Contents of Volume 116, Number 1

STUDIA MATHEMATICA

Executive Editors: **Z. Ciesielski, A. Pełczyński, W. Żelazko**

The journal publishes original papers in English, French, German and Russian, mainly in functional analysis, abstract methods of mathematical analysis and probability theory. Usually 3 issues constitute a volume.

Detailed information for authors is given on the inside back cover. Manuscripts and correspondence concerning editorial work should be addressed to

STUDIA MATHEMATICA

Śniadeckich 8, P.O. Box 137, 00-950 Warszawa, Poland, fax 48-22-293997

Correspondence concerning subscription, exchange and back numbers should be addressed to

INSTITUTE OF MATHEMATICS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES
Publications Department

Śniadeckich 8, P.O. Box 137, 00-950 Warszawa, Poland, fax 48-22-293997

Published by the Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences
Typeset in TEX at the Institute
Printed and bound by

PRINTED IN POLAND

ISSN 0039-3223

STUDIA MATHEMATICA 116 (1) (1995)

Stabilité du spectre ponctuel d'opérateurs de Toeplitz généralisés

par

LIOUDMILA NIKOLSKAIA (Bordeaux)

Abstract. A general scheme based on a commutation relation is proposed to give rise to a definition of generalized Toeplitz operators on a Banach space. Under suitable conditions the existence of a symbol is proved and its continuation to algebras generated by generalized Toeplitz operators is constructed. A stability theorem for the point spectrum of an operator from generalized Toeplitz algebras is established; as examples one considers the standard and operator valued Toeplitz operators on weighted Hardy spaces and on spaces of functions (distributions) with weighted l^p Fourier transforms.

1. Introduction. Dans cet article nous étudions le problème de stabilité du spectre ponctuel de certains types d'opérateurs dans un espace de Banach X par rapport aux perturbations compactes. Une valeur propre λ de l'opérateur T est dite *stable* si $\operatorname{Ker}(T+K-\lambda I) \neq \{0\}$ pour tout $K \in \mathfrak{S}_\infty$, où $\mathfrak{S}_\infty$ est l'idéal des opérateurs compacts.

Plus précisement, nous considérons les opérateurs de Toeplitz (Wiener–Hopf si on a choisi une réalisation sur l'axe réel) et des opérateurs plus compliqués qui sont des compositions de tels opérateurs. A tout opérateur T on fait correspondre un "symbole" $\operatorname{sym}(T)$, et le problème de stabilité du spectre se résout en fonction du "symbole". Les résultats obtenus généralisent [9], [10] et certains autres résultats connus.

1.1. *Point de départ.* Un opérateur T de Toeplitz (de Wiener–Hopf discret) au sens classique est défini dans l'espace l^2_+ (au moins sur des suites à support fini) par la formule

$$Tx = \Big\{\sum_{j\geq 0} k(i-j)x(j)\Big\}_{i\geq 0},$$

où k est une fonction sur $\mathbb{Z}$. Il est borné si, et seulement si, il existe une fonction $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, où $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$, dont les coefficients de Fourier

1991 *Mathematics Subject Classification*: 47B35,45L05.
Key words and phrases: Toeplitz and Wiener–Hopf operators, multipliers, quasi-continuous functions.

$\{\widehat{\varphi}(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ coïncident avec $\{k(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Si l'on considère l^2_+ comme la transformée de Fourier de l'espace de Hardy $H^2 = H^2(\mathbb{T})$, $f \mapsto x = \{\widehat{f}(j)\}_{j\geq 0}$, l'opérateur T se transfère dans H^2 comme opérateur défini par la formule

$$Tf = T_\varphi f = P_+\varphi f, \qquad f \in H^2(\mathbb{T}),$$

où P_+ est la projection orthogonale de l'espace $L^2(\mathbb{T})$ sur $H^2(\mathbb{T})$ (projection de Riesz).

Dans ce cadre classique de l'espace de Hardy on considère ensuite (voir [2], [11], [5] pour tous renseignements) une algèbre des opérateurs composés

$$\operatorname{alg} T_A = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} T_{\varphi_{ij}} : \varphi_{ij} \in A;\ n, m \geq 1 \Big\},$$

où A est une sous-algèbre de $L^\infty(\mathbb{T})$, ainsi que l'application sym : $\operatorname{alg} T_A \to A$ définie par

$$\operatorname{sym}\Big(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} T_{\varphi_{ij}}\Big) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \varphi_{ij}.$$

Cette application est bien définie (c'est-à-dire ne dépend pas de représentation de l'opérateur T sous la forme $T = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} T_{\varphi_{ij}}$) et possède un prolongement à l'algèbre $\overline{\operatorname{alg}}\, T_A$, l'adhérence uniforme (en norme opératorielle) de $\operatorname{alg} T_A$.

Dans cette notation le théorème suivant était démontré dans [9].

1.2. Théorème. *Soient $\varphi \in C = C(\mathbb{T})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *λ est une valeur propre stable de l'opérateur T_φ.*
2. *λ est une valeur propre de tout opérateur T de l'algèbre $\overline{\operatorname{alg}}\, T_C$ avec le même symbole φ.*
3. *$\varphi(\zeta) \neq \lambda$ pour $\zeta \in \mathbb{T}$ et $\operatorname{Ind}[\varphi - \lambda] < 0$, où*

$$\operatorname{Ind} \Phi = \frac{1}{2\pi} [\arg \Phi(e^{it})]_{t=0}^{t=2\pi}$$

pour une fonction Φ continue sur $\mathbb{T}$.

1.3. *Organisation de l'article.* L'objectif de cet article est une généralisation de ce dernier théorème, plus précisément, l'analyse générale des situations où l'on peut garantir une conclusion semblable; à titre d'exemple on considère les opérateurs de Toeplitz à valeurs tant numériques que vectorielles dans les espaces de Hardy pondérés, de même que dans les espaces de type $l^p(\mathbb{Z})$, plains et pondérés.

Ces exemples occupent la Section 5 de l'article; ils sont accompaniés d'une analyse (partiellement nouvelle) de la structure des algèbres $\overline{\operatorname{alg}}\, T_{\mathcal{F}}$ associées aux algèbres de symboles $\mathcal{F}$ de type $H^\infty + C$. De plus, nous allons

traiter une généralisation d'un théorème de I. Verbitski ([17]; voir [2] pour un exposé de synthèse) en établissant un plongement $\{F : T_F : l^p_+(w_n) \to l^p_+(w_n)\} \subset \operatorname{Mult}(l^p)$ pour une classe assez générale de poids w_n.

La Section 2 contient deux méthodes générales pour définir le symbole d'un opérateur de Toeplitz généralisé (OTG) (un opérateur défini par l'équation opératorielle $S_*TS = T$, où S, S_* sont les compressions de certains opérateurs de type translation (shift)).

La Section 3 est consacrée à l'analyse des hypothèses supplémentaires sur les opérateurs S_*, S et à l'algèbre $\mathcal{F}$ garantissant la décomposition directe de type $\overline{\operatorname{alg}}\, T_{\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}} \dotplus \overline{\operatorname{scom}}\, T_{\mathcal{F}}$.

La Section 4 contient le résultat principal de l'article (Théorème 4.1) : un critère de stabilité du spectre ponctuel d'une composée d'OTG T par rapport soit à des perturbations compactes soit à des variations $T \to T'$ gardant le même symbole $\operatorname{sym} T = \operatorname{sym} T'$; la preuve est basée sur le schéma général des Sections 2–3 et nos résultats antérieurs [8].

2. Existence du symbole

2.1. *Relèvement d'une équation opératorielle.* Soit X_+ un espace de Banach. On considère des opérateurs $T, S, S_* : X_+ \to X_+$ bornés et tels que

$$S_*TS = T. \tag{2.1}$$

On suppose qu'il existe un espace de Banach X contenant X_+ comme un sous-espace et des opérateurs $U, U_* : X \to X$ bornés satisfaisant les trois axiomes suivants:

(A1) *il existe un sous-espace X_- tel que $X = X_- \dotplus X_+$ (somme directe),*

(A2) *$UX_+ \subset X_+$ et $U|X_+ = S$,*

(A3) *$U_*X_- \subset X_-$ et $P_+U_*|X_+ = S_*$, où P_+ est la projection $X \to X_+$ annulant X_-.*

Pour rendre plus flexible la méthode générale (en particulier, pour inclure le cas de certains espaces pondérés $l^p(w_n)$, voir Section 5 ci-dessous) on considère l'espace $X = X^0$ plongé continûment dans une chaîne de trois autres espaces X^i de même nature,

$$X^i = X^i_- \dotplus X^i_+ \quad \text{(somme directe)}, \quad X^i_\pm \subset X^{i+1}_\pm, \quad i = 0, 1, 2,$$

et tels que l'opérateur U_* admet un prolongement continu $X^2 \to X^2$ (désigné par la même lettre).

2.2. Proposition. *Soit X^3 un espace réflexif. On suppose que*

(A4) $\sup_{n\geq 0} \|U^n|X_+\|_{X_+\to X^1} < \infty$, $\sup_{n\geq 0} \|U^n_*|X^2_+\|_{X^2_+\to X^3} < \infty$,

et que T est un opérateur borné de X_+ dans X_+ et de X^1_+ dans X^2_+ vérifiant *l'équation* (2.1). *Alors il existe un opérateur borné* $F : X_+ \to X^3$ *tel que*

$$F = U_* F U | X_+ \tag{2.2}$$

et

$$Tx = P_+ F x, \quad x \in X_+. \tag{2.3}$$

Réciproquement, si un opérateur $F : X_+ \to X^3$ *satisfait les équations* (2.2)-(2.3) *et si* $TX_+ \subset X_+$ *on a* $T = S_* T S$.

On appellera l'opérateur F un *symbole* de T et l'opérateur

$$T_F = P_+ F | X_+$$

opérateur de Toeplitz généralisé (OTG). Pour la plupart des applications on pose $X^i = X$, $i = 1, 2, 3$.

Preuve. On utilise une limite de Banach généralisée dans l'espace l^∞; notons une de telles limites par GLIM. D'après l'hypothèse, quels que soient $x \in X_+$ et $y \in (X^3)^*$, on a

$$|(U_*^n T U^n x, y)| \le \|U_*^n | X_+^2\|_{X_+^2 \to X^3} \cdot \|T\|_{X_+^1 \to X_+^2} \cdot \|U^n | X_+\|_{X_+ \to X^1} \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$
$$\le \text{const}$$

et donc il existe la limite généralisée

$$\mathrm{GLIM}_n (U_*^n T U^n x, y) =: f(x, y), \quad \forall x \in X_+, \ \forall y \in (X^3)^*.$$

La fonction f ainsi définie est une forme bilinéaire bornée sur le produit $X_+ \times (X^3)^*$. Alors, il existe (vu la réflexivité de X^3) une application linéaire continue $F : X_+ \to X^3$ telle que $f(x, y) = (Fx, y)$ pour $x \in X_+$ et $y \in (X^3)^*$.

Il est facile de vérifier que F satisfait l'équation $F = U_* F U | X_+$ et que, de plus, quels que soient $x \in X_+$ et $y \in X_+^*$, on a

$$(Tx, y) = (S_*^n T S^n x, y) = (P_+ U_*^n T U^n x, y) = (U_*^n T U^n x, P_+^* y)$$

et alors

$$(Tx, y) = (Fx, P_+^* y) = (P_+ F x, y),$$

c'est-à-dire $Tx = P_+ F x$, $x \in X_+$.

La réciproque est évidente. ∎

2.3. Corollaire. *Si U et U^* vérifient les hypothèses de la Proposition avec $X = X^1 = X^2 = X^3$ alors le symbole F est un opérateur de X_+ dans X satisfaisant* (2.2) (*et borné*). ∎

2.4. Remarque. En fait, on peut prolonger le symbole F sur le sous-espace vectoriel

$$\mathrm{Past}(X_+) = \{x \in X : \exists n \ge 0 \text{ tel que } U^n x \in X_+\}$$

en utilisant l'équation $U_* F U x = F x$, et ensuite $U_*^n F U^n x = F x$. Si l'on remplace la condition (A4) par

(A4′) $\sup_{n \ge 0} \|U^n\|_{X \to X^1} < \infty$, $\sup_{n \ge 0} \|U_*^n | X_+^2\|_{X_+^2 \to X^3} < \infty$,

et les formes linéaires d'après la preuve de la Proposition par $(U_*^n T P_+ U^n x, y)$ on obtient un symbole F bien défini (et borné) dans l'espace X tout entier et satisfaisant l'équation de Toeplitz généralisée (ETG)

$$U_* F U = F. \tag{2.4}$$

2.5. *Unicité du symbole.* Pour les symboles définis sur X_+ (voir Proposition 2.2) il y a une condition suffisante d'unicité très simple.

2.6. Lemme. *Supposons que*

$$\bigcap_{n \ge 0} U_*^n X_- = \{0\}. \tag{2.5}$$

Alors, si F satisfait (2.2) *et $T_F = 0$ on a $F = 0$.*

Preuve. Pour $x \in X_+$ on a $Fx = U_*^n F U^n x \in U_*^n X_-$ (puisque $T_F = 0$) et donc $Fx = 0$. ∎

Pour un symbole défini sur X (voir Remarque 2.4) il faut ajouter une autre hypothèse.

2.7. Lemme. *Supposons que X, U et U_* vérifient* (2.5) *et*

$$\operatorname{clos} \mathrm{Past}(X_+) \equiv \operatorname{clos}\{x \in X : \exists n \ge 0 \textit{ tel que } U^n x \in X_+\} = X. \tag{2.6}$$

Alors, si F satisfait (2.4) *et $T_F = 0$ on a $F = 0$.*

Preuve. S'il existe un entier $n \ge 0$ tel que $U^n x \in X_+$ on obtient $Fx = U_*^k F U^k x \in U_*^k X_-$ pour $k \ge n$, et donc d'après (2.5), $Fx = 0$. Alors, F s'annule sur une partie dense de X, et donc $F = 0$. ∎

2.8. *Symboles formels.* Alors, si les opérateurs U^n et U_*^n ne sont pas uniformément bornés dans l'espace X nous rencontrons des difficultés pour la définition du symbole d'un OTG. Une des raisons est évidente : un OTG T avec $S_* T S = T$ doit définir un symbole F avec $U_* F U = F$ de manière unique d'après ses valeurs $P_+ F x$ sur la partie "analytique" X_+ de l'espace X; et, donc, s'il se trouve que la partie "co-analytique" X_- est beaucoup plus large que X_+ l'opérateur F devient non-borné dans l'espace X tout entier. Cet obstacle est bien visible dans le cadre des espaces pondérés de type $X = l^p(\mathbb{Z}, w_n)$; voir Section 5.11 pour les exemples.

Pour éviter ces difficultés métriques (continuité, majorations, etc.), on considère dans le reste du paragraphe une notion du symbole formel (ou faible) qui marche toujours et qui pourrait être un sujet à préciser dans une réalisation concrète du schéma général.

On suppose toujours (A1)–(A3) et (A5)–(A6) satisfaites ($U_* = U^{-1}$).

2.8.1. Soient $Q_n = U^n P_+ U^{-n}$ et $Q'_n = U^n P_- U^{-n}$, où $n \in \mathbb{Z}$. Alors, Q_n et Q'_n sont des projections sur les sous-espaces $U^n X_+$ et $U^n X_-$ respectivement, et on a $Q_n + Q'_n = I$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

2.8.2. Soit $P_n = Q_n - Q_{n+1} = Q'_{n+1} - Q'_n$. Alors P_n est une projection sur le sous-espace $X_n := U^n X_+ \cap \operatorname{Ker} Q_{n+1} = U^n X_+ \cap U^{n+1} X_- = U^n(X_+ \cap UX_-) = U^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En particulier, on a $P_n^2 = P_n$ et $P_n P_k = \delta_{nk} P_n$ pour tout $n, k \in \mathbb{Z}$.

Il est clair que

2.8.3. Si $\mathcal{X} := \{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ alors $\mathcal{X}$ est une suite topologiquement libre dans l'espace X :

$$X_n \cap \operatorname{span}(X_k : k \neq n) = \{0\} \quad \text{quel que soit } n \in \mathbb{Z}.$$

2.8.4. Définissons le sous-espace vectoriel des *U-polynômes* comme l'enveloppe linéaire $\operatorname{Lin}(\mathcal{X})$ et, donc, disons que $x \in X$ est un *U-polynôme* si x est une somme finie $x = \sum U^k x_k$ où $x_k \in X_0$ (représentation unique); on pose

$$\pi x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}} = \{U^{-k} P_k x\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Remarque. On utilise les mêmes définitions et notations pour les *U_*-polynômes* dans l'espace dual X^* : $Q_n^*, P_n^*, X_n^* = P_n^* X^*$ etc., $\mathcal{X}^* =: \{X_n^*\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\operatorname{Lin}(\mathcal{X}^*)$ et $x^* = \sum U^{*k} x_k^*$, où $x_k^* \in X_0^*$, $\pi^* x^* = \{x_k^*\}_{k\in\mathbb{Z}} = \{U^{*-k} P_k^* x^*\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

2.8.5. Une suite $\mathcal{X}$ s'appelle une *base faible* de X si $\operatorname{span}\mathcal{X} = X$ et l'application π est injective : $\pi x = 0 \Rightarrow x = 0$. Il est clair que la première demande est équivalente à la totalité de la suite duale $\mathcal{X}^*$: $\pi^* x^* = 0 \Rightarrow x^* = 0$, et la dernière à la complétude faible étoile de $\mathcal{X}^*$: $\operatorname{span}^*(\mathcal{X}^*) = X^*$.

2.8.6. *Si* $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|U^n\| < \infty$ *et* $\operatorname{span}\mathcal{X} = X$ *alors* $\mathcal{X}$ *est une base de* X : *quel que soit* $x \in X$, *on a* $x = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=-m}^{n} P_k x =: \sum_{k\in\mathbb{Z}} P_k x$.

En effet, c'est une conséquence du théorème de Banach–Steinhaus car $\sum_{k=-m}^{n} P_k x = Q_{-m} x - Q_n x$ et $\sum_{k=-m}^{n} P_k x = x$ pour tout U-polynôme x et pour tout m, n assez grands. ■

2.8.7. *Soit* $F : \operatorname{Lin}\mathcal{X} \to X$ *une application linéaire telle que* $FU = UF$, *et soient* $F_k : X_0 \to X_0$, $F_k := U^{-k} P_k F x = (\pi F x)_k$, $x \in X_0$. *Alors, quel que soit un* U*-polynôme* x, *on a*

$$\pi(Fx) = \Big\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} F_{m-k} x_k\Big\}_{m\in\mathbb{Z}}.$$

La vérification est un calcul direct : $Fx = F(\sum U^k x_k) = \sum U^k F x_k$ et donc quel que soit $m \in \mathbb{Z}$,

$$(\pi F x)_m = \sum (\pi U^k F x_k)_m = \sum U^{-m} P_m U^k F x_k$$

$$\text{(vu l'équation évidente } U^j P_m U^{-j} = P_{j+m} \text{ pour } j, m \in \mathbb{Z})$$

$$= \sum U^{-m+k} P_{m-k} F x_k = \sum F_{m-k} x_k. \ ■$$

Notation. On note $\pi F = \{F_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ et on écrit $F = \sum_{k\in\mathbb{Z}} U^k F_k$ (une série formelle) et $\pi F * \pi x := \pi(Fx)$ (une convolution formelle).

2.8.8. Proposition. *Soit T un OTG dans l'espace X ($S_* T S = T$) et soient $S(\mathcal{X})$ l'espace des suites $y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $y_k \in X_0$, P_+ une projection naturelle sur la partie "analytique" de $S(\mathcal{X})$ ($(P_+ y)_k = 0$ pour $k < 0$, $(P_+ y)_k = y_k$ pour $k \geq 0$) et S l'opérateur de translation (shift), $Sy = \{y_{k-1}\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Alors il existe une unique suite $\pi F = \{F_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ d'applications linéaires $F_k : X_0 \to X_0$ telle que l'application $\pi F : \operatorname{Lin}\mathcal{X} \to S(\mathcal{X})$ définie sur $\operatorname{Lin}\mathcal{X}$ par la formule*

$$(\pi F)x = \pi F * \pi x$$

vérifie

$$(*) \qquad (\pi F) U = S(\pi F) \quad \text{et} \quad \pi(Tx) = P_+(\pi F) x$$

quel que soit $x \in \operatorname{Lin}\mathcal{X}$.

Cette suite (et application) πF s'appelle un *symbole formel* (*faible*) de T.

Preuve. Pour $x \in X_0$ et $k \in \mathbb{Z}$ on pose

$$F_k x = P_0 U^{-k-n} T U^n x, \quad \text{où } n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } k + n \geq 0.$$

Tout d'abord, la définition est correcte :

$$\begin{aligned} P_0 U^{-k-n-1} T U^{n+1} x &= P_0 U^{-k-n} (P_+ + P_-) U^{-1} T U U^n x \\ &= P_0 U^{-k-n} P_+ U^{-1} T U U^n x \\ &= P_0 U^{-k-n} S_* T S U^n x = P_0 U^{-k-n} T U^n x. \end{aligned}$$

En particulier, pour $k \geq 0$ on peut prendre $n = 0$:

$$F_k x = P_0 U^{-k} T x = (\pi T x)_k, \quad k \geq 0.$$

Alors, la première équation $(*)$ est évidente. Donc, il suffit de vérifier la seconde pour des U-polynômes "constants" seulement, c'est-à-dire pour $x \in X_0$. Pour un tel x on a $(\pi F)x =: \pi F * \pi x = \{F_k x\}_{k\in\mathbb{Z}}$ et donc $P_+(\pi F)x = P_+\{F_k x\}_{k\in\mathbb{Z}} = \pi(Tx)$.

L'unicité de $\{F_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est aussi évidente d'après les mêmes formules. ■

2.8.9. Remarque. S'il existe un symbole au sens strict, $F : X \to X$ avec $FU = UF$ et $T = P_+ F | X_+$, alors le symbole faible coïncide avec πF. D'autre part, même pour un symbole faible, on a toujours $P_+(\pi F)x \in \pi X_+$ quel que soit $x \in X_+$; mais, par contre, $(\pi F)x \in \pi X$ pour tout $x \in X$ si, et seulement si, il existe un symbole "fort". En particulier, pour les espaces X de suites $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ à valeurs scalaires ou bien vectorielles (et avec le shift comme l'opérateur U) le symbole formel existe toujours mais peut-être comme un opérateur de X dans un autre espace $\widetilde{X}$, plus large que X. Les espaces X^i, $i = 1, 2, 3$, de la Proposition 2.2 sont juste une réalisation d'une telle situation; voir Section 5.11 pour un exemple.

3. Algèbres engendrées par OTG

3.1. *Algèbres de symboles et ATG.* Supposons que U et U_* vérifient les conditions (A1)–(A3) et (A4′) avec $X = X^i$, $i = 1, 2, 3$, et soit

$$\mathcal{S} = \{F \in L(X) : F = U_* F U\},$$

où $L(X)$ est l'algèbre des opérateurs bornés dans X. Si, de plus, les opérateurs U et U_* vérifient la condition

(A5) $UU_* = I$,

l'ensemble $\mathcal{S}$ des symboles admissibles d'OTG est une algèbre, dite algèbre des *multiplicateurs généralisés* (en effet, $F_1, F_2 \in \mathcal{S}$ entraîne $U_*F_1F_2U = U_*F_1UU_*F_2U = F_1F_2$ et donc $F_1F_2 \in \mathcal{S}$). L'algèbre $\mathcal{S}$ est à unité si l'on a

(A6) $U_*U = I$.

Dans ce cas, on obtient, en fait, que $U_* = U^{-1}$ et que $\mathcal{S}$ coïncide avec le commutant de U.

Par la suite, on considère certaines sous-algèbres $\mathcal{F}$ de $\mathcal{S}$ et les sous-algèbres de $L(X)$ engendrées par les opérateurs de Toeplitz généralisés (OTG) T_F, où $F \in \mathcal{F}$, c'est-à-dire les algèbres $\operatorname{alg} T_{\mathcal{F}}$ des opérateurs composés suivantes :

$$\operatorname{alg} T_{\mathcal{F}} = \Big\{T = \sum_i \prod_j T_{F_{ij}} : F_{ij} \in \mathcal{F}\Big\}$$

(sommes finies des produits finis).

L'algèbre $\operatorname{alg} T_{\mathcal{F}}$ est appelée une *algèbre de Toeplitz généralisée* (ATG).

Notre but suivant est de prolonger le symbole sym : $T_F \to F$ de l'ensemble de base $T_{\mathcal{F}} = \{T_F : F \in \mathcal{F}\}$ dans l'algèbre $\operatorname{alg} T_{\mathcal{F}}$.

3.2. PROPOSITION. *Sous les conditions* (A4′), (2.6) *et* (A5)–(A6) *il existe une constante C telle que*

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} F_{ij}\Big\| \le C \Big\|\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} T_{F_{ij}}\Big\|$$

quels que soient $F_{ij} \in \mathcal{S}$.

Preuve. Tout d'abord, les hypothèses entraînent qu'on a la convergence forte

$$\lim_n \|U_*^n T_F P_+ U^n x - Fx\| = 0 \quad (\forall x \in X)$$

au lieu de la convergence faible de la Proposition 2.2; en effet, si $x \in X$ tel que $U^N x \in X_+$ et $n \ge N$ alors

$$U_*^n T_F P_+ U^n x - Fx = U_*^n T_F U^n x - U_*^n F U^n x = U_*^n P_- F U^n x = U_*^n P_- U^n F x$$

(où $P_- = I - P_+$). Cette dernière expression tend vers zéro. En effet, d'après le théorème de Banach–Steinhaus $\|U_*^n P_- U^n\| = \|I - U_*^n P_+ U^n\| \le \text{const}$ d'après (A4′) et $U_*^n P_- U^n x = 0$ sur $\operatorname{Past}(X_+)$ qui est une partie dense de X.

On obtient donc $U_*^n T_F P_+ U^n x = Fx + o(1)$ quand $n \to \infty$, ce qui admet les itérations suivantes : $U_*^n \prod T_{F_{ij}} P_+ U^n x = (\prod F_{ij})x + o(1)$, et donc $U_*^n \sum\prod T_{F_{ij}} P_+ U^n x = (\sum\prod F_{ij})x + o(1)$ quand $n \to \infty$.

D'autre part,

$$\Big\|U_*^n \sum\prod T_{F_{ij}} P_+ U^n x\Big\| \le \|U_*^n | X_+\| \cdot \Big\|\sum\prod T_{F_{ij}}\Big\| \cdot \|U^n\| \cdot \|x\|,$$

d'où le résultat. ∎

3.3. COROLLAIRE. *En reprenant les hypothèses de la Proposition* 3.2, *soit $\mathcal{F}$ une sous-algèbre de $\mathcal{S}$. Alors, l'application* sym,

$$\operatorname{sym} T = \sum_i \prod_j F_{ij}, \quad \text{où} \quad T = \sum_i \prod_j T_{F_{ij}} \in \operatorname{alg} T_{\mathcal{S}},$$

est bien définie et est un homomorphisme continu de l'algèbre $\operatorname{alg} T_{\mathcal{S}}$ *dans* $\mathcal{S}$. *En particulier, elle envoie* $\operatorname{alg} T_{\mathcal{F}}$ *dans* $\mathcal{F}$ *et donc* $\overline{\operatorname{alg} T_{\mathcal{F}}}$ *dans* $\overline{\mathcal{F}}$ (adhérences pour la norme opératorielle). ∎

3.4. *Semi-commutateurs d'une ATG.* Dans cet étape, comme dans le cas classique (voir [9], [11]), le schéma général demande de décrire le noyau d'homomorphisme sym. Pour ce but, on utilise des semi-commutateurs de paires d'OTG :

$$[T_F, T_G) = T_F T_G - T_{FG},$$

où $F, G \in \mathcal{S}$. Soit, ensuite, $\operatorname{scom} T_{\mathcal{F}}$ l'idéal bilatéral engendré par des semi-commutateurs $[T_F, T_G)$ avec $F, G \in \mathcal{F}$.

3.5. LEMME. *Soit $\mathcal{F}$ une sous-algèbre de $\mathcal{S}$. Alors*, $\operatorname{Ker}(\operatorname{sym} | \operatorname{alg} T_{\mathcal{F}}) = \operatorname{scom} T_{\mathcal{F}}$.

Preuve. On répète les arguments classiques : soit $T = \sum\prod T_{F_{ij}} \in \operatorname{alg} T_{\mathcal{F}}$ et $\operatorname{sym} T = 0$. Alors, $T = T - T_{\operatorname{sym} T} = \sum(\prod T_{F_{ij}} - T_{\Pi F_{ij}})$ et il est clair que $(\prod_{j=1}^m T_{F_{ij}} - T_{\prod_{j=1}^m F_{ij}}) \in \operatorname{scom} T_{\mathcal{F}}$ (récurrence par m). Donc, $\operatorname{Ker}(\operatorname{sym} | \operatorname{alg} T_{\mathcal{F}}) \subset \operatorname{scom} T_{\mathcal{F}}$.

La réciproque est évidente. ∎

3.6. PROPOSITION. *En reprenant les notations et les hypothèses du Corollaire* 3.3 *on a une décomposition directe suivante* :

$$\overline{\operatorname{alg}} T_{\mathcal{F}} = T_{\overline{\mathcal{F}}} + \overline{\operatorname{scom}}\, T_{\mathcal{F}}.$$

Preuve. Puisque $\operatorname{alg} T_{\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}} + \operatorname{scom} T_{\mathcal{F}}$ est une décomposition directe (si $T_F \in \operatorname{scom} T_{\mathcal{F}}$ alors $F = \operatorname{sym} T_F = 0$ et donc $T_F = 0$) et $T \mapsto T_{\operatorname{sym} T}$ est une projection continue de $\operatorname{alg} T_{\mathcal{F}}$ sur $T_{\mathcal{F}}$, on obtient le résultat. ■

3.7. *Semi-commutateurs compacts.* Le cas où $\overline{\operatorname{scom}}\, T_{\mathcal{F}} = \mathfrak{S}_\infty$, l'idéal des opérateurs compacts, est le plus intéressant pour les applications (en particulier, pour un problème de la théorie de perturbation dont nous nous occuperons en Section 4 ci-dessous). On considère maintenant certaines hypothèses sur l'algèbre $\mathcal{F}$ liées à une telle coïncidence. On suppose toujours les hypothèses de la Proposition 3.2.

3.8. LEMME. *Soit*

$$\mathcal{S}_c = \{F \in \mathcal{S} : P_- F P_+ \in \mathfrak{S}_\infty\}, \qquad \mathcal{S}_{\bar{c}} = \{F \in \mathcal{S} : P_+ F P_- \in \mathfrak{S}_\infty\}.$$

Alors, $\mathcal{S}_c$ et $\mathcal{S}_{\bar{c}}$ sont des sous-algèbres fermées de $\mathcal{S}$. De plus, on a

$$\overline{\operatorname{scom}}\, T_{\mathcal{S}_c} \subset \mathfrak{S}_\infty, \qquad \overline{\operatorname{scom}}\, T_{\mathcal{S}_{\bar{c}}} \subset \mathfrak{S}_\infty,$$

et donc $\overline{\operatorname{scom}}\, T_{\mathcal{F}} \subset \mathfrak{S}_\infty$ pour toute algèbre $\mathcal{F}$ satisfaisant $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}_c$, ou bien $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}_{\bar{c}}$.

Preuve. Quels que soient $F_1, F_2 \in \mathcal{S}_c$, on a $P_- F_1 F_2 P_+ = P_- F_1 (P_- + P_+) F_2 P_+ = P_- F_1 P_- F_2 P_+ + P_- F_1 P_+ F_2 P_+ \in \mathfrak{S}_\infty$ comme produits des compacts et bornés, et de même pour l'algèbre $\mathcal{S}_{\bar{c}}$.

Le reste est standard (voir [9], [11]) : soit, par exemple, $G \in \mathcal{S}_c$; alors, $[T_F, T_G] P_+ = P_+ F P_+ G P_+ - P_+ F (P_+ + P_-) G P_+ = -P_+ F P_- G P_+ \in \mathfrak{S}_\infty$. ■

3.9. COROLLAIRE. *Soient X un espace de Hilbert, $X_- \perp X_+$, et $\mathcal{F}$ une C^*-algèbre ($\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$). Alors, $\overline{\operatorname{scom}}\, T_{\mathcal{F}} \subset \mathfrak{S}_\infty$ si, et seulement si, $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}_c \cap \mathcal{S}_{\bar{c}}$.*

Preuve. En effet, la condition est suffisante d'après le lemme; elle est nécessaire car si $F \in \mathcal{F}$ alors $F^* \in \mathcal{F}$, et on a $[T_F, T_{F^*}] P_+ = -P_+ F P_- F^* P_+ = (P_- F P_+)(P_- F P_+)^* \in \mathfrak{S}_\infty$, donc $P_- F P_+ \in \mathfrak{S}_\infty$ et $P_+ F^* P_- \in \mathfrak{S}_\infty$, c'est-à-dire $F \in \mathcal{S}_c \cap \mathcal{S}_{\bar{c}}$. ■

3.10. *Sous-algèbres $\mathcal{CS}$ et $\mathcal{AS}$.* Il y a deux sous-algèbres importantes de $\mathcal{S}$ dont l'usage sera suffisant pour beaucoup de besoins pratiques.

Algèbre $\mathcal{CS}$. Soit $C \in L(X)$ tel que $CX_+ \subset X_+$, $CX_- \subset X_-$ et $CU = UC$ (donc, $C \in \mathcal{S}$ et $CP_+ = P_+ C$); alors, C est dit un *symbole* (*multiplicateur*) *constant*. Soit $\mathcal{P}$ des polynômes en U et $U_* = U^{-1}$ aux coefficients constants C tels que $P_- C U_* P_+ \in \mathfrak{S}_\infty$:

$$\mathcal{P} = \Big\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_k U^k : P_- C_k U_* P_+ \in \mathfrak{S}_\infty \Big\}.$$

Alors, il est clair que $\mathcal{P}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{S}$ et même de $\mathcal{S}_c \cap \mathcal{S}_{\bar{c}}$ (il suffit de vérifier que $P_- C_k U_*^n P_+ \in \mathfrak{S}_\infty$ pour tout $n \geq 1$, mais cela est clair d'après la définition de C_k et une récurrence : $P_- C_k U_*^{n+1} P_+ = P_- C_k U_* P_+ U_*^n P_+ + P_- C_k U_* P_- U_*^n P_+ \in \mathfrak{S}_\infty$ car $P_- C_k U_* P_- U_*^n P_+ = P_- U_* P_- C_k U_*^n P_+ \in \mathfrak{S}_\infty$). On pose

$$\mathcal{CS} = \operatorname{clos}_{L(X)} \mathcal{P}.$$

3.11. COROLLAIRE. $\overline{\operatorname{scom}}\, T_{\mathcal{CS}} \subset \mathfrak{S}_\infty$. ■

Algèbre $\mathcal{AS}$. On pose $\mathcal{AS} = \{F \in \mathcal{S} : FX_+ \subset X_+\}$ ($= \{F \in \mathcal{S} : P_- F P_+ = 0\}$). Il est clair que $\mathcal{AS} \subset \mathcal{S}_c$.

3.12. COROLLAIRE. *Soit $\mathcal{F} = \operatorname{clos}(\mathcal{AS} + \mathcal{CS})$. Alors, $\overline{\operatorname{scom}}\, T_{\mathcal{F}} \subset \mathfrak{S}_\infty$.* ■

3.13. *Version abstraite d'un théorème de Coburn.* Nous nous occuperons maintenant de l'inclusion réciproque $\overline{\operatorname{scom}}\, T_{\mathcal{F}} \supset \mathfrak{S}_\infty$ et nous nous bornerons à une version générale d'un théorème de Coburn (voir [2], [11], [5]).

On note par $\mathfrak{S}_1$ *l'idéal des opérateurs à trace finie.*

3.14. LEMME. *Chacune des conditions suivantes entraîne que*

$$\mathfrak{S}_1 \subset \overline{\operatorname{scom}}\, T_{\mathcal{F}} \quad (\textit{et donc, } \operatorname{clos} \mathfrak{S}_1 \subset \overline{\operatorname{scom}}\, T_{\mathcal{F}}).$$

(1) *$\mathcal{CS} \subset \mathcal{F}$ et $I - SS_* = y_0 \otimes x_0$, où x_0 est un vecteur cyclique de S et y_0 est un vecteur cyclique de S_*^*.*

(2) *$\mathcal{CS} \subset \mathcal{F}$ et il existe des multiplicateurs constants C_i tels que $C_i(I - SS_*) = y_i \otimes x_i$, où $\{x_i\}$ et $\{y_i\}$ sont des ensembles cycliques pour les opérateurs S et S_*^* respectivement.*

Preuve. (1) C'est un calque direct du raisonnement de Coburn : on a $S^m [S, S_*] S_*^n = -S^m (y_0 \otimes x_0) S_*^n = -S_*^{*n} y_0 \otimes S^m x_0 \in \overline{\operatorname{scom}}\, T_{\mathcal{F}}$ et donc tout opérateur de rang 1 appartient à $\overline{\operatorname{scom}}\, T_{\mathcal{F}}$. D'où le résultat.

(2) La même chose mais il faut remplacer $S^m [S, S_*] S_*^n$ par $S^m C_i [S, S_*] S_*^n$, $i \geq 1$. ■

3.15. COROLLAIRE. *Soit $\mathcal{CS} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{S}_c$ et supposons que les conditions* (1) *ou* (2) *du Lemme* 3.14 *sont vérifiées et que l'espace X_+ a la propriété d'approximation* (voir [13]). *Alors, $\overline{\operatorname{scom}}\, T_{\mathcal{F}} = \mathfrak{S}_\infty$.* ■

3.16. Remarques. (1) Si X est un espace de Hilbert ou bien un espace à base alors $\overline{\operatorname{scom}}\, T_{\mathcal{F}} = \mathfrak{S}_\infty$ (sous réserve des hypothèses du Corollaire 3.15 et de la Proposition 3.2).

(2) Dans le cas des opérateurs de Toeplitz classiques (donc, si $X = L^2(\mathbb{T})$ et $Uf = zf$, $f \in L^2$), pour une algèbre (fermée) $\mathcal{F}$ satisfaisant $\mathcal{CS} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{S}_c$

il y a deux possibilités seulement : soit $\mathcal{F} = \mathcal{CS}$, soit $\mathcal{F} = \mathcal{S}_c$ $(= \mathcal{AS} + \mathcal{CS} = H^\infty + C(\mathbb{T}))$.

Le sens des hypothèses différentes de ce paragraphe varie selon les cas particuliers où on réalise le schéma abstrait; il sera l'objet d'une discussion au paragraphe 5.

4. Stabilité de valeurs propres dans une ATG. Alors, tout est prêt pour déduire un critère de stabilité d'une valeur propre d'OTG en fonction de son symbole. On note par $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$ le spectre ponctuel d'un opérateur $T : X \to X : \sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Ker}(T - \lambda I) \neq \{0\}\}$.

4.1. THÉORÈME. *Supposons que $X, U, U_* = U^{-1}$ vérifient les axiomes* (A1)–(A3), (A4′), (2.6) *et les conditions* (1) *ou* (2) *du Lemme* 3.14. *Soient ensuite $\mathcal{F}$ une algèbre de multiplicateurs* (*symboles*) *telle que $\mathcal{CS} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{S}_c$ et $\lambda \in \mathbb{C}, F \in \mathcal{F}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ *pour tout opérateur T de $\overline{\mathrm{alg}}\, T_{\mathcal{F}}$ avec le même symbole* $F = \mathrm{sym}\, T$.

(2) *L'opérateur $T_F - \lambda I$ est semi-Fredholm et* $\mathrm{ind}(T_F - \lambda I) > 0$.

Remarque. On rappelle qu'un opérateur A est dit *semi-Fredholm* si son image est fermée et qu'au moins une de dimensions $\dim \mathrm{Ker}\, A$, $\dim \mathrm{Ker}\, A^*$ est finie; par définition, $\mathrm{ind}\, A = \dim \mathrm{Ker}\, A - \dim \mathrm{Ker}\, A^*$.

On peut aussi mentionner que dans la situation générale il n'y a pas de critère en fonction du symbole F pour qu'un OTG T_F soit Fredholm ou semi-Fredholm; par contre, sous des hypothèses assez particulières (mais encore assez intéressantes pour les applications) on peut exprimer ces propriétés de T_F en fonction de F (voir Section 5 ci-dessous).

Preuve du théorème. D'après 3.14–3.15 on a $\{T \in \overline{\mathrm{alg}}\, T_{\mathcal{F}} : \mathrm{sym}\, T = F\} = T_F + \overline{\mathrm{scom}}\, T_{\mathcal{F}} = T_F + \mathfrak{S}_\infty$ et donc le théorème est une conséquence immédiate du résultat ci-dessous [8]. ■

4.2. THÉORÈME. *Soient X, Y deux espaces de Banach, et T un opérateur de X dans Y. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. $\mathrm{Ker}(T + K) \neq \{0\}$ *pour tout* $K \in \mathfrak{S}_\infty$.
2. $\mathrm{Ker}(T + K) \neq \{0\}$ *pour tout* $K \in \mathfrak{S}_1$.
3. *T est semi-Fredholm et* $\mathrm{ind}\, T > 0$.

Remarque. A propos de ce dernier résultat on peut ajouter qu'il a été considérablement renforcé dans l'article assez récent de D. Herrero, Th. Taylor et L. Wang [6], où les auteurs ont démontré le théorème suivant sur la stabilité (ou bien instabilité) simultanée des valeurs propres d'un opérateur T (mais pour *l'espace de Hilbert* uniquement; la technique hilbertienne est extrêmement importante pour ce travail) : soit $\sigma_{\mathrm{us}}(T) = \mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} :$ $T - \lambda I$ est semi-Fredholm de $\mathrm{ind}(T - \lambda I) > 0\}$; alors il existe un opérateur compact K tel que $\sigma_{\mathrm{us}}(T) \cap \sigma_{\mathrm{p}}(T + K) = \emptyset$. Bien sûr, à la base de ce résultat remarquable on peut conformément renforcer le Théorème 4.1 (dans le cas de l'espace de Hilbert).

5. Exemples d'application

5.1. *Le cas où U est une isométrie surjective* (*unitaire*). La plupart des exemples ci-dessous concernent le cas où U est une isométrie surjective, donc unitaire (dans le cadre des espaces de Banach). Si on suppose que U est un unitaire satisfaisant (A1)–(A3) alors (A4), (A4′), (A5)–(A6) sont vérifiées automatiquement, et donc pour appliquer le schéma il ne reste qu'à vérifier la condition (2.6), et pour utiliser le Théorème 4.1 il faut ajouter aussi les conditions (1) ou (2) du Lemme 3.14.

On anticipe la liste des exemples par une analyse brève d'OTG de Fredholm et semi-Fredholm; la référence générale pour les opérateurs de Fredholm et semi-Fredholm est [7].

5.2. *Conditions nécessaires pour qu'un opérateur soit un opérateur de Fredholm.* On ramène un analogue abstrait d'un résultat classique sur l'inclusion des spectres essentiels (voir [2], [11]).

5.3. LEMME. *Supposons les conditions standard* (A1)–(A3), (A5)–(A6) *vérifiées et soit*

$$\bigcap_{n\geq 0} U^n X_+ = \{0\}. \tag{5.1}$$

Soit, ensuite, un OTG $T_F = P_+F|X_+$ semi-Fredholm à indice inférieur à $+\infty$ ($\mathrm{ind}\, T_F < +\infty$, *c'est-à-dire*, $\dim \mathrm{Ker}\, T_F < \infty$). *Alors, il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que*

$$\|Fx\| \geq \varepsilon \|x\|, \quad x \in X_+.$$

Preuve. Soit $K = \mathrm{Ker}\, T_F$. Puisque $\dim K < \infty$ il est clair qu'il existe un n tel que $K \cap U^n X_+ = \{0\}$. D'autre part, il est bien connu (voir [14]) que l'hypothèse sur T_F entraîne l'existence d'une constante $\delta > 0$ telle que $\|T'x'\| \geq \delta \|x'\|_{X_+/K}$, où T' est l'opérateur quotient défini sur l'espace quotient X_+/K par la formule $T'x' = T'(x + K) = T_F x$ pour $x \in X_+$ et $\|x'\|_{X_+/K} = \inf\{\|x + y\| : y \in K\}$. Alors, si L un sous-espace fermé de X_+ tel que $L \cap K = \{0\}$ ($L = U^n X_+$ dans notre cas), les normes $\|\cdot\|_{X_+/K}$ et $\|\cdot\|_{X_+}$ sont équivalentes dans L : la majoration $\|x'\|_{X_+/K} \leq \|x\|_{X_+}$ est clair et la réciproque (avec une constante convenable) est valable puisque la projection canonique $L + K \to L$ $(l + k \mapsto l)$ est continue (on rappelle que $\dim K < \infty$). Cela entraîne qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$c\|x\| \le \|T_F x\|$ quel que soit $x \in U^n X_+$ et donc

$$c\|x\| \le \|T_F x\| \le \|P_+\| \cdot \|Fx\|, \quad x \in U^n X_+.$$

En posant $x = U^n y$, $y \in X_+$ et en utilisant que $FU^n y = U^n F y$ et que U et $U^{-1} = U_*$ sont des opérateurs bornés on obtient la conclusion. ∎

5.4. COROLLAIRE. *En reprenant les hypothèses du lemme on renforce la condition* (5.1) *en demandant que les U-polynômes* (*voir* 2.8.4) *soient denses dans l'espace X et que $C := \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|U^n\| < \infty$. Alors, $\|Fx\| \ge \delta\|x\|$ pour tout $x \in X$ avec un $\delta > 0$.*

En effet, quel que soit $x \in X$ tel que $U^n x \in X_+$, on a $\|FU^n x\| \ge \varepsilon\|U^n x\|$, d'où $\varepsilon C^{-1}\|x\| \le \varepsilon\|U^n x\| \le \|FU^n x\| = \|U^n F x\| \le C\|Fx\|$. D'autre part, de tels vecteurs x sont denses dans X, d'où la conclusion. ∎

Remarque. En remplaçant les hypothèses du lemme par $\operatorname{ind} T_F > -\infty$ et

$$\bigcap_{n\ge 0} U^{*-n} X_+^* = \{0\} \tag{5.2}$$

(on utilise la dualité bi-linéaire) on obtient la condition nécessaire adjointe : $\|F^* f\| \ge \varepsilon\|f\|$, $f \in X_+^*$.

La même forme duale existe pour le corollaire : en remplaçant les U-polynômes par les U^*-polynômes on obtient l'estimation inférieure dans l'espace X^* tout entier : $\|F^* f\| \ge \delta\|f\|$, $f \in X^*$.

La proposition suivante est beaucoup plus spécialisée mais quand même elle sera très utile pour traiter les exemples qui suivent.

5.5. LEMME. *Supposons les conditions standard* (A1)–(A3), (A5)–(A6) *vérifiées et que les U^*-polynômes soient denses dans l'espace X^*. Supposons, ensuite, que l'opérateur U admet le calcul $L^\infty = L^\infty(\mathbb{T})$ au noyau trivial* (*c'est-à-dire, $U = R(z)$ pour une représentation exacte $R : L^\infty \to L(X)$, $\|R(f)\| \le C\|f\|_\infty$; on note $R(f) = f(U)$*)*. Alors, tout opérateur semi-Fredholm T_F à indice $\operatorname{ind} T_F > -\infty$, où $F = f(U)$ avec $f \in L^\infty$ telle que $F \in \mathcal{S}_c$* (voir Lemme 3.8), *est en fait de Fredholm.*

Preuve. Il nous faut, donc, démontrer que $\dim \operatorname{Ker} T_F < \infty$. D'après le Corollaire 5.4 et la remarque à ce corollaire (le calcul L^∞ entraîne que $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|U^n\| < \infty$ et donc les hypothèses sont vérifiées) on déduit que $\|f(U)^* y\| \ge \delta\|y\|$ pour tout $y \in X^*$ avec une constante $\delta > 0$. Cela entraîne que $\operatorname{ess\,inf}_{\mathbb{T}} |f| > 0$: si $|f| < \varepsilon$ sur une partie $\sigma \subset \mathbb{T}$ avec $m\sigma > 0$ et si $g = \chi_\sigma$ est la fonction indicatrice de σ alors

$$\begin{aligned}\delta\|g(U^*)y\| &\le \|f(U^*)g(U^*)y\| = \|f(U^*)g^2(U^*)y\| \\ &\le \|(fg)(U^*)g(U^*)y\| \le C\varepsilon\|g(U^*)y\|\end{aligned}$$

et par conséquent $|f(z)| \ge \delta/C$ p.p. $|z| = 1$ (car il existe un $y \in X^*$ tel que $g(U^*)y \ne 0$).

Puisque la fonction f est inversible dans L^∞ l'opérateur F est inversible dans l'espace X (en vertu du calcul L^∞), et de plus $T_F = P_+ F|X_+ = (F - P_- F)|X_+$. D'après l'hypothèse on a $P_- F P_+ \in \mathfrak{S}_\infty$, d'où on conclut que l'image $T_F X_+$ est fermée et $\dim \operatorname{Ker} T_F < \infty$. ∎

Remarque. Parmi les exemples possibles des espaces X vérifiant les hypothèses du lemme on note $L^p(\mathbb{T})$ et $L^p(\mathbb{T},\mu)$ avec $1 < p < \infty$ et la mesure μ satisfaisant la condition de Muckenhoupt de degré p, de même que l'espace $L^p(\mathbb{T}, E)$ à valeurs vectorielles, où $\dim E < \infty$. Dans tous ces cas la condition $f \in H^\infty + C(\mathbb{T})$ entraîne $f(U) \in \mathcal{S}_c$.

5.6. EXEMPLE 1. Soit $X = L^2(\mathbb{T})$ avec $Uf = zf$ et $U_* f = \bar{z} f$ pour $f \in L^2(\mathbb{T})$. Alors $\mathcal{CS} = C(\mathbb{T})$, $\mathcal{AS} = H^\infty$ et $\mathcal{S}_c = H^\infty + C$ d'après un théorème connu de Hartman (voir [5], [9]); en particulier, $H^\infty + C$ est une sous-algèbre fermée de L^∞. Donc l'algèbre $H^\infty + C$ peut jouer le rôle de $\mathcal{F}$ en théorie des Sections 2–4 et en particulier en Théorème 4.1 (en bref : l'algèbre $\mathcal{F} = H^\infty + C$ est *admissible*). Le Lemme 5.5 est aussi applicable, et on peut utiliser le critère connu pour qu'un opérateur de Toeplitz T_F, $F \in H^\infty + C$, soit de Fredholm, établi par R. Douglas et D. Sarason [5] : T_F (où $F \in H^\infty + C$) est de Fredholm si, et seulement si, le symbole F est inversible dans l'algèbre $H^\infty + C$, et si et seulement si il existe un nombre r, $0 < r < 1$, tel que $\inf\{|F^\#(z)| : r \le |z| < 1\} > 0$, où $F^\#$ signifie le prolongement harmonique de F dans le disque unité $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$; on a aussi $\operatorname{ind} T_F = -\operatorname{Ind} F := -\lim_{r\to 1} \operatorname{Ind} F^\#(re^{it})$. En utilisant le Théorème 4.1 et le Lemme 5.5 on obtient le critère de stabilité :

$\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre stable (*au sens du Théorème* 4.1) *de l'opérateur $T \in \overline{\operatorname{alg}} T_{\mathcal{F}}$, où $\mathcal{F} = H^\infty + C$, à symbole $F = \operatorname{sym} T \in H^\infty + C$ si et seulement si la fonction $F - \lambda$ est inversible dans $H^\infty + C$ et* $\operatorname{Ind}(F - \lambda) < 0$ (voir l'Introduction pour la définition de Ind).

On note aussi ce fait utile pour le sujet : quel que soit $F \in L^\infty$, on a soit $\operatorname{Ker} T_F = \{0\}$, soit $\operatorname{Ker} T_F^* = \{0\}$ (lemme de L. Coburn, voir [4], [2]).

5.7. EXEMPLE 2. Soit $X = L^2(\mathbb{T}, E)$ l'espace des fonctions à valeurs vectorielles (dans l'espace E, pas obligatoirement de dimension finie). Alors $\mathcal{CS} = C(\mathbb{T}, \mathfrak{S}_\infty(E))$ ($\mathcal{CS} = C(\mathbb{T}, L(E))$ si $\dim E < \infty$) et $\mathcal{AS} = H^\infty(L(E))$. On a aussi $\mathcal{S}_c = \mathcal{AS} + \mathcal{CS} = H^\infty(L(E)) + C(\mathfrak{S}_\infty(E))$ (L. Page [12]) et donc cette algèbre $\mathcal{F} = H^\infty(L(E)) + C(\mathfrak{S}_\infty(E))$ est admissible. Le Lemme 5.5 est aussi applicable. De plus, il est facile de voir que dans le cas où $\dim E < \infty$ le lemme est correct, pas uniquement pour $F = f(U)$, $f \in H^\infty + C$, mais pour toute $F \in H^\infty(L(E)) + C(L(E))$; dans ce cas, un opérateur T_F avec $F \in \mathcal{F}$

est de Fredholm si, et seulement si, la fonction $d = \det F$ est inversible dans $H^\infty + C$, et de plus $\operatorname{ind} T_F = -\operatorname{Ind}(\det F)$ (R. Douglas [4]).

Finalement, en appliquant 4.1 et 5.5 on déduit (dans le cas où $\dim E < \infty$) qu'*un nombre* $\lambda \in \mathbb{C}$ *est une valeur propre stable de l'opérateur* $T \in \operatorname{alg} T_{\mathcal{F}}$, *où* $\mathcal{F} = H^\infty(L(E)) + C(L(E))$, *avec* $\operatorname{sym} T = F$ *si, et seulement si,* $(F - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{F}$ *et* $\operatorname{Ind}(\det(F - \lambda I)) < 0$; voir [10] pour une preuve directe de ce fait.

5.8. Exemple 3. Soit $X = L^2(\mathbb{T}, E, W)$ l'espace pondéré de poids non-négatif $W(z) : E \to E$, E un espace de Hilbert, $W(z) \geq 0$, $z \in \mathbb{T}$, muni de la (semi-)norme

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{T}} (W(t)f(t), f(t))\, dm.$$

Le schéma général (le Théorème 4.1 et le Lemme 5.5 en particulier) est applicable si la projection P_+ de Riesz est bornée (pour une condition nécessaire et suffisante en fonction de W voir [16]). La structure des algèbres $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_c$ reste un peu vague.

5.9. Exemple 4. Soit $X = L^p(\mathbb{T}, w) = L^p(w) = \{f : fw \in L^p(\mathbb{T})\}$, $1 < p < \infty$; on suppose $w \in L^p(\mathbb{T})$ et $w^{-1} \in L^{p'}(\mathbb{T})$, où p' est l'exposant conjugé, $p^{-1} + p'^{-1} = 1$.

Si la projection de Riesz est bornée (donc, si le poids w satisfait la condition connue de Muckenhoupt ou bien de Helson–Szegö (pour le cas $p = 2$), voir [2]) alors on pose

$$X_+ = H^p(w) = \operatorname{span}_{L^p(w)}(z^n : n \geq 0),$$
$$X_- = H^p_-(w) = \operatorname{span}_{L^p(w)}(z^n : n < 0)$$

et obtient $X = X_- \dot{+} X_+$ (somme directe). Les autres hypothèses du schéma général sont aussi vérifiées, ce qui entraîne l'existence du symbole : $T = T_F$, $F \in L^\infty(\mathbb{T})$ (donc, $\mathcal{S} = L^\infty$), et les autres propriétés, jusqu'au Théorème 4.1. On a $\mathcal{AS} = H^\infty$ et $\mathcal{CS} = C(\mathbb{T})$. Le Lemme 5.5 est aussi évidemment applicable, et pour obtenir un critère explicite de stabilité d'une valeur propre il ne reste qu'à décrire l'algèbre $\mathcal{S}_c$ et la propriété d'être Fredholm en fonction du symbole.

L'algèbre $\mathcal{S}_c$. *Sous les hypothèses ci-dessus on a* $\mathcal{S}_c = H^\infty + C$.

Preuve. Il est bien connu (voir [2]) qu'une généralisation du théorème de Hartman (voir Exemple 1 ci-dessus) reste valable pour les espaces $H^p = H^p(m)$, où m est la mesure de Lebesgue : $\mathcal{S}_c = H^\infty + C$. En fait, cela vient de l'équivalence de la norme $\|P_-FP_+\|$ d'un opérateur de Hankel P_-FP_+ à la distance $\operatorname{dist}_{L^\infty}(F, H^\infty)$: si cette équivalence est déjà établie on obtient pour un opérateur de Hankel compact $\lim \|P_-FU^n|X_+\| = 0$ (correct dans la situation générale si $\sup \|U^n|X_+\| < \infty$ et les U^*-polynômes (donc, les

polynômes trigonométriques classiques dans le cas de l'espace $X = L^p(w)$) sont denses dans l'espace X_+^*), et par conséquent $\lim_n \operatorname{dist}(Fz^n, H^\infty) = 0$, d'où $\lim \|F - z^{-n} f_n\| = 0$ pour une suite $z^{-n} f_n \in z^{-n} H^\infty \subset H^\infty + C$; puisque $H^\infty + C$ est fermé on obtient $F \in H^\infty + C$. La réciproque est immédiate.

L'équivalence désirée est toujours presque évidente. Tout d'abord, l'inégalité $\|P_-FP_+\| \leq \|P_-\| \operatorname{dist}(F, H^\infty)$ est évidemment correcte (même dans le cadre général, $\|P_-FP_+\| \leq \|P_-\| \operatorname{dist}(F, \mathcal{AS})$). La réciproque utilise la dualité standard entre $L^p(w)$ et $L^{p'}(w^{-1}) : (f, g) = \int_{\mathbb{T}} fg\, dm$ pour $f \in L^p(w)$ et $g \in L^{p'}(w^{-1})$. En vertu du théorème de Hahn–Banach et de la continuité de la projection P_+ on peut identifier l'espace duale $(H^p_-(w))^*$ avec $zH^{p'}(w^{-1})$ à un taux d'équivalence près (notamment, $\|g\|_{L^p(w)} \geq \|(\cdot, g)\| \geq \|P_+\|^{-1} \cdot \|g\|_{L^p(w)}$). Soit, ensuite, W la fonction extérieure (voir [12], [11]) avec $|W| = w$ p.p. sur $\mathbb{T}$. Alors, pour tous $f \in H^p(w)$ et $g \in zH^{p'}(w^{-1})$ on a

$$(P_-FP_+f, g) = \int_{\mathbb{T}} Ffg\, dm = \int_{\mathbb{T}} F \cdot fW \cdot gW^{-1}\, dm$$

et puisque $f \mapsto Wf$, $g \mapsto W^{-1}g$ sont des isométries surjectives de $H^p(w)$, $zH^{p'}(w^{-1})$ aux espaces H^p, $zH^{p'}$ respectivement, on en déduit que les produits $fg = fWgW^{-1}$ remplissent la boule unitée de l'espace zH^1 quand f, g parcourent les boules unitées de l'espaces correspondants. En utilisant de nouveau le théorème de Hahn–Banach on achève la preuve :

$$\Big|\int_{\mathbb{T}} Ffg\, dm\Big| \leq \|P_-FP_+\| \cdot \|f\| \cdot \|(\cdot, g)\|,$$

$$\operatorname{dist}(F, H^\infty) = \sup\Big\{\Big|\int_{\mathbb{T}} F\varphi\, dm\Big| : \|\varphi\|_{zH^1} \leq 1\Big\} \leq \|P_-FP_+\|. \blacksquare$$

Opérateurs T_F *semi-Fredholm.* Comme il était mentionné ci-dessus, l'opérateur T_F, où $F \in H^\infty + C$, semi-Fredholm d'indice supérieur à $-\infty$ est déjà Fredholm. En utilisant la structure connue des fonctions de la classe $H^\infty + C$ il est facile de caractériser cette propriété en fonction du symbole. Notamment,

Sous les hypothèses ci-dessus (sur l'espace $H^p(w)$*) un opérateur* T_F, *où* $F \in H^\infty + C$, *est de Fredholm si, et seulement si,* $1/F \in H^\infty + C$.

Preuve. Il est clair que la condition est suffisante : puisque $F, F^{-1} \in H^\infty + C$ on obtient $T_F T_{F^{-1}} - I = [T_F, T_{F^{-1}}] \in \mathfrak{S}_\infty$ et $T_{F^{-1}} T_F - I = [T_{F^{-1}}, T_F) \in \mathfrak{S}_\infty$ et donc T_F est de Fredholm.

La réciproque dépend d'un théorème profond de T. Wolff. D'après 5.3–5.4 on a $\operatorname{ess\,inf}_{\mathbb{T}} |F| > 0$. Alors, un corollaire d'un théorème de Wolff (voir [11], Annexe 4, Section 165.53) garantie une factorisation $F = F_0 F_1$, où

$F_0 \in H^\infty$ et $F_1 \in C(\mathbb{T})$. De plus, $T_{F_0}T_{F_1} - T_F = [T_{F_0}, T_{F_1}) \in \mathfrak{S}_\infty$ et T_{F_1} est un opérateur de Fredholm (car, évidemment, $\inf_{\mathbb{T}} |F_1| > 0$). On conclut que T_{F_0} est de Fredholm, d'où il est clair que le facteur intérieur de F_0 se réduit à un produit de Blaschke fini (sinon, $\operatorname{codim}(F_0 \cdot H^p(w)) = \infty$). Alors, $F_0^{-1}, F_1^{-1} \in H^\infty + C$, c'est-à-dire $F^{-1} \in H^\infty + C$. ∎

Il serait curieux de mentionner qu'il y a une autre source pour déduire un critère d'être Fredholm dans l'espace $H^p(w)$, même pour les opérateurs de Toeplitz généraux : (1) le lemme de Coburn reste correct dans les espaces $H^p(w)$: soit $\operatorname{Ker} T_F = \{0\}$, soit $\operatorname{Ker} T_F^* = \{0\}$ (voir [2], p. 218); (2) donc, un opérateur T_F est de Fredholm si, et seulement si, l'opérateur $T_{z^i F}$ est inversible, où $i = \operatorname{ind} T_F$; (3) et finalement, il faut utiliser un critère d'inversibilité de R. Rochberg [13].

Conclusion : le critère de stabilité d'une valeur propre dans l'algèbre $\overline{\operatorname{alg}} T_{H^\infty+C}$ (dans l'espace $H^p(w)$) est le même que dans le cas classique (voir Exemple 1).

5.10. Exemple 5. Soit $X = l^p(\mathbb{Z}) =: l^p$, $1 < p < \infty$, avec les mêmes opérateurs U et $U_* = U^{-1}$. Les symboles F admissibles sont des p-multiplicateurs de Fourier (voir [2]) : $\mathcal{S} = \operatorname{Mult}(l^p)$ et $F \in \operatorname{Mult}(l^p)$ si, et seulement si, $x \in l^p \Rightarrow F * x \in l^p$, où $F * x = \{\sum_{k\in\mathbb{Z}} F_{n-k}x_k\}_{n\in\mathbb{Z}}$. L'algèbre minimale admissible est $\mathcal{CS} = \operatorname{clos}_{\mathrm{Mult}}(\text{Polynômes}) =: \operatorname{mult}(l^p)$, mais l'algèbre $\mathcal{F} = \mathcal{AS} + \mathcal{CS} = \operatorname{Mult}(l^p)_A + \operatorname{mult}(l^p) \subset \mathcal{S}_c$ (fermée d'après [2]) est aussi admissible. Aucune description de $\mathcal{S}_c$ n'est connue; une conjecture naturelle est que $\mathcal{S}_c = \mathcal{F}$ (voir [2] pour les détails).

D'après le Lemme 5.5 et les résultats connus (voir [9]) le critère de stabilité d'une valeur propre de l'opérateur $T \in \overline{\operatorname{alg}} T_{\mathcal{F}}$ à symbole $\operatorname{sym} T = F \in \mathcal{F}$ (toujours dans le sens du Thèoréme 4.1) est le suivant : *$F - \lambda$ est inversible dans $\mathcal{F}$ et $\operatorname{Ind}(F - \lambda) < 0$.*

On peut dire des choses semblables pour les espaces à valeurs vectorielles $l^p(\mathbb{Z}, E)$, $\dim E < \infty$ (voir aussi [2]).

5.11. Exemple 6

5.11.1. *Préliminaires*. Soit $X = l^p(w_n) = l^p(\mathbb{Z}, w_n)$ un espace pondéré avec w_n positif et tel que

$$0 < \inf_{n\in\mathbb{Z}} \frac{w_n}{w_{n+1}} \le \sup_{n\in\mathbb{Z}} \frac{w_n}{w_{n+1}} < \infty. \tag{5.3}$$

Alors, les translations (shifts) à gauche $U\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}} = \{x_{k-1}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ et à droite $U^{-1}\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}} = \{x_{k+1}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sont bien définies et continues dans X. L'équation $S_*TS = T$, où $S_* = P_+U^{-1}|X_+$ et $X_+ = l^p_+(w_n) = \{x \in X : x_k = 0 \text{ pour } k < 0\}$, définie un opérateur à matrice de Toeplitz classique $Tx = \{\sum_{k\ge0} F_{m-k}x_k\}_{m\ge0}$; bien sûr, ici F est un symbole faible (formel) qui existe toujours dans le cas des espaces $l^p(w_n)$ et qui a été noté par πF

dans la Section 2.8 (pour abréger les notations nous allons omettre ce π). Au-delà de l'existence du symbole la théorie est assez faible dans ce cas puisque l'application du schéma général de la Section 3 demande une majoration uniforme des puissances U^n et U^{-n}, ce qui entraîne que le poids est quasi-constant : $0 < \inf_{n,k}(w_n/w_{n+k}) \le \sup_{n,k}(w_n/w_{n+k}) < \infty$. Quand même, les majorations de symboles $F \in \mathcal{S} =: \mathcal{S}^p(w_n)$ (c'est-à-dire, de symboles d'opérateurs bornés $T_F : l^p_+(w_n) \to l^p_+(w_n)$) ont le sens d'une étape intermédiaire pour les estimations attendues de type $\| \sum \prod T_{F_{ij}} \|_{Y\to Y} \le c \| \sum \prod T_{F_{ij}} \|_{X\to X}$, et donc d'une étape pour la construction du calcul symbolique dans l'espace Y. D'habitude (voir [9] pour une exposition de synthèse), on considère comme Y l'espace plain $l^p_+(\mathbb{Z})$. En particulier, si on établit une majoration de ce type (au moins pour les opérateurs de Toeplitz eux-mêmes), on applique alors la Proposition 2.2 (avec $X^1 = X^2 = X^3 = l^p(\mathbb{Z})$ et sous une condition évidemment suffisante $\inf_{n\in\mathbb{Z}} w_n > 0$), et obtient l'existence du symbole de la classe $l^p(w_n) \to l^p(\mathbb{Z})$.

En généralisant certains résultats de I. Verbitski (voir [17], [2]) nous nous occuperons ici des estimations des symboles F d'opérateurs de Toeplitz $T_F : l^p_+(w_n) \to l^p_+(w_n)$ sous certaines hypothèses sur le poids w_n (I. Verbitski a considéré le cas où $w_n^\alpha = (|n| + 1)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$).

5.11.2. *Plongement* $\mathcal{S}^p(w_n) \subset \operatorname{Mult}(l^p)$. Il s'agit des conditions sur w_n garantissant cette inclusion, où $l^p = l^p(\mathbb{Z})$ et

$$\operatorname{Mult}(l^p) = \{F = \{F_k\}_{k\in\mathbb{Z}} : x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l^p(w_n) \Rightarrow F * x \in l^p(w_n)\}$$

($\operatorname{Mult}(l^p)$ est un espace de Banach muni de la norme opératorielle). On note par avance que le plongement le plus attendu $\mathcal{S}^p(w_n) \subset \operatorname{Mult}(l^p(w_n))$ est faux même pour les poids puissances w_n^α (voir [2], p. 251).

5.11.3. Théorème. *Supposons qu'au moins une des suites $\{w_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ou $\{1/w_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ vérifie la condition* (5.3) *et les conditions suivantes :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{w_{j+n}}{w_n} = 1, \quad \forall j \in \mathbb{Z} \tag{5.4}$$

(*invariantes par rapport au changement* $w_n \leftrightarrow w_n^{-1}$)

$$\sup_{n,j\ge0} \frac{w_n}{w_{j+n}} < \infty \quad (\textit{quasi-monotonie}) \tag{5.5}$$

$$w_{j+n} \le \operatorname{const} \cdot w_j w_n, \quad j, n \ge 0 \ (\textit{sous-additivité}). \tag{5.6}$$

Alors, $\mathcal{S}^p(w_n) \subset \operatorname{Mult}(l^p)$.

La démonstration suit la méthode de I. Verbitski (voir [2]) et se divise en deux lemmes.

5.11.4. Lemme. *Supposons les conditions* (5.3) *vérifiées et*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}(\limsup_{k\to\infty}(w_k/w_{k+n})) =: c < \infty.$$

Alors $\mathcal{S}^p(w_n) \subset l^p$.

Preuve. Soit $F \in \mathcal{S}^p(w_n)$. Alors $P_+ F e_n = P_+ U^n F$, où $e_n = \{\delta_{kn}\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $n \in \mathbb{Z}$, sont les vecteurs de la base standard de $l^p(w_n)$. Cela entraîne que

$$\sum_{k\geq 0} |F_{k-n}|^p w_k^p \leq \|T_F\|^p \|e_n\|^p = \|T_F\|^p w_n^p, \qquad n \geq 0.$$

Par conséquent, quels que soient $N \geq 0$ et $n \geq N$, on a

$$\sum_{j=-N}^{N} |F_j|^p w_{j+n}^p / w_n^p \leq \|T_F\|^p.$$

En passant à la limite inférieure dans cette inégalité on obtient $\sum_{j=-N}^{N} |F_j|^p \leq c^p \|T_F\|^p$. Donc, $F \in l^p$. ∎

5.11.5. LEMME. *Supposons que le poids w_n satisfait les hypothèses* (5.4)–(5.6), *et soient $W : l^p(w_n) \to l^p$ l'isométrie naturelle $Wx = \{w_k x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de $l^p(w_n)$ dans l^p, et*

$$A_n = U^{-n} W T_F P_+ W^{-1} U^n, \qquad n \geq 0,$$

où $F \in \mathcal{S}^p(w_n)$. Alors,

$$F * x \in l^p \quad \text{et} \quad \lim_n \|A_n x - F * x\|_{l^p} = 0$$

quel que soit le "U-polynôme" x (c'est-à-dire, une suite à support fini).

Preuve. Soit $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ un U-polynôme. D'après le lemme précédent on a

$$F * x = F * \Big(\sum x_k U^k \delta_0\Big) = \sum x_k U^k F \in l^p.$$

D'après le même calcul, il est aussi clair qu'il suffit de montrer que $\lim_n \|A_n \delta_0 - F\| = 0$ (la norme $\|\cdot\|$ signifie toujours la norme plaine $\|\cdot\|_{l^p}$). On remplace F par une approximation semblable à $A_n\delta_0$, notamment par $U^{-n} P_+ U^n F$, et on obtient

$$\begin{aligned} \|A_n\delta_0 - F\| &= \|U^{-n} W T_F P_+ W^{-1} U^n \delta_0 - F\| \\ &\leq \|U^{-n} W T_F P_+ W^{-1} U^n \delta_0 - U^{-n} P_+ U^n F\| \\ &\quad + \|U^{-n} P_+ U^n F - F\|. \end{aligned}$$

Puisque $\lim_n \|U^{-n} P_+ U^n F - F\| = 0$ il ne reste qu'à vérifier que

$$\lim_n \|W T_F P_+ W^{-1} U^n \delta_0 - P_+ U^n F\| = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} &\|W T_F P_+ W^{-1} U^n \delta_0 - P_+ U^n F\|^p \\ &\quad = \|W T_F P_+ (1/w_n)\delta_n - P_+ U^n F\|^p = \|W T_F (1/w_n)\delta_n - P_+ U^n F\|^p \\ &\quad = \left\| \left(\frac{1}{w_n} W - I\right) P_+ U^n F \right\|^p = \sum_{k\geq 0} |F_{k-n}|^p \left| \frac{w_k}{w_n} - 1 \right|^p \\ &\quad = \sum_{j\geq -n} |F_j|^p \left| \frac{w_{j+n}}{w_n} - 1 \right|^p. \end{aligned}$$

La dernière somme tend vers zéro quand $n \to \infty$ d'après le théorème de Lebesgue sur la convergence dominée : pour vérifier l'existence d'une majorante sommable on utilise pour $-n \leq j < 0$ la quasi-monotonie de w_k, $k \geq 0$: $|F_j|^p |w_{j+n}/w_n - 1|^p \leq |F_j|^p (\text{const} + 1)^p$, et pour $j \geq 0$ la propriété de sous-additivité (et la même quasi-monotonie) : $|F_j|^p |w_{j+n}/w_n - 1|^p \leq |F_j|^p (\text{const}\, w_j + 1)^p \leq |F_j|^p \text{const}\, w_j^p$. Puisque les deux suites $|F_j|^p$ et $|F_j|^p w_j^p$ sont sommables on obtient le résultat. ∎

5.11.6. Preuve du théorème. Soient w_n un poids satisfaisant les conditions (5.4)–(5.6) et x un "U-polynôme" (une suite à support fini). Le Lemme 5.11.5 entraîne que

$$\|Fx\| = \lim_n \|A_n x\| \leq \|T_F\|_{l^p(w_n)} \|x\|.$$

Puisque les polynômes sont denses dans l'espace l^p on obtient $F \in \text{Mult}(l^p)$.

Si le poids inverse $1/w_n$ safisfait les conditions (5.4)–(5.6) on passe à l'opérateur adjoint T_F^* en utilisant (comme toujours) la dualité de Cauchy : $(x, y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k y_k$ pour $x \in l^p(w_n)$ et $y \in l^{p'}(w_n^{-1})$. Alors, il est facile de voir que $T_F^* = T_{\widetilde{F}}$, où $(\widetilde{F})_k = F_{-k}$, $k \in \mathbb{Z}$. D'après la partie déjà démontrée on obtient que $\widetilde{F} \in \text{Mult}(l^p)$; mais il est clair (et bien connu) d'après la symétrie de l^p que $\widetilde{F} \in \text{Mult}(l^p) \Leftrightarrow F \in \text{Mult}(l^p)$. Cela achève la preuve. ∎

5.11.7. *Symboles quasi-symétriques.* On appelle un symbole F *quasi-symétrique* si $F, \widetilde{F} \in \mathcal{S}^p(w_n)$, où $(\widetilde{F})_k = F_{-k}$, $k \in \mathbb{Z}$. Il est bien connu dans la théorie des opérateurs de Toeplitz (de Wiener–Hopf, d'intégrales singulières) que ce cas particulier est plus simple à traiter (voir [9] pour des exemples). Il était curieux de noter une telle simplification dans le cadre de notre problème : si $F \in \mathcal{S}^p(w_n)$ est quasi-symétrique alors la conclusion $F \in \text{Mult}(l^2) = L^\infty$ (un peu plus faible que $F \in \text{Mult}(l^p)$) est presque évidente! En effet, il est clair qu'il suffit de considérer les symboles symétriques $(F \pm \widetilde{F})$; dans ce cas il s'agit d'un opérateur "auto-adjoint" : formellement T_F et T_F^* coïncident mais sont définis sur des espaces adjoints l'un à l'autre. Donc, les opérateurs

$$T_F : l_+^p(w_n) \to l_+^p(w_n), \qquad T_F : l_+^{p'}(1/w_n) \to l_+^{p'}(1/w_n)$$

sont tous les deux bornés. Alors, on peut utiliser un théorème connu de Peetre et Lizorkin sur l'interpolation des opérateurs linéaires dans l'échelle des espaces de Lebesgue (on change l'exposant et la mesure simultanément, voir [1], Théorème 5.5.3) et déduire que T_F est borné dans l'espace intermédiaire

$$(l_+^p(w_n), l_+^{p'}(1/w_n))_{1/2,2} = l_+^2$$

(l'interpolation soit par la méthode réelle, soit complexe, voir [1]). D'où le résultat : $F \in \text{Mult}(l^2)$. ∎

On termine avec une remarque que, bien sûr, les poids puissances de Verbitski w_n^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, vérifient les hypothèses du Théorème 5.11.3.

Références

[1] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation Spaces. An Introduction*, Springer, 1976.
[2] A. Bottcher and B. Silbermann, *Analysis of Toeplitz Operators*, Akademie-Verlag, Berlin, 1989.
[3] A. Devinatz and M. Shinbrot, *General Wiener–Hopf operators*, Trans. Amer. Math. Soc. 145 (1969), 467–494.
[4] R. Douglas, *Banach Algebra Techniques in the Theory of Toeplitz Operators*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. 15, Amer. Math. Soc., 1973.
[5] —, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, Academic Press, New York, 1972.
[6] D. A. Herrero, T. J. Taylor and L. V. Wang, *Variations of the point spectrum under compact perturbations*, dans : Oper. Theory Adv. Appl. 32, Birkhäuser, 1988, 113–157.
[7] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, 1976.
[8] L. N. Nikol'skaya, *Criteria for stability of the point spectrum under completely continuous perturbations*, Math. Notes 19 (1975), 946–949.
[9] —, *Stability of the eigenvalues of certain types of singular integral equations*, J. Soviet Math. 32 (1986), 513–519.
[10] —, *Stability of characteristic values of singular integral equations*, ibid. 50 (1990), 2027–2031.
[11] N. Nikolski, *Treatise on the Shift Operator*, Springer, 1986.
[12] L. Page, *Bounded and compact vectorial Hankel operators*, Trans. Amer. Math. Soc. 150 (1970), 529–539.
[13] R. Rochberg, *Toeplitz operators on weighted H^p spaces*, Indiana Univ. Math. J. 26 (1977), 291–298.
[14] M. Rosenblum, *Vectorial Toeplitz operators and the Fejér–Riesz Theorem*, J. Math. Anal. Appl. 23 (1968), 139–147.
[15] I. Singer, *Theory of Bases*, Vol. 1, Springer, 1975.
[16] S. Treil, *Geometric aspects of the spectral function theory*, dans : Oper. Theory Adv. Appl. 42, Birkhäuser, 1989, 209–280.
[17] I. E. Verbitski, *Sur les multiplicateurs dans les espaces l^p pondérés*, dans : Propriétés spectrales des opérateurs, Mat. Issled. 45, Shtiintsa, Kishinev, 1977 (en russe).

UFR DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX-1
351, COURS DE LA LIBÉRATION
33405 TALENCE CEDEX, FRANCE

Received April 21, 1994
Revised version February 9, 1995 (3266)

STUDIA MATHEMATICA 116 (1) (1995)

Characterizing spectra of closed operators through existence of slowly growing solutions of their Cauchy problems

by

SENZHONG HUANG (Tübingen)

Abstract. Let A be a closed linear operator in a Banach space E. In the study of the nth-order abstract Cauchy problem $u^{(n)}(t) = Au(t)$, $t \in \mathbb{R}$, one is led to considering the linear Volterra equation

$$\text{(AVE)} \qquad u(t) = p(t) + A\int_0^t a(t-s)u(s)\,ds, \qquad t \in \mathbb{R},$$

where $a(\cdot) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ and $p(\cdot)$ is a vector-valued polynomial of the form $p(t) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!}x_j t^j$ for some elements $x_j \in E$. We describe the spectral properties of the operator A through the existence of slowly growing solutions of the (AVE). The main tool is the notion of Carleman spectrum of a vector-valued function. Moreover, an extension of a theorem of Pólya in complex analysis is obtained and applied to the individual "$Ax = 0$" and "$Tx = x$" problem.

1. Introduction. Let A be the generator of a bounded C_0-semigroup $(T(t))_{t\ge0}$ on a reflexive Banach space E. It is shown in [Vu, Cor. 2.6] that, if $(T^*(t))_{t\ge0}$ is not *asymptotically stable*, i.e., $\|T^*(t)f_0\| \not\to 0$ as $t \to \infty$ for some $f_0 \in E'$, and if $\sigma(A) \not\supseteq i\mathbb{R}$, then the full time Cauchy problem $u'(t) = Au(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $u(0) = u_0$, has a mild, bounded solution for each $u_0 \in E$. This result implies (roughly speaking) that the spectral structure of the generator A can furnish a non-trivial, slowly growing (e.g., bounded) solution for the Cauchy problem $u'(t) = Au(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

In this paper we study the converse aspect, i.e., describing the spectral properties of A through the existence of slowly growing solutions of the corresponding Cauchy problems. Generally, we take A to be a closed linear operator in a Banach space E. In the study of the nth-order abstract Cauchy problem $u^{(n)}(t) = Au(t)$, $t \in \mathbb{R}$, one is led to considering the linear Volterra

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 45N05, 47D03; Secondary 44A10, 30D15.
Key words and phrases: Volterra equation, Carleman transform, spectrum, C_0-groups.