References.

[1] A. Alexiewicz, *On Denjoy Integrals of Abstract Functions* (to appear in Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie).

[2] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Warszawa 1932.

[3] S. Bochner, *Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind*, Fundamenta Mathematicae 20 (1933), p. 262-276.

[4] I. Gelfand, *Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren*, Matiematiczeskiï Sbornik 4 (46) (1938), p. 235-286.

[5] B. J. Pettis, *A Note on Regular Banach Spaces*, Bulletin of the American Mathematical Society 44 (1938), p. 420-428.

[6] — *On Integration in Vector Spaces*, Transactions of the American Mathematical Society 44 (1938), p. 277-304.

[7] — *Differentiation in Banach Spaces*, Duke Mathematical Journal 5 (1939), p. 254-269.

[8] S. Saks, *Theory of the Integral*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Lwów 1937.

(Reçu par la Rédaction le 21. 12. 1948).

Remarque au travail „Sur les bases statistiques"

par

S. HARTMAN (Wrocław).

Les termes et les notations employés dans la suite sont les mêmes que dans mon travail précédent [1]. Parmi les résultats de ce travail se trouve une estimation de la valeur de $L(F,\eta)$ pour un système F de deux fonctions continues périodiques $f_1(x)$ et $f_2(x)$ à périodes incommensurables, ce symbole désignant un nombre positif tel que tout intervalle de longueur $L(F,\eta)$ contient au moins une η-presque-période commune de $f_1(x)$ et $f_2(x)$. L'estimation en question fait l'objet du théorème II.

Le but de cette remarque est d'en donner une démonstration plus simple et qui permet même d'en améliorer la thèse [2]. En conséquence, la thèse du théorème III, qui donne une estimation de $L(F,\eta)$ pour un cas spécial et dont la démonstration est basée sur le théorème II, est susceptible d'une amélioration analogue.

Montrons d'abord un lemme concernant la répartition mod 1 de la suite $\{n\vartheta\}$, où ϑ est un nombre irrationnel fixé.

Lemme. *Soit I un sous-intervalle de longueur β de l'intervalle demi-ouvert $\langle 0,1)$. Soient q un nombre naturel et p un entier, tels que $|q\vartheta-p|<\beta$. Soit enfin $\{Q_i\}$ la suite croissante de tous les entiers non-négatifs tels que $R(\vartheta Q_i)\in I$. Alors*

$$|Q_{i+1}-Q_i|\leqslant \mathrm{E}\left(\frac{1}{|q\vartheta-p|}+1\right)q \qquad (i=1,2,\ldots). \tag{1}$$

Démonstration. La distance entre les points $R(kq\vartheta)$ et $R((k+1)q\vartheta)$ $(k=0,1,2,\ldots)$, prise le long du plus petit arc de la circonférence C de périmètre 1, est égale à $\min[R(q\vartheta),\ 1-R(q\vartheta)]$;

[1]) Voir Studia Mathematica 10 (1948), p. 120-139.

[2]) L'idée de cette simplification m'a été suggérée par K. Florek.

elle est donc inférieure à β. Étant donné un entier $s \geqslant 0$ quelconque, soit Σ le système composé de points $R(kq\vartheta)$ où

$$k = s, s+1, \ldots, s+\mathrm{E}\left(\frac{1}{|q\vartheta - p|}\right).$$

Pour tout point p de C le système Σ contient donc un point dont la distance de p est inférieure à $\beta/2$. Il en résulte que parmi les points de Σ l'un au moins appartient à l'intervalle I. Autrement dit, il existe parmi les entiers successifs

$$sq, sq+1, \ldots, sq+\mathrm{E}\left(\frac{1}{|q\vartheta - p|}\right)q$$

un nombre figurant dans la suite $\{Q_i\}$ et qui est de la forme kq. La formule (1) s'en déduit aussitôt.

Soient à présent π_1 et π_2 les périodes de $f_1(x)$ et de $f_2(x)$ respectivement. Étant donné un nombre $\eta > 0$, soit δ le module de continuité de $f_2(x)$ relatif à η. Posons $\beta = \delta/\pi_2$ et admettons que $\beta < 1$. Si deux entiers, $q \geqslant 0$ et p, satisfont à l'inégalité

$$|q\frac{\pi_1}{\pi_2} - p| < \beta, \tag{2}$$

le nombre $q\pi_1$ est évidemment une η-presque-période commune de $f_1(x)$ et $f_2(x)$.

L'inégalité (2) est satisfaite en particulier lorsque

$$R\left(q\frac{\pi_1}{\pi_2}\right) < \beta \quad \text{et} \quad p = \mathrm{E}\left(q\frac{\pi_1}{\pi_2}\right). \tag{3}$$

Soit $\{p_i/q_i\}$ la suite des réduites du développement de π_1/π_2 en fraction continue. Considérons un $q_{i_0} > 1/\beta$. L'inégalité (2) subsiste pour $q = q_{i_0}$ et $p = p_{i_0}$. Le lemme nous montre donc que dans la suite des entiers non négatifs satisfaisant à (3) la différence entre les éléments voisins ne dépasse pas $\mathrm{E}\left(\frac{\pi_2}{r}+1\right)q_{i_0}$, où r désigne soit $R(q_{i_0}\pi_1/\pi_2)\pi_2$, soit $[1 - R(q_{i_0}\pi_1/\pi_2)]\pi_2$, suivant que l'indice i_0 est pair ou impair. Il en résulte que tout intervalle de longueur $\mathrm{E}\left(\frac{\pi_2}{r}+1\right)q_{i_0}\pi_1$ contient une η-presque-période commune de $f_1(x)$ et $f_2(x)$.

Par conséquent

$$L(F, \eta) < \frac{2q_{i_0}}{r}\pi_1\pi_2. \tag{4}$$

On peut donc remplacer dans l'énoncé du théorème II la formule

$$L(F, \eta) \leqslant \frac{2q_{i_0}+1}{r}\pi_1\pi_2 \tag{18}$$

par la formule (4) et, dans l'énoncé du théorème III, la formule

$$L(F, \eta) \leqslant (M+2)\pi_1\pi_2 \min\left\{\frac{1}{\delta_1(\eta)}\left[2\frac{\pi_1}{\delta_1(\eta)}+1\right], \frac{1}{\delta_2(\eta)}\left[2\frac{\pi_2}{\delta_2(\eta)}+1\right]\right\} \tag{23}$$

par la formule

$$L(F, \eta) < (M+2)\pi_1\pi_2 \min\left\{\frac{2\pi_1}{[\delta_1(\eta)]^2}, \frac{2\pi_2}{[\delta_2(\eta)]^2}\right\}. \tag{5}$$

Les estimations (4) et (5) sont donc plus précises que (18) et (23); aussi la méthode employée ci-dessus est beaucoup plus simple que celle de mon travail précité et elle n'a pas recours au théorème de Hecke-Ostrowski. Néanmoins, le problème de la généralisation de ce théorème n'est pas pour cela dépourvu d'intérêt, car elle pourrait contribuer à l'estimation de $L(F, \eta)$ dans le cas du système F composé de plus que deux fonctions périodiques, c'est-à-dire dans celui où l'on ne voit aucune méthode plus simple.

(Reçu par la Rédaction le 22. 12. 1949).