Contents of Volume 111, Number 1

STUDIA MATHEMATICA

Executive Editors: **Z. Ciesielski, A. Pełczyński, W. Żelazko**

The journal publishes original papers in English, French, German and Russian, mainly in functional analysis, abstract methods of mathematical analysis and probability theory. Usually 3 issues constitute a volume.

Detailed information for authors is given on the inside back cover. Manuscripts and correspondence concerning editorial work should be addressed to

STUDIA MATHEMATICA

Śniadeckich 8, P.O. Box 137, 00-950 Warszawa, Poland, fax 48-22-293997

Correspondence concerning subscription, exchange and back numbers should be addressed to

INSTITUTE OF MATHEMATICS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES
Publications Department

Śniadeckich 8, P.O. Box 137, 00-950 Warszawa, Poland, fax 48-22-293997

Published by the Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences
Typeset in TEX at the Institute
Printed and bound by

PRINTED IN POLAND

ISSN 0039-3223

Sur les dimensions de mesures

par

AI HUA FAN (Cergy-Pontoise)

Abstract. Firstly, we introduce the lower and upper dimensions for a measure defined on a metric space. Secondly, we establish the dimension formulas and characterize the unidimensional measures which were introduced by J.-P. Kahane. Lastly, we give some applications of these to the calculus of dimensions and the multifractal analysis of certain well known measures such as Lebesgue measures on Cantor sets, Gibbs measures, Markov measures and Riesz products etc.

1. Introduction. Considérons une mesure positive μ définie sur un espace métrique X de type homogène (voir la définition au §2). Nous définissons sa *dimension supérieure* et sa *dimension inférieure* par

$$\dim^* \mu = \inf\{\dim E : \mu(E^c) = 0\},$$
$$\dim_* \mu = \sup\{\alpha > 0 : \dim E < \alpha \Rightarrow \mu(E) = 0\}$$

où $\dim E$ désigne la dimension de Hausdorff du borélien E.

C'est l'un des moyens que nous présentons d'introduire ces deux notions de dimensions pour une mesure donnée. En fait, ces deux dimensions de la mesure peuvent se définir à l'aide du spectre de dimension de la mesure ou de la continuité et la singularité de la mesure par rapport aux mesures de Hausdorff (Théorème 1).

D'ailleurs, nous définissons l'*exposant lipschitzien* (*inférieur*) en $x \in X$ de la mesure μ par

$$\underline{D}(\mu, x) = \liminf_{r\to 0} \frac{\log \mu(B_r(x))}{\log r},$$

$B_r(x)$ étant la boule de centre x et de rayon r. Nous démontrons que (Théorème 2)

$$\dim^* \mu = \inf\{\alpha > 0 : \underline{D}(\mu, x) \le \alpha \ \mu\text{-p.p.}\},$$
$$\dim_* \mu = \sup\{\alpha > 0 : \underline{D}(\mu, x) \ge \alpha \ \mu\text{-p.p.}\}.$$

Ces deux formules serons appelées les *formules de dimensions*.

1991 *Mathematics Subject Classification*: 28A12, 28A75, 60G57.
Key words and phrases: upper and lower dimension, dimension formulas, unidimensional, multifractal, Gibbs measure, Markov measure, Riesz product.

Une mesure est dite *unidimensionnelle* si $\dim_* \mu = \dim^* \mu$. J.-P. Kahane ([9]) a introduit l'unidimensionalité en disant que μ est α-dimensionnelle si elle peut s'écrire comme une somme de α-atomes. Nous démontrons que ces deux définitions sont équivalentes (Théorème 3).

Dans un espace de type homogène, la dimension de Hausdorff coïncide avec la dimension capacitaire d'un borélien ([1]). Ceci nous permet d'utiliser des outils analytiques comme le potentiel et la décomposition de Kahane pour étudier les dimensions d'une mesure.

On fait un rappel au §2 sur les outils nécessaires. Les paragraphes 3–6 seront consacrés aux énoncés et aux preuves des trois théorèmes cités ci-dessus.

Signalons que les formules de dimensions ne concernent que le comportement de la fonction d'exposant lipschitzien $\underline{D}(\mu, x)$ sur un ensemble portant la mesure μ, tandis que l'analyse multifractale consiste à mieux connaître le comportement de $\underline{D}(\mu, x)$ plus ou moins global. Dans la dernière section, nous calculons les dimensions et examinons la multifractalité de certaines mesures comme mesures de Lebesgue homogènes, mesures de Gibbs, mesures de Markov et produits de Riesz etc.

2. Préliminaires et notations. Soit (X, d) un espace métrique localement compact. Supposons qu'il soit de *type homogène* au sens de Coifman et Weiss ([5]), c'est-à-dire,

$$N(\varepsilon, B, d) < \text{Const}$$

pour toute boule B de diamètre 2ε, $N(\varepsilon, B, d)$ désignant le nombre minimum de d-boules de diamètre ε recouvrant B. Cette condition est une condition nécessaire et suffisante, introduite par P. Assouad ([1]), pour que (X, d) admette un plongement lipschitzien dans un espace de dimension finie. Dans un tel espace, la dimension capacitaire et la dimension de Hausdorff sont égales. Cette égalité est l'un des points essentiels dans la suite car il nous permet d'employer des outils analytiques dans le calcul de dimensions de Hausdorff. Dans une communication personnelle, R. Kaufman nous a signalé qu'il est sans condition que la dimension de Hausdorff est égale à la dimension capacitaire. Avec ceci dans l'esprit, nos résultats sont valables dans un espace métrique non nécessairement de type homogène.

Rappelons d'abord la dimension de Hausdorff d'un ensemble, surtout sa liaison avec la théorie du potentiel. Soit E $(\subset X)$ un borélien. $\dim E$ désigne toujours sa dimension de Hausdorff et $H_\alpha(E)$ sa mesure de Hausdorff d'ordre α $(0 < \alpha < \infty)$. Voici leurs définitions précises. Soit $\varepsilon > 0$. Considérons tous les recouvrements de E par des boules B_n de diamètre inférieur à ε et les sommes correspondantes

$$\sum (\operatorname{diam} B_n)^\alpha.$$

La borne inférieure de ces sommes est notée $H_\alpha(\varepsilon)$. Par définition, la *mesure de Hausdorff* de E d'ordre α, notée $H_\alpha(E)$, est la limite de $H_\alpha(\varepsilon)$ lorsque ε tend vers 0. Alors la *dimension de Hausdorff* de E est définie en fonction des $H_\alpha(E)$ $(0 < \alpha < \infty)$ de la façon suivante :

$$\dim E = \sup\{\alpha > 0 : H_\alpha(E) = \infty\} = \inf\{\alpha > 0 : H_\alpha(E) = 0\}.$$

Nous nous limitons aux mesures de Radon positives bornées définies sur (X, d). L'ensemble de ces mesures est noté $M^+(X)$, et $M_1^+(X)$ désigne la partie constituée des probabilités.

Soit $\mu \in M^+(X)$. Le *potentiel d'ordre* α $(0 < \alpha < \infty)$ de μ est défini par

$$U_\alpha^\mu(x) = \int_X \frac{d\mu(y)}{(d(x,y))^\alpha} \qquad (x \in X),$$

et son *énergie d'ordre* α est définie par

$$I_\alpha^\mu = \int_X U_\alpha^\mu(x)\, d\mu(x) = \int_X \int_X \frac{d\mu(x)\, d\mu(y)}{(d(x,y))^\alpha}.$$

Soit K $(\subset X)$ un compact. La *capacité d'ordre* α de K est définie par

$$\operatorname{Cap}_\alpha K = (\inf_{\mu \in M_1^+(K)} I_\alpha^\mu)^{-1}.$$

En général, la capacité d'ordre α d'un borélien E se définit comme

$$\operatorname{Cap}_\alpha E = \sup_{K(\subset E),\text{compact}} \operatorname{Cap}_\alpha K.$$

Dans un espace homogène, le théorème de Frostman ([8]) dit que la dimension d'un borélien peut s'exprimer à l'aide de ses capacités comme suit :

$$\dim E = \sup\{\alpha > 0 : \operatorname{Cap}_\alpha E > 0\} = \inf\{\alpha > 0 : \operatorname{Cap}_\alpha E = 0\}.$$

En effet, le lemme de Frostman affirme que, K étant un compact, $\operatorname{Cap}_\alpha K > 0$ si et seulement si K porte une mesure $\mu \in M^+(K)$ non nulle telle que $\mu(B) \le (\operatorname{diam} B)^\alpha$.

Une autre façon de relier la dimension d'un borélien aux mesures qu'il porte est le théorème de Tricot suivant ([16]) :

$$\dim E = \sup_{\mu(E) > 0} \inf_{x \in E} \underline{D}(\mu, x)$$

où $\underline{D}(\mu, x)$ est l'exposant lipschitzien de μ en x défini dans Introduction.

Rappelons ensuite la décomposition de Kahane pour une mesure $\mu \in M^+(X)$ ([9, 11, 12]). Posons, pour $0 < \alpha < \infty$,

$$S = S(\mu, \alpha) = \{x \in X : U_\alpha^\mu(x) = \infty\}.$$

Ecrivons

$$\mu = 1_S \mu + 1_{S^c} \mu.$$

C'est la *décomposition de Kahane* d'ordre α. Nous appelons S l'*ensemble singulier* de μ d'ordre α. Nous savons que S est de α-capacité nulle d'où on déduit que toute mesure se décompose d'une façon unique en une somme de deux mesures dont l'une est α-singulière (portée par un borélien de α-capacité nulle) et l'autre est α-régulière (s'écrivant comme une somme dénombrable de mesures dont chacune est de α-énergie finie). Des ensembles singuliers $S(\mu,\alpha)$ $(0<\alpha<\infty)$ découle une fonction croissante $\nu(\alpha)$:

$$\nu(0)=0, \quad \nu(\alpha)=\mu(S(\mu,\alpha)), \quad \nu(\infty)=\mu(X).$$

Elle s'appelle le *spectre de dimension* de μ.

3. Résultats principaux. Soit $\mu\in M^+(X)$. Définissons d'abord sa *dimension portante* par

$$\dim_{\mathrm{p}}\mu=\inf\{\dim F:\mu(F)=\mu(X)\}.$$

C'est la notion la plus naturelle qui mesure la taille "du plus petit borélien" portant la mesure μ (les guillemets indiquent que plusieurs ensembles peuvent être le plus petit). Définissons ensuite la *dimension énergétique* de μ par

$$\dim_{\mathrm{e}}\mu=\sup\Big\{\alpha>0:\mu=\sum_i\mu_i \text{ avec } I_\alpha^{\mu_i}<\infty\Big\},$$

la somme signifiant une somme dénombrable forte (sous la norme de variation totale).

Maintenant nous définissons, pour la mesure μ, sa *dimension spectrale supérieure* $\dim^*\mu$ et sa *dimension spectrale inférieure* $\dim_*\mu$ respectivement par

$$\dim^*\mu=\inf\{\alpha\ge 0:\nu(\alpha)=\mu(X)\},$$
$$\dim_*\mu=\sup\{\alpha\ge 0:\nu(\alpha)=0\}.$$

Dire que la mesure μ est *absolument continue* par rapport à H_α signifie que $H_\alpha(F)=0$ implique $\mu(F)=0$. Ceci sera désigné par $\mu\ll H_\alpha$. S'il existe un borélien F tel que $H_\alpha(F)=0$ et $\mu(F)=\mu(X)$, on dit que μ est *singulière* par rapport à H_α. Cela sera désigné par $\mu\perp H_\alpha$. (De même, on peut définir la continuité absolue et la singularité d'une mesure par rapport à Cap_α). Moyennant ces deux notions, nous pouvons introduire deux indices concernant μ, l'*indice de continuité* et l'*indice de singularité*, qui sont définis respectivement par

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{c}}\mu=\sup\{\alpha\ge 0:\mu\ll H_\alpha\},$$
$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{s}}\mu=\inf\{\alpha\ge 0:\mu\perp H_\alpha\}.$$

Ces quantités, dimensions ou indices, sont des moyens pour mesurer, d'une façon ou d'une autre, la grandeur des boréliens qui portent une mesure.

On verra qu'au fond il n'y en a que deux qui sont distinctes. Autrement dit, on a le

THÉORÈME 1. *Pour une mesure positive μ on a*

$$\dim_*\mu=\dim_{\mathrm{e}}\mu=\mathrm{Ind}_{\mathrm{c}}\mu, \tag{1}$$
$$\dim^*\mu=\dim_{\mathrm{p}}\mu=\mathrm{Ind}_s\mu, \tag{2}$$
$$\dim_*\mu\le\dim^*\mu. \tag{3}$$

Après avoir démontré le théorème 1, on pourra parler tout simplement de la dimension inférieure et la dimension supérieure d'une mesure μ, que l'on désigne respectivement par $\dim_*\mu$ et $\dim^*\mu$.

Pour chaque mesure μ définie sur X, on a introduit dans Introduction son *exposant lipschitzien* (*inférieur*) au point x, noté $\underline{D}(\mu,x)$. De même, on définit son exposant lipschitzien supérieur, noté $\overline{D}(\mu,x)$, en remplaçant la limite inférieure par la limite supérieure. Dans le cas où $\underline{D}(\mu,x)=\overline{D}(\mu,x)$, on note $D(\mu,x)$ la valeur commune. Il est clair que plus l'exposant $\underline{D}(\mu,x)$ est petit, plus dense est la masse de la mesure μ au point x. On a le théorème suivant.

THÉORÈME 2. *Pour une mesure positive μ on a*

$$\dim_*\mu\ge\alpha\Leftrightarrow\underline{D}(\mu,x)\ge\alpha\ \mu\text{-p.p.}, \tag{4}$$
$$\dim^*\mu\le\alpha\Leftrightarrow\underline{D}(\mu,x)\le\alpha\ \mu\text{-p.p.} \tag{5}$$

Sous une autre forme, ce théorème peut s'exprimer par les deux formules suivantes que l'on appelle les *formules de dimensions* :

$$\dim_*\mu=\sup\{\alpha\ge 0:\underline{D}(\mu,x)\ge\alpha\ \mu\text{-p.p.}\}, \tag{6}$$
$$\dim^*\mu=\inf\{\alpha\ge 0:\underline{D}(\mu,x)\le\alpha\ \mu\text{-p.p.}\}. \tag{7}$$

En général, la dimension inférieure est différente de la dimension supérieure. En réalité, l'égalité de ces deux dimensions signifie justement que la mesure est unidimensionnelle.

Que signifie l'unidimensionalité d'une mesure? Pour répondre à cette question, nous commençons par l'introduction de certaines classes de mesures. Une mesure μ est dite *α-lipschitzienne* si elle satisfait

$$\mu(B)\le C(\operatorname{diam}B)^\alpha$$

où B désigne une boule quelconque et C une constante indépendante de B. Il convient de désigner par Λ_α l'ensemble de toutes ces mesures. Soit $0<\alpha<\infty$. Une mesure μ est appelée un *α-atome* si pour tout $\varepsilon>0$ elle vérifie

$$\text{(i) } \mu\in\Lambda_{\alpha-\varepsilon}; \quad \text{(ii) } \nu\le\mu \text{ et } \nu\in\Lambda_{\alpha+\varepsilon}\Rightarrow\nu=0$$

(l'extension aux cas $\alpha=0$ et $\alpha=\infty$ est naturelle). Alors, si une mesure peut s'écrire comme la somme forte d'une suite de α-atomes, elle sera dite *α-dimensionnelle* (définition introduite par J.-P. Kahane). Une mesure est dite *unidimensionnelle* si elle est α-dimensionnelle pour un certain $\alpha \geq 0$. On a la caractérisation suivante :

THÉORÈME 3. *Le fait qu'une mesure non nulle μ soit α-dimensionnelle est équivalent à l'un des faits suivants :*

(a) $\dim_* \mu = \dim^* \mu = \alpha$;
(b) $\mu \ll H_\alpha$ *si* $\beta < \alpha$, *et* $\mu \perp H_\alpha$ *si* $\beta > \alpha$;
(c) μ *est portée par un borélien de dimension* α, *tandis que la masse de* μ *sur tout borélien de dimension strictement inférieure à* α *est nulle.*

Terminons ce paragraphe par une remarque. Une classe un peu plus large que la classe α-lipschitzienne est la classe des mesures *à peu près α-lipschitziennes*, notée Λ_α^*. Une telle mesure est caractérisée par le fait suivant : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact K tel que

$$1_K \mu \in \Lambda_\alpha, \quad \mu(K) > \mu(X) - \varepsilon.$$

Evidemment $\Lambda_\alpha \subset \Lambda_\alpha^*$. D'ailleurs, $I_\alpha^\mu < \infty$ implique $\mu \in \Lambda_\alpha^*$, et $\mu \in \Lambda_\alpha$ implique $I_{\alpha-\varepsilon}^\mu < \infty$. Alors on dit qu'une mesure est un *α-atome faible* si elle satisfait la condition (ii) dans la définition d'un α-atome et la condition suivante : $I_{\alpha-\varepsilon}^\mu < \infty$ pour tout $\varepsilon > 0$. Finalement, on voit qu'une mesure est α-dimensionnelle si et seulement si elle peut s'écrire comme une somme de α-atomes faibles.

4. Démonstration du théorème 1

LEMME 1. *Pour toute mesure μ il existe un borélien B tel que $\mu(B) = \mu(X)$ et $\dim B = \dim_{\mathrm{p}} \mu$.*

Preuve. Pour tout entier positif n, il existe un borélien B_n tel que

$$\mu(B_n) = \mu(X), \quad \dim_{\mathrm{p}} \mu \leq \dim B_n \leq \dim_{\mathrm{p}} \mu + 1/n.$$

Alors il suffit de prendre pour B l'intersection des B_n. ■

L'inégalité (3) est évidente. On montrera (1) en démontrant successivement les trois inégalités suivantes :

$$\dim_* \mu \leq \dim_{\mathrm{e}} \mu \leq \mathrm{Ind}_{\mathrm{c}} \mu \leq \dim_* \mu.$$

Soient $\alpha_1 = \dim_* \mu$, $\alpha_2 = \dim_{\mathrm{e}} \mu$ et $\alpha_3 = \mathrm{Ind}_{\mathrm{c}} \mu$. D'après la définition du spectre de dimension, on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$U_{\alpha_1-\varepsilon}^\mu(t) < \infty \quad \mu\text{-p.p.}$$

Posons

$$K_n = \{t : n \leq U_{\alpha_1-\varepsilon}^\mu(t) < n+1\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Nous pouvons écrire alors

$$\mu = \sum 1_{K_n} \mu \quad \text{avec } I_{\alpha_1}^{1_{K_n}\mu} < \infty,$$

d'où $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Observons maintenant que

$$I_\alpha^\mu < \infty \Rightarrow \mu \ll \mathrm{Cap}_\alpha.$$

En effet, s'il existe un borélien F tel que $\mathrm{Cap}_\alpha F = 0$ et $\mu(F) > 0$, alors il existe un compact $K \subset F$ tel que $\mathrm{Cap}_\alpha K = 0$ et $\mu(K) > 0$, ce qui contredit le fait que $I_\alpha^\mu < \infty$ selon la définition de capacité. Il est alors facile d'en déduire que $\alpha_2 \leq \alpha_3$. Soit enfin $\varepsilon > 0$. Prenons $F = S(\mu, \alpha_1 + \varepsilon)$, l'ensemble singulier de μ d'ordre $\alpha_1 + \varepsilon$. On sait que $\mu(F) > 0$ et $\mathrm{Cap}_{\alpha_1+\varepsilon} F = 0$. Cela entraîne que $\mu \ll \mathrm{Cap}_{\alpha_1+\varepsilon}$ est faux, d'où $\alpha_3 \leq \alpha_1$.

Prouvons (2) en montrant successivement les inégalités suivantes :

$$\dim^* \mu \leq \dim_{\mathrm{p}} \mu \leq \mathrm{Ind}_{\mathrm{s}} \mu \leq \dim^* \mu.$$

Posons $\beta_1 = \dim^* \mu$, $\beta_2 = \dim_{\mathrm{p}} \mu$ et $\beta_3 = \mathrm{Ind}_{\mathrm{s}} \mu$. D'après le lemme 1, il existe un borélien B tel que $\mu(B) = \mu(X)$ et $\dim B = \beta_2$. Pour la première inégalité, il suffit de montrer

$$\dim B \geq \beta_1 - \varepsilon \quad (\forall \varepsilon > 0). \tag{8}$$

Or, d'après la définition de β_1, si l'on prend A comme le complément de l'ensemble singulier de μ d'ordre $\beta_1 - \varepsilon$, on a

$$\mu(A) > 0, \quad U_{\beta_1-\varepsilon}^\mu(t) < \infty \quad \text{si } t \in A.$$

A fortiori,

$$\mu(B \cap A) > 0, \quad U_{\beta_1-\varepsilon}^\mu(t) < \infty \quad \text{si } t \in B \cap A.$$

On en déduit qu'il existe un positif M et un compact $K \subset B \cap A$ tels que

$$\mu(K) > 0, \quad U_{\beta_1-\varepsilon}^\mu(t) < M \quad \text{si } t \in K.$$

Cela implique $\mathrm{Cap}_{\beta_1-\varepsilon} K > 0$, d'où (8). Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un borélien F tel que $H_{\beta_3+\varepsilon}(F) = 0$ et $\mu(F) = \mu(X)$. Donc $\beta_2 \leq \dim F \leq \beta_3 + \varepsilon$, d'où la deuxième inégalité. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $F = S(\mu, \beta_1 + \varepsilon)$. On sait bien que

$$\mathrm{Cap}_{\beta_1+\varepsilon} F = 0, \quad \mu(F) = \mu(X),$$

d'où $\beta_3 \leq \beta_1 + \varepsilon$. ■

5. Démonstration du théorème 2. Remarquons que pour tout ε $(0 < \varepsilon < \alpha)$, on a

$$\{x : \underline{D}(\mu, x) \geq \alpha\} \subset \bigcup_{k=1}^\infty E_k$$

avec

$$E_k = \{x : \mu(B_r(x)) \leq r^{\alpha-\varepsilon} \text{ si } r \leq 1/k\},$$

d'où la conclusion: si $\underline{D}(\mu, x) \geq \alpha$ μ-p.p., la mesure μ peut s'écrire en somme de mesures de $(\alpha - \varepsilon)$-énergie finie. Donc $\dim_* \mu \geq \alpha$. Pour la réciproque, observons que pour tout β ($< \alpha \le \dim_* \mu$) on a

$$\int \frac{d\mu(y)}{(d(x,y))^\beta} < \infty \quad \mu\text{-p.p.},$$

d'où $\underline{D}(\mu,x) \ge \beta$ μ-p.p. On a ainsi prouvé (4).

Supposons que $\underline{D}(\mu,x) \le \alpha$ μ-p.p. On constate que $\dim^* \mu \le \alpha$, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\int \frac{d\mu(y)}{(d(x,y))^{\alpha+\varepsilon}} = \infty \quad \mu\text{-p.p.}$$

En effet, sinon, il existe un ensemble K tel que $\mu(K) > 0$ et que le potentiel de μ d'ordre $\alpha+\varepsilon$ (pour un certain $\varepsilon > 0$) soit fini sur K, d'où $\underline{D}(\mu,x) \ge \alpha+\varepsilon$ sur K. Inversement, si le fait que $\underline{D}(\mu,x) \le \alpha$ μ-p.p. n'est pas vrai, il existe un positif δ et un ensemble F tels que

$$\mu(F) > 0, \quad \dim F \le \dim^* \mu \quad \text{et} \quad \underline{D}(\mu,x) \ge \alpha + \delta \quad \text{si } x \in F.$$

D'après le théorème de Tricot on a donc $\dim F \ge \alpha + \delta$. C'est une contradiction. On a ainsi prouvé (5). ∎

Remarquons qu'ici on n'a utilisé que la partie simple du théorème de Tricot qui est valable dans tous les espaces métriques. Cette partie veut dire que si $\underline{D}(\mu,x) \ge \alpha$ sur F avec $\mu(F) > 0$ alors $\dim F \ge \alpha$. On peut dire aussi que c'est un théorème de Billingsley.

6. Démonstration du théorème 3. Introduisons l'*exposant énergétique* d'une mesure non nulle μ :

$$e(\mu) = \sup\{\alpha \ge 0 : I_\alpha^\mu < \infty\}.$$

Caractérisons d'abord les α-atomes faibles.

LEMME 2. *Une mesure μ non nulle est un α-atome faible si et seulement si*

$$\dim^* \mu = e(\mu) = \alpha.$$

Preuve. Pour la nécessité, il suffit de montrer que si μ est un α-atome faible on a

$$\alpha \le e(\mu) \quad \text{et} \quad \dim^* \mu \le \alpha.$$

Or la première inégalité est immédiate. Quant à la deuxième, il suffit que

$$U_{\alpha+\varepsilon}^\mu(t) = \infty \quad \mu\text{-p.p. } (\forall \varepsilon > 0).$$

En effet, sinon, il existe un $M > 0$ et un compact K tel que

$$\mu(K) > 0, \quad U_{\alpha+\varepsilon}^\mu(t) \le M \quad \text{si } t \in K.$$

Par conséquent, $I_{\alpha+\varepsilon}^{1_K\mu} < \infty$. Mais ceci implique que $1_K\mu$ est à peu près $(\alpha+\varepsilon)$-lipschitzienne. Il existe donc un autre compact $K_0 \subset K$ tel que

$$\mu(K_0) > \tfrac{1}{2}\mu(K), \quad 1_{K_0}\mu \in \Lambda_{\alpha+\varepsilon/2}.$$

Comme μ est un α-atome faible, les deux derniers faits ne sont pas compatibles. Prouvons maintenant la suffisance. Il est clair que $I_{\alpha-\varepsilon}^\mu < \infty$. Supposons alors qu'il existe une mesure non nulle ν telle que $\nu \le \mu$ et $\nu \in \Lambda_{\alpha+\varepsilon}$. Prenons un borélien B tel que $\mu(B) = \mu(X)$ et $\dim B = \dim^* \mu$. Il existe donc un compact $K \subset B$ tel que $\nu(K) > 0$. Par conséquent, $\dim B \ge \dim K \ge \alpha + \varepsilon$, ce qui contredit $\dim^* \mu = \alpha$. ∎

Revenons à la démonstration du théorème 3. Les propositions (a), (b) et (c) sont équivalentes d'après le théorème 1. Dans la suite, on s'engage à montrer que μ est α-dimensionnelle si et seulement si (c) a lieu.

Supposons μ α-dimensionnelle. D'après la définition de α-dimensionalité et la caractérisation d'un atome faible, on sait que $\dim_{\mathrm{p}} \mu = \alpha$. Pour le reste de la nécessité, on le démontre par l'absurde. Supposons qu'il existe un borélien B tel que $\dim B < \alpha$ mais $\mu(B) > 0$. Puisque l'on peut écrire, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu = \sum \mu_i \quad \text{avec } \mu_i \in \Lambda_{\alpha-\varepsilon},$$

il existe une mesure μ_i telle que $\mu_i(B) > 0$ et puis un compact $K \subset B$ tel que $\mu_i(K) > 0$. Par suite $\dim B \ge \dim K \ge \alpha - \varepsilon$ ($\forall \varepsilon > 0$). Ceci contredit $\dim B < \alpha$.

Supposons (c). Pour tout $n \ge 1$, effectuons la décomposition de Kahane d'ordre $\alpha - \alpha/n$:

$$\mu = 1_{A_n}\mu + 1_{B_n}\mu$$

avec

$$\mathrm{Cap}_{\alpha-\alpha/n} B_n = 0, \quad U_{\alpha-\alpha/n}^\mu(t) < \infty \quad \text{si } t \in A_n.$$

Il est clair que $\dim B_n \le \alpha - \alpha/n < \alpha$, donc $\mu(B_n) = 0$. Regardons alors $X_n = U_{\alpha-\alpha/n}^\mu$ comme une variable aléatoire définie sur l'espace de probabilité (X,μ) (on suppose que $\mu(X) = 1$ sans perte de généralité). On a vu que X_n est presque sûrement finie. Il existe donc un positif M_n suffisamment grand tel que

$$\mu(X_n \ge M_n) \le \frac{1}{n^2}.$$

D'après le lemme de Borel–Cantelli, on a ensuite

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{m=n}^\infty \{X_m < M_m\}\Big) = 1.$$

Posons maintenant

$$C_1 = \bigcap_{m=1}^{\infty} \{X_m < M_m\}, \quad C_n = \bigcap_{m=n}^{\infty} \{X_m < M_m\} \setminus C_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

La suite $\{C_n\}_{n\geq 1}$ étant une partition dénombrable de X, on peut écrire $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{C_n}\mu$ où $\mu_n = 1_{C_n}\mu$ est telle que si $m \geq n$, on ait

$$I^{\mu_n}_{\alpha-\alpha/m} = \int_X U^{\mu_n}_{\alpha-\alpha/m}\, d\mu_n \leq \int_X X_m\, d\mu_n = \int_{C_n} X_m\, d\mu \leq M_m.$$

Cela signifie que toute mesure non nulle μ_n est un α-atome faible, d'où l'α-dimensionalité de μ.

7. Quelques exemples. Calculons maintenant les dimensions de certaines mesures concrètes. On va dire même un peu plus. Rappelons que le théorème 2 ne nous donne que des informations sur le comportement de $\underline{D}(\mu, x)$ sur un ensemble qui porte la mesure μ. Que se passe-t-il hors de cet ensemble? En réalité, certaines mesures distribuent également des masses en dehors d'un ensemble portant. C'est-à-dire que $\underline{D}(\mu, x) < \infty$ pour des x n'appartenant pas à l'ensemble portant. La vérité est que l'on peut trouver des masses énormes, i.e. $\underline{D}(\mu, x) \ll \dim^* \mu$, sur un ensemble de dimension petite et des masses négligeables, i.e. $\underline{D}(\mu, x) \gg \dim^* \mu$, sur un ensemble de dimension grande. L'analyse multifractale consiste à donner une description quantitative de ce phénomène. Précisément, pour $\alpha \geq 0$ on introduit

$$F_\alpha = \{x \in X : \underline{D}(x, \mu) = \alpha\}, \qquad R_\alpha = \{x \in X : D(x, \mu) = \alpha\}.$$

On essaye d'évaluer leurs dimensions $f(\alpha) = \dim F_\alpha$ et $r(\alpha) = \dim R_\alpha$. S'il existe une infinité de α tels que $f(\alpha) > 0$ ou $r(\alpha) > 0$, on dit que μ est *multifractale*. Le mieux est de donner une formule explicite de $f(\alpha)$ ou de $r(\alpha)$. Ceci est faisable dans certains cas, les cas que l'on va discuter maintenant, par exemple.

EXEMPLE 1. *Mesures de Lebesgue homogènes sur des ensembles de Cantor*. Etant donné un intervalle $[a, b]$ et une suite $(\xi_n)_{n\geq 1}$ avec $0 < \xi_n < 1/2$, par dissection on obtient un *ensemble parfait symétrique* E dont le point représentatif peut s'écrire comme

$$\text{(S)} \qquad x = a + (b - a) \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \xi_1 \ldots \xi_{n-1}(1 - \xi_n)$$

avec $\varepsilon_n = 0$ ou 1 ([14]). La *fonction de Lebesgue* construite sur E est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ continue croissante, localement constante sur le complément de E et admettant l'expression suivante sur E :

$$L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} \quad (x \in E).$$

La fonction L représente une mesure continue μ, de support E qui est de mesure linéaire nulle si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \xi_1 \ldots \xi_n = 0,$$

qu'on appelle *la mesure de Lebesgue homogène de E*.

PROPOSITION 1. *Si $x \in E^c$ on a $\underline{D}(\mu, x) = \overline{D}(\mu, x) = \infty$. Si $x \in E$ on a*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{-n \log 2}{\log \xi_1 \ldots \xi_{n+1}} \leq \underline{D}(\mu, x) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{-n \log 2}{\log \xi_1 \ldots \xi_n},$$
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{-n \log 2}{\log \xi_1 \ldots \xi_{n+1}} \leq \overline{D}(\mu, x) \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{-n \log 2}{\log \xi_1 \ldots \xi_n}.$$

Preuve. Le premier fait est évident. On a même $\mu(B_r(x)) = 0$ pour r assez petit si $x \in E^c$ car L est localement constante sur E^c. Maintenant soit $x \in E$ et r tel que

$$\xi_1 \ldots \xi_{n+1} \leq r < \xi_1 \ldots \xi_n.$$

Il est clair que $B_r(x)$ contient au mois un intervalle d'ordre $n+1$ et est contenu dans une réunion de, au plus, trois intervalles d'ordre n. Par conséquent,

$$2^{-(n+1)} \leq \mu(B_r(x)) \leq 3 \cdot 2^{-n},$$

d'où le résultat. ■

En particulier, on a

$$\dim \mu = \liminf_{n\to\infty} \frac{-n \log 2}{\log \xi_1 \ldots \xi_n}$$

à condition que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \xi_n}{\log \xi_1 \ldots \xi_n} = 0.$$

Considérons $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ comme une suite de variables indépendantes définie sur $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Alors μ peut être considérée comme la fonction de répartition de la somme (S). Ceci donne aussi un sens à μ pour toute suite $(\xi_n)_{n\geq 1}$ avec $0 < \xi_n < 1$. En réalité, c'est une convolution infinie de Bernoulli ([13]). On sait que μ est soit absolument continue soit singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. On signale que le calcul de dimension μ lors de $\xi_n > 1/2$ est un problème délicat et qu'on ne sait même pas sous quelle condition exacte la mesure μ est singulière.

EXEMPLE 2. *Mesures de Gibbs sur $\{0, 1, 2, \ldots, c-1\}^{\mathbb{N}}$*. Soit $c \geq 2$ un entier. Considérons l'espace $G_c = \{0, 1, 2, \ldots, c-1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la métrique

$d(t,s)=c^{-n}$ $(t,s\in G_c)$ où $n=\inf\{j\geq 0: t_j\neq s_j\}$, et le shift $T:G_c\to G_c$ défini par $(Tt)_n=t_{n+1}$. Une boule de rayon c^{-n} sera appelée un *n-cylindre* et le n-cylindre contenant t ($\in G_c$) sera notée par $c_n(t)$.

Soit φ une fonction continue définie sur G_c. On considère les sommes partielles

$$S_n\varphi(t)=\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(T^it)\qquad(n\geq 1).$$

S'il existe, pour ces sommes, une mesure T-invariante ν_φ et deux constantes $P(\varphi)$ et ζ_φ telles qu'on ait

$$\zeta_\varphi^{-1}<\frac{\nu_\varphi(c_n(t))}{\exp\{-nP(\varphi)+S_n\varphi(t)\}}<\zeta_\varphi\qquad(\forall t\in G,\ \forall n\geq 1),$$

on dit que ν_φ est une *mesure de Gibbs* associée à φ et que $P(\varphi)$ est la *pression* de φ. L'existence et l'unicité de la mesure de Gibbs associée à φ sont assurées par le fait que φ est höldérienne; toute mesure de Gibbs est ergodique; l'entropie topologique du shift T, $h(T)=P(0)=\log c$, est finie; la pression de φ ne dépend pas de ν_φ ni même de l'existence de ν_φ, et elle peut se définir indépendamment par

$$P(\varphi)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\Big(\sum_{C\ n\text{-cylindre}}\exp\inf_{t\in C}S_n\varphi(t)\Big).$$

Nous référons aux [4, 17] pour ces rappels et d'autres informations sur les mesures de Gibbs, la pression et l'entropie.

Il est clair que la mesure de Gibbs donne un encadrement de la moyenne $A_n\varphi(x)$ définie par $n^{-1}S_n\varphi(x)$ à l'aide de la pression et inversement. Supposons que φ soit höldérienne. On a tout de suite l'expression suivante :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\nu_\varphi(c_n(t))}{\log|c_n(t)|}=\frac{1}{\log c}(P(\varphi)-\lim_{n\to\infty}A_n\varphi(t))\qquad(\forall t)\tag{9}$$

où $|c_n(t)|$ désigne le rayon de $c_n(t)$, i.e. c^{-n}. L'égalité précédente vaut si l'une des deux limites existe. D'après l'ergodicité de ν_φ et les formules de dimensions, on obtient immédiatement

$$\dim\nu_\varphi=\frac{1}{\log c}\Big(P(\varphi)-\int_{G_c}\varphi(t)\,d\nu_\varphi(t)\Big).\tag{10}$$

S'il existe une constante $C\in\mathbb{R}$ et une fonction continue $u:G_c\to\mathbb{R}$ telles que $\varphi-C=u-u\circ T$, on dit que φ est *homologue* à la constante C. Supposons que φ n'est pas homologue à une constante. Envisageons alors la famille des mesures de Gibbs $\nu_{p\varphi}$ ($p\in\mathbb{R}$). Chacune d'elles étant ergodique, on a donc

$$\lim_{n\to\infty}A_n\varphi(t)=\Psi(p)\quad\nu_{p\varphi}\text{-p.p. avec}\quad\Psi(p)=\int\varphi\,d\nu_{p\varphi}.$$

Désignons par $P(p)$ la pression de $p\varphi$, i.e. $P(p)=P(p\varphi)$. En ce qui concerne les propriétés des fonctions $P(p)$ et $\Psi(p)$ et leur relation, les faits suivants sont bien connus ([3, 15]): (1) $P(p)$ est analytique et strictement convexe; (2) $\Psi(p)$ est inversible et bi-analytique; (3) $\Psi(p)=dP(p)/dp$.

PROPOSITION 2. *Soit ν_φ la mesure de Gibbs d'une fonction höldérienne φ définie sur G_c.*

(a) *ν_φ est unidimensionnelle et*

$$\dim\nu_\varphi=\frac{P(1)-\Psi(1)}{\log c}.$$

(b) *Si φ n'est pas homologue à une constante, quel que soit $q\in\operatorname{Im}(P(1)-\Psi(p))$ on a*

$$\dim\Big\{t:D(\nu_\varphi,t)=\frac{q}{\log c}\Big\}=\frac{P(p)-p\Psi(p)}{\log c}$$

où p est l'unique solution de l'équation $\Psi(p)=P(1)-q$.

(c) *Si φ est homologue à une constante, ν_φ n'est pas multifractale.*

Preuve. (a) est déjà démontré; (c) est évident car $D(\nu_\varphi,t)\equiv\text{Const.}$ Pour (b), définissons

$$E_q=\{t\in G_c:D(\nu_\varphi,t)=q/\log c\},$$
$$E_{p,q}=\{t\in G_c:D(\nu_{p\varphi},t)=a(p,q)/\log c\},$$

où $a(p,q)$ est à déterminer. D'après (9), on a

$$E_q=\{t\in G_c:\lim_{n\to\infty}A_n\varphi=P(1)-q\},$$
$$E_{p,q}=\{t\in G_c:p\lim_{n\to\infty}A_n\varphi=P(p)-a(p,q)\}.$$

Prenons alors $a(p,q)=P(p)-p(P(1)-q)$. Supposons $p\neq 0$. D'après le choix de $a(p,q)$, on a $E_p=E_{p,q}$. Si on choisit ensuite p et q de sorte que $P(1)-q=\Psi(p)$, on aura $\nu_{p\varphi}(E_{p,q})=1$. Selon le théorème de Billingsley ([2]),

$$\dim E_q=\dim E_{p,q}=\frac{a(p,q)}{\log c}=\frac{P(p)-p\varphi(p)}{\log c}.$$

Supposons $p=0$. Soit $q=P(1)-\Psi(0)$. On a

$$E_q=\{t:\lim_{n\to\infty}n^{-1}S_n\varphi(t)=\Psi(0)\},\qquad\nu_0(E_q)=1.$$

D'après (10), on a enfin

$$1\geq\dim(E_{P(1)-\Psi(0)})\geq\dim\nu_0=\frac{P(0)}{\log c}=1.\ \blacksquare$$

EXEMPLE 3. *Mesures de Markov.* Soient $M=(p_{ij})$ une matrice stochastique d'ordre c ($c\geq 2$ un entier), $p=(p_j)$ une ligne de probabilité telle que

$pM = p$. Il existe une probabilité μ sur $G_c = \{0, 1, \ldots, c-1\}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\mu(c(j_1, j_2, \ldots, j_n)) = p_{j_1} p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_{n-1} j_n}$$

où $c(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ désigne le cylindre constitué des suites de G_c dont les n premières coordonnées sont $j_1, j_2, \ldots, j_n$. Cette mesure μ s'appelle *mesure de Markov.*

Nous définissons une variable comme ci-dessous :

$$f(t) = p_{j_1 j_2} \quad \text{si } t = (j_1, j_2, \ldots, j_n, \ldots).$$

Moyennant cette variable, nous pouvons exprimer la masse concentrée sur un cylindre de la mesure μ de la façon suivante :

$$\log \mu(I_n(t)) = \log p_{t_1} + \sum_{k=0}^{n-2} \log f(T^k(t)).$$

Par conséquent,

$$D(\mu, t) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log \mu(c_n(t))}{\log |c_n(t)|} = \frac{1}{\log c} \lim_{n\to\infty} A_n g(t) \tag{11}$$

où $g(t) = -\log f(t)$. Si tout élément de M est strictement positif, la fonction $g(t)$ est finie. Comme g ne dépend que de t_1 et t_2, elle est höldérienne. Nous désignerons par $\nu_{\alpha g}$ la mesure de Gibbs associée à αg, par $P(\alpha)$ la pression de αg, et par $\Psi(\alpha)$ la moyenne $\int g \, d\nu_{\alpha g}$.

PROPOSITION 3. *Soit μ la mesure de Markov définie sur G_c par la probabilité de départ $p = (p_1, \ldots, p_c)$ et la matrice de transition $M = (p_{ij})$.*

(a) *Si M est irréductible, on a*

$$\dim \mu = -\frac{1}{\log c} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{c} p_i p_{ij} \log p_{ij}.$$

(b) *Si M est strictement positive, on a, pour $\beta = \Psi(\alpha)$,*

$$\dim \left\{ t : D(\mu, t) = \frac{\beta}{\log c} \right\} = \frac{P(\alpha) - \alpha \Psi(\alpha)}{\log c}.$$

Preuve. (a) est une conséquence directe de (11) et de l'ergodicité. Soit α fixé et $\beta = \Psi(\alpha)$. Considérons

$$E_\beta = \{t : D(\mu, t) = \beta / \log c\} = \{t : \lim_{n\to\infty} A_n g(t) = \beta\},$$

$$F_\beta = \left\{ t : D(\nu_{\alpha g}, t) = \frac{P(\alpha) - \alpha\beta}{\log c} \right\} = \{t : \alpha \lim_{n\to\infty} A_n g(t) = \alpha\beta\}.$$

Si $\alpha \neq 0$, on a $E_\beta = F_\beta$ et $\nu_{\alpha\varphi}(E_\beta) = 1$. Donc $\dim E_\beta = (P(\alpha) - \alpha\beta)/\log c$. Si $\alpha = 0$, $\beta = \Psi(0)$. On a $\nu_0(E_{\Psi(0)}) = 1$. Donc $\dim E_{\Psi(0)} = P(0)/\log c$. ■

Soit M_α la matrice définie par $(M_\alpha)_{ij} = p_{ij}^{-\alpha}$. Soit $\varrho(\alpha)$ le rayon spectrale de M_α. Il est facile de calculer la pression et sa dérivée :

$$P(\alpha) = \log \varrho(\alpha), \qquad \Psi(\alpha) = \frac{1}{\varrho(\alpha)} \frac{d}{d\alpha} \varrho(\alpha).$$

Donc les propriétés multifractales d'une mesure de Markov sont bien déterminées par les rayons spectraux $\varrho(\alpha)$. Par exemple, pour la mesure de Bernoulli définie par $p = (p_1, \ldots, p_c)$ ($p_j > 0$, $\sum p_j = 1$) on a

$$\varrho(P_\alpha) = \sum_{j=1}^{c} p_j^{-\alpha}.$$

Par conséquent, on peut vérifier directement que la fonction croissante

$$\Psi(p) : \mathbb{R} \to]-\log \max\{p_j\}, -\log \min\{p_j\}[$$

est bijective. Donc, si μ est différente de la mesure de Haar, elle est multifractale.

EXEMPLE 4. *Produits de Riesz.* Considérons le produit de Riesz défini sur $\mathbb{T}$ basé sur la suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$:

$$\mu_r = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \operatorname{Re} r e^{ic^n t}) \qquad (c \geq 3, \ |r| \leq 1).$$

Dans [7], on a démontré que pour tout r ($|r| < 1$), μ_r est unidimensionnelle et multifractale. Sa dimension est

$$\dim \mu_r = 1 - \frac{1}{\log c} \int \log(1 + r \cos 2\pi x) \, d\mu_r(x).$$

Avec les mesures de Gibbs, on peut donner plus d'information sur la multifractalité de μ_r. Pour ce faire, définissons l'application $\xi : G_c \to [0, 1]$ par

$$\xi(t_0, t_1, t_2, \ldots) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t_j}{c^{j+1}}.$$

Il est clair que ξ est höldérienne. Soit

$$G_c^* = \{t = (t_j) \in G_c : \forall N \geq 0, \ \exists n \geq N \text{ tel que } t_n \neq c\}.$$

La restriction $\xi : G_c^* \to [0, 1[$ est maintenant une application non seulement höldérienne mais aussi bijective, et même, si $[0, 1[$ est muni de la métrique c-adique, ξ est bilipschitzien et elle préserve alors la dimension au sens que $\dim E = \dim F$ si $\xi(E) = F$. Quel que soit $x \in [0, 1[$, il existe un unique élément t de G_c^* tel que $\xi(t) = x$. On a alors

$$c^n x = \xi(T^n t) \pmod 1.$$

Posons $g(t) = \log(1 + r\cos 2\pi\xi(t))$ $(t \in G_c)$. Alors $g(t)$ est höldérienne. Comme avant on peut définir $P(\alpha)$ et $\Psi(\alpha)$. Remarquons que ([7])

$$D(\mu_r, x) = 1 - \frac{1}{\log c} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log(1 + r\cos 2\pi c^k x).$$

Posons

$$E_\beta = \{x \in [0,1[\,: D(\mu_r, x) = \beta\},$$
$$F_\beta = \{t \in G_c^* : \lim_{n\to\infty} A_n g(t) = (1-\beta)\log c\}.$$

On peut identifier E_β et F_β par ξ, à savoir $\xi(F_\beta) = E_\beta$. Comme $\dim E_\beta = \dim F_\beta$, il suffit d'évaluer $\dim F_\beta$. Soit α tel que $(1-\beta)\log c = \Psi(\alpha)$. On a $\nu_{\alpha g}(F_\beta) = 1$. Or, d'après la définition de la mesure de Gibbs, si $\alpha \neq 0$ on a

$$F_\beta = \left\{ t \in G_c^* : D(\nu_{\beta_g}, t) = \frac{P(\alpha)}{\log c} - \alpha(1-\beta) \right\}.$$

Selon le théorème de Billingsley,

$$\dim F_\beta = \frac{P(\alpha)}{\log c} - \alpha(1-\beta).$$

Supposons $\alpha = 0$; donc $\beta = 1 - \Psi(0)/\log c = 1$. Alors

$$F_\beta = \{t : \lim_{n\to\infty} A_n g(t) = \Psi(0)\}.$$

Donc $\dim F_\beta \ge \dim \nu_0 = P(0)/\log c = 1$. Ainsi on a démontré

PROPOSITION 4. *Soit μ_r le produit de Riesz défini ci-dessus.*

(a) *μ_r est unidimensionnelle et*

$$\dim \mu_r = 1 - \frac{1}{\log c} \int \log(1 + r\cos 2\pi x)\, d\mu_r(x).$$

(b) *Soit β l'unique solution de $(1-\beta)\log c = \Psi(\alpha)$. On a*

$$\dim\{t : D(\mu_r, t) = \beta\} = \frac{P(\alpha) - \alpha\Psi(\alpha)}{\log c}.$$

Références

[1] P. Assouad, *Plongements Lipschitziens dans $\mathbb{R}^n$*, Bull. Soc. Math. France 111 (1983), 429–448.

[2] P. Billingsley, *Ergodic Theory and Information*, Wiley, 1965.

[3] R. Bohr and D. Rand, *The entropy function for characteristic exponents*, Phys. D 25 (1987), 387–398.

[4] R. Bowen, *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, Lecture Notes in Math. 470, Springer, 1975.

[5] R. Coifman et G. Weiss, *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*, Lecture Notes in Math. 242, Springer, 1971.

[6] A. H. Fan, *Décomposition de mesures et recouvrements aléatoires*, Publ. d'Orsay, 1989-03.

[7] —, *Quelques propriétés des produits de Riesz*, Bull. Sci. Math. 117 (1993), 421–439.

[8] J.-P. Kahane, *Some Random Series of Functions*, 1st ed., Heath, 1968, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 1985.

[9] —, *Intervalles aléatoires et décompositions des mesures*, C. R. Acad. Sci. Paris 304 (1987), 551–554.

[10] —, *Random multiplications, random coverings, and multiplicative chaos*, in: Analysis at Urbana 1, Proc. Special Year in Modern Analysis, E. Berkson, N. T. Peck and J. Uhl (eds.), London Math. Soc. Lecture Note Ser. 137, Cambridge Univ. Press, 1989, 196–255.

[11] —, *Désintégration des mesures selon la dimension*, C. R. Acad. Sci. Paris 306 (1989), 107–110.

[12] J.-P. Kahane et Y. Katznelson, *Décomposition des mesures selon la dimension*, Colloq. Math. 58 (1990), 269–279.

[13] J.-P. Kahane et R. Salem, *Sur la convolution d'une infinité de distributions de Bernoulli*, ibid. 6 (1958), 193–202.

[14] —, —, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Hermann, Paris, 1963.

[15] D. Ruelle, *Thermodynamic Formalism: the Mathematical Structures of Classical Equilibrium Statistical Mechanics*, Encyclopedia Math. Appl. 5, Addison-Wesley, 1978.

[16] C. Tricot, *Two definitions of fractional dimension*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 91 (1982), 57–74.

[17] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Graduate Texts in Math. 79, Springer, 1982.

MATHÉMATIQUES (BÂT. I)
UNIVERSITÉ DE CERGY-PONTOISE
8, LE CAMPUS
95033 CERGY-PONTOISE, FRANCE

Received July 16, 1992 (2974)
Revised version February 16, 1993