_{\mathrm{p}} \subset \tau \subset \tau_{\mathrm{c}}$, où τ_{p} est la topologie de la convergence simple et τ_{c} est la topologie compacte-ouverte.

Soient τ_X, τ_Y des topologies admissibles sur $\mathrm{Pc}(X)$ et $\mathrm{Pc}(Y)$ et $T : (\mathrm{Pc}(X), \tau_X) \to (\mathrm{Pc}(Y), \tau_Y)$ un homéomorphisme de demi-treillis positivement homogène. Remarquons que pour des points distincts $x, x' \in X$ l'idéal maximal $\mathcal{I}_{\{x,x'\}} \subset \mathrm{Pc}(X)$ est fermé pour la topologie τ_{p} de la convergence simple. Puisque $\tau_{\mathrm{p}} \subset \tau_X$, l'idéal $\mathcal{I}_{\{x,x'\}}$ est fermé dans $(\mathrm{Pc}(X), \tau_X)$. Puisque $T : (\mathrm{Pc}(X), \tau_X) \to (\mathrm{Pc}(Y), \tau_Y)$ est un homéomorphisme de demi-treillis positivement homogène, $T(\mathcal{I}_{\{x,x'\}})$ est un idéal maximal fermé dans $(\mathrm{Pc}(Y), \tau_Y)$. Puisque $\tau_Y \subset \tau_{\mathrm{c}}$, où τ_{c} est la topologie compacte-ouverte sur $\mathrm{Pc}(Y)$, d'après le lemme 5, $T(\mathcal{I}_{\{x,x'\}}) = \mathcal{I}_{\{y,y'\}}$ pour certain $\{y, y'\} = \chi\{x, x'\} \in \exp_2(Y) \backslash Y$. Il est facile de voir que la fonction $\chi : \exp_2(X) \backslash X \to \exp_2(Y) \backslash Y$ est bijective. Donc, d'après le lemme 2, les espaces X et Y sont homéomorphes. ■

Remerciements. L'auteur remercie beacoup le Professeur R. Cauty pour son aide pendant la préparation de cet article.

Bibliographie

[Ba] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa, 1932.

[En] R. Engelking, *General Topology*, PWN, Warszawa, 1977.

[GK] I. M. Gelfand and A. N. Kolmogoroff [A. N. Kolmogorov], *On rings of continuous functions on topological spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 22 (1939), 11–15.

[Ka] I. Kaplansky, *Lattices of continuous functions*, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), 617–623.

[Se] Z. Semadeni, *Banach Spaces of Continuous Functions*, PWN, Warszawa, 1971.

[Sh] T. Shirota, *A generalization of a theorem of I. Kaplansky*, Osaka Math. J. 4 (1952), 121–132.

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE LVIV
UNIVERSYTETSKA 1
LVIV, 290602, UKRAINE

Received May 17, 1995 (3471)