## Sur l'unicité des solutions des quelques équations différentielles dans les espaces abstraits (II)

par

S. DROBOT et J. G.-MIKUSIŃSKI (Wrocław).

Nous nous proposons de généraliser aux équations d'ordre arbitraire un théorème établi par l'un de nous dans un travail antérieur [1]) et qui porte sur l'unicité des solutions pour certaines équations differentielles du premier et du second ordre, considerées dans les espaces abstraits. Les applications de ce théorème aux équations partielles classiques constitueront l'objet d'un travail ultérieur, qui est en préparation.

Soit

(1) $$a_n x^{(n)}(\lambda)+\ldots+a_0 x(\lambda)=c(\lambda)$$

une équation différentielle, où $a_n,\ldots,a_0$ $(a_n\neq 0)$ sont des éléments d'un anneau algébrique $A$, commutatif et sans diviseurs de zéro, $x(\lambda)$ et $c(\lambda)$ étant des fonctions qui font correspondre des éléments de $A$ aux $\lambda$ réels d'un intervalle ouvert donné $(\alpha,\beta)$.

La dérivée est supposée satisfaisant aux postulats:

1⁰ $[x_1(\lambda)+x_2(\lambda)]'=x_1'(\lambda)+x_2'(\lambda)$,
$[x_1(\lambda)\cdot x_2(\lambda)]'=x_1'(\lambda)\cdot x_2(\lambda)+x_1(\lambda)\cdot x_2'(\lambda)$;

2⁰ $[x(\mu-\lambda)]'=-x'(\mu-\lambda)$ pour $\mu$ constant;

3⁰ $x(\lambda)=\text{const.}$ entraîne $x'(\lambda)=0$ et réciproquement.

Cela posé, on a le théorème suivant:

[1]) J. G.-Mikusiński, *Sur l'unicité des solutions de quelques équations différentielles dans les espaces abstraits*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 22 (1949), p. 157-160.



*Il existe au plus une solution $x(\lambda)$ de (1), satisfaisant aux conditions initiales*

$$x(\lambda_0)=k_0,\qquad \ldots,\qquad x^{(n-1)}(\lambda_0)=k_{n-1},$$

*où $k_0,\ldots,k_{n-1}$ sont des éléments donnés de $A$ et $\lambda_0$ est un point de $(\alpha,\beta)$.*

Il suffit de montrer que, si $k_0=\ldots=k_{n-1}=0$ et $c(\lambda)=0$ dans l'intervalle fermé $[\alpha,\beta]$, on a $x(\lambda)=0$ dans $(\alpha,\beta)$.

C'est vrai pour $n=1$ [2]). Nous allons le déduire pour $n$ quelconque en l'admettant pour $n-1$.

Le cas $a_{n-1}=\ldots=a_0=0$ est trivial.

Soit $m\leqslant n-1$ le plus grand indice pour lequel $a_m\neq 0$. Posons

$$y(\lambda)=\sum_{i=0}^{m}a_i\sum_{j=i}^{n-1}x^{(j)}(\lambda)\cdot x^{(n-1-i+j)}(\mu-\lambda),$$

où $\mu$ est un nombre tel que $\mu-\lambda_0$ appartient à $(\alpha,\beta)$.

Un simple calcul montre que l'on a, en vertu de (1), $a_n y'(\lambda)=0$ pour $\lambda$ et $\mu-\lambda$ appartenant à $(\alpha,\beta)$. La fonction $y(\lambda)$ se réduit donc à une constante; comme $y(\lambda_0)=0$, on a $y(\lambda)=0$ dans la partie commune des intervalles $(\alpha,\beta)$ et $(\mu-\beta,\mu-\alpha)$. On peut donc écrire, en remplaçant $\mu-\lambda$ par $\varkappa$,

(2) $$[a_m x^{(m)}(\varkappa)+\ldots+a_0 x(\varkappa)]x^{(n-1)}(\lambda)+\sum_{i=0}^{m}a_i\sum_{j=i}^{n-2}x^{(n-1-i+j)}(\varkappa)\cdot x^{(j)}(\lambda)=0,$$

cette égalité étant évidemment vraie pour tout $\varkappa$ fixé arbitrairement dans $(\alpha,\beta)$ et pour $\lambda$ appartenant à la partie commune des intervalles $(\alpha,\beta)$ et $(\alpha+\lambda_0-\varkappa,\beta+\lambda_0-\varkappa)$.

Soit $\lambda'$ un point arbitraire de $(\alpha,\beta)$; nous allons montrer que $x(\lambda')=0$. Considérons deux cas:

1⁰ Il existe, dans tout entourage de $\lambda_0$, un $\varkappa\neq\lambda_0$ tel que

$$a_m x^{(m)}(\varkappa)+\ldots+a_0 x(\varkappa)\neq 0.$$

Choisissons alors la valeur de $\varkappa$ de manière à avoir en outre

$$|\varkappa-\lambda_0|\leqslant \min(\lambda'-\alpha,\beta-\lambda').$$

Par suite, l'équation (2) est satisfaite dans un intervalle $I$ conte-

[2]) Cf. J. G.-Mikusiński, *Sur les fondements du calcul opératoire*, ce volume, p. 41-70 (§ 24).

nant les deux points $\lambda_0$ et $\lambda'$. Cette équation étant d'ordre $n-1$, on a, par l'hypothèse admise, $x(\lambda)=0$ pour $\lambda \epsilon I$ et en particulier $x(\lambda')=0$.

2° On a dans un entourage de $\lambda_0$

$$a_m x^{(m)}(\varkappa)+\ldots+a_0 x(\varkappa)=0. \tag{3}$$

Soit alors $(\alpha', \beta')$ le plus grand des tels entourages. Comme l'ordre de (3) est $m \leqslant n-1$, on a identiquement $x(\varkappa)=0$ dans $(\alpha', \beta')$. Lorsque $\lambda'$ est en dehors de $(\alpha', \beta')$, on peut fixer $\varkappa$ et $\lambda_1$ de manière que

$$\lambda_1 \epsilon (\alpha', \beta'), \qquad |\varkappa-\lambda_1| \leqslant \min(\lambda'-\alpha, \beta-\lambda')$$

et

$$a_m x^{(m)}(\varkappa)+\ldots+a_0 x(\varkappa) \neq 0,$$

ce qui réduit le raisonnement au cas précédent.

*(Reçu par la Rédaction le 17. 5. 1949).*



# Sur les fondements du calcul opératoire

par

JAN G.-MIKUSIŃSKI (Wrocław).

## Introduction.

On connaît les méthodes suivantes d'introduire le calcul opératoire:

1° algébrique,
2° expérimentale,
3° de transformations intégrales,
4° d'espaces abstraits.

La méthode algébrique, employée déjà par LAGRANGE [1]), peut être caractérisée aisément en termes de l'algèbre abstraite. On parvient, par l'adjonction de l'opérateur différentiel $s$ au corps des nombres complexes, à un *corps des opérateurs* qui sont ensuite appliqués aux éléments d'un anneau $C$ de fonctions, où l'addition garde son sens habituel et la multiplication est définie par le produit de composition.

Le défaut principal de cette méthode est l'impossibilité d'introduire les opérateurs de type $e^{-s\lambda}$ et $e^{-\sqrt{s\lambda}}$ qui sont indispensables pour des applications aux équations aux dérivées partielles.

La méthode expérimentale (de HAEVISIDE) [2]) traite les calculs avec les opérateurs comme ceux avec les nombres ou les fonctions: on écrit par exemple

$$e^{-s\lambda}=1-\frac{s\lambda}{1!}+\frac{s^2\lambda^2}{2!}-\ldots$$

[1]) Voir K. T. Vahlen [24]. Les numéros entre crochets indiquent les publications dont la liste se trouve à la fin de ce mémoire (p. 69-70).

[2]) O. Heaviside [13].