STUDIA MATHEMATICA 108 (2) (1994)

Ondelettes et poids de Muckenhoupt

par

PIERRE GILLES LEMARIÉ-RIEUSSET (Orsay)

Abstract. We study, for a basis of Hölderian compactly supported wavelets, the boundedness and convergence of the associated projectors P_j on the space $L^p(d\mu)$ for some p in $]1,\infty[$ and some nonnegative Borel measure μ on $\mathbb{R}$. We show that the convergence properties are related to the A_p criterion of Muckenhoupt.

Introduction. Les bases d'ondelettes sont des bases orthonormées de $L^2(\mathbb{R}, dx)$ mais elles sont également des bases inconditionnelles de nombreux espaces fonctionnels. Nous nous proposons d'étudier dans cet article les propriétés des bases d'ondelettes dans les espaces $L^p(d\mu)$.

Nous considérons une base d'ondelettes höldériennes à support compact telles qu'en a construites I. Daubechies. En particulier, le projecteur orthogonal P_j de $L^2(\mathbb{R}, dx)$ sur l'espace V_j de l'analyse multi-résolution sous-jacente vérifie que si f est continue à support compact alors $P_j f$ est encore continue à support compact; de plus, lorsque j tend vers ∞, $P_j f$ converge uniformément vers f et reste, pour $j \geq 0$, à support dans un compact fixe, de sorte que, pour toute mesure borélienne positive μ sur $\mathbb{R}$ et tout $p \in [1,\infty[$ on a, pour f continue à support compact, $\lim_{j\to\infty} \int |P_j f - f|^p \, d\mu = 0$.

Le but de cet article est de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. (a) *Soit* $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *une analyse multi-résolution d'I. Daubechies* (*à ondelettes höldériennes à support compact*), μ *une mesure borélienne positive sur* $\mathbb{R}$ *et* $p \in]1,\infty[$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes* :

(A1) *les* P_j *sont continus sur* $L^p(d\mu)$ *et on a, pour tout* $f \in L^p(d\mu)$,

$$\lim_{j\to\infty} \|f - P_j f\|_{L^p(d\mu)} = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{j\to-\infty} \|P_j f\|_{L^p(d\mu)} = 0\,;$$

(A2) $d\mu = v(x)dx$ *où* v *appartient à la classe* A_p *de Muckenhoupt*;

(A3) *les ondelettes* $(\psi_{j,k})$ $(j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z})$ *forment une base inconditionnelle de* $L^p(d\mu)$.

1991 *Mathematics Subject Classification*: 42C15, 42B20.
Key words and phrases: singular integrals, wavelets, weighted Lebesgue spaces.

(b) *Pour* $p=1$, *les assertions suivantes sont équivalentes* :

(B1) *les opérateurs* P_j, $j\in\mathbb{Z}$, *sont équicontinus sur* $L^1(d\mu)$;

(B2) $d\mu=v(x)dx$ *où* v *appartient à la classe* A_1 *de Muckenhoupt.*

Rappelons la définition des *classes* A_p *de Muckenhoupt*. Un poids $v(x)$ sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire une fonction localement intégrable pour la mesure de Lebesgue et positive) appartient à la classe A_p de Muckenhoupt ($1\le p<\infty$) s'il existe une constante $C\ge 1$ telle que pour tout intervalle I (de longueur $|I|$) on ait

$$\frac{1}{|I|}\Big(\int_I v\,dx\Big)^{1/p}\Big(\int_I v^{-1/(p-1)}\,dx\Big)^{(p-1)/p}\le C\qquad \text{si } p>1\,, \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{|I|}\int_I v\,dx\le C\operatorname*{ess\,inf}_{x\in I} v(x)\qquad \text{si } p=1\,. \tag{1.2}$$

Notation. Pour μ mesure borélienne positive sur $\mathbb{R}$, $p\in[1,\infty[$ et f borélienne bornée à support compact on notera

$$|||f|||_{p,\mu}=\Big(\int |f|^p\,d\mu\Big)^{1/p},$$

$$|||f|||_{p,\mu,*}=\sup\Big\{\Big|\int fg\,dx\Big| : g \text{ continue à support compact, } |||g|||_{p,\mu}\le 1\Big\}.$$

On remarquera que $|||f|||_{p,\mu,*}<\infty$ si et seulement si il existe $h\in L^{p/(p-1)}(d\mu)$ telle que les mesures $f dx$ et $h d\mu$ soient égales. Lorsque $d\mu=vdx$, on notera $|||f|||_{p,v}$ et $|||f|||_{p,v,*}$ au lieu de $|||f|||_{p,vdx}$ et $|||f|||_{p,vdx,*}$. On a alors, si $p>1$,

$$|||f|||_{p,v,*}=\Big(\int |f(x)|^{p/(p-1)}v(x)^{-1/(p-1)}\,dx\Big)^{(p-1)/p}$$

et

$$|||f|||_{1,v,*}=\operatorname{ess\,sup}\frac{|f(x)|}{|v(x)|}\,.$$

Par conséquent,

$$v\in A_p\quad\text{ssi}\quad \sup_I\frac{1}{|I|}|||\chi_I|||_{p,v}|||\chi_I|||_{p,v,*}<\infty \tag{1.3}$$

(où χ_I désigne la fonction caractéristique de l'intervalle I).

Le théorème 1 repose essentiellement sur le théorème suivant :

THÉORÈME 2. *Soit* $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *une analyse multi-résolution d'I. Daubechies* (*à ondelettes höldériennes à support compact*), μ *une mesure borélienne positive sur* $\mathbb{R}$ *et* $p\in[1,\infty[$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes* :

(C1) $C_1=\sup\{|||P_0f|||_{p,\mu} : f$ *continue à support compact*, $|||f|||_{p,\mu}\le 1\}<\infty$;

(C2) $C_2=\sup_{|I|=1}|||\chi_I|||_{p,\mu}|||\chi_I|||_{p,\mu,*}<\infty$.

De plus, C_2 *se majore en fonction seulement de* C_1, *de* p *et du choix de* $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$.

Le théorème 2 peut se paraphraser de la manière suivante :

PROPOSITION 1. *Soit* (V_j) *une analyse multi-résolution d'I. Daubechies* (*à ondelettes höldériennes à support compact*), μ *une mesure borélienne positive sur* $\mathbb{R}$ *et* $p\in[1,\infty[$. *Alors* :

(i) P_j *est continu sur* $L^p(d\mu)$ *pour* (*au moins un*) $j\in\mathbb{Z}$ *si et seulement si on a pour* (*au moins un*) $R>0$,

$$\sup_{|I|=R}\frac{1}{|I|}|||\chi_I|||_{p,\mu}|||\chi_I|||_{p,\mu,*}<\infty\,;$$

(ii) *les* P_j *sont continus sur* $L^p(d\mu)$ *et pour tout* $f\in L^p(d\mu)$,

$$\lim_{j\to\infty}|||P_jf-f|||_{p,\mu}=0$$

si et seulement si on a pour (*au moins un*) $R>0$,

$$\sup_{|I|\le R}\frac{1}{|I|}|||\chi_I|||_{p,\mu}|||\chi_I|||_{p,\mu,*}<\infty\,.$$

De plus, *dans ce cas*, *la mesure* μ *est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue* : $d\mu=v\,dx$ *avec* v *localement intégrable.*

(iii) *Les* P_j, $j\in\mathbb{Z}$, *sont équicontinus sur* $L^p(d\mu)$ *si et seulement si* $v\in A_p$, *ou encore*,

$$\sup_{I}\frac{1}{|I|}|||\chi_I|||_{p,\mu}|||\chi_I|||_{p,\mu,*}<\infty\,.$$

La proposition 1 introduit donc des critères de Muckenhoupt à une échelle (cas (i)) ou local ou aux petites échelles (cas (ii)) en plus du critère global (1.3). Le critère local peut se révéler très utile dans la mesure où dans de nombreux problèmes on ne décompose pas les fonctions à toutes les échelles (sur tous les W_j) mais seulement sur les petites échelles (sur V_{j_0} et sur les W_j, $j\ge j_0$).

1. Rappels sur les ondelettes de Daubechies. Pour tout $N\ge 2$, I. Daubechies a construit dans [1] une fonction φ qui vérifie :

(2.1) φ est de classe $C^{\alpha N}$ (où $\alpha>0$ ne dépend pas de N), à valeurs réelles et à support compact dans $\mathbb{R}$;

(2.2) les $\varphi(x-k)$, $k\in\mathbb{Z}$, forment une famille orthonormée de $L^2(\mathbb{R},dx)$;

(2.3) $\varphi(x/2)=\sum_{k=0}^{2N-1}a_k\varphi(x-k)$ avec $a_0\ne 0$ et $a_{2N-1}\ne 0$.

La fonction φ est alors la *fonction d'échelle* d'une *analyse multi-résolution* $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ au sens de S. Mallat [5]. Plus précisément, on définit :

(3.1) $\varphi_{j,k}(x)=2^{j/2}\varphi(2^jx-k)$ ($j\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$);

(3.2) V_j est le sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R}, dx)$ engendré par les $\varphi_{j,k}$, $k \in \mathbb{Z}$;
(3.3) $P_j f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f \mid \varphi_{j,k}\rangle \varphi_{j,k}(x)$.

P_j est le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{R}, dx)$ sur V_j ($\langle f \mid g\rangle$ désigne le produit scalaire $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g}(x)\,dx$ dans $L^2(\mathbb{R}, dx)$). Dire que $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ est une analyse multi-résolution de fonction d'échelle φ, c'est par définition dire que (V_j) vérifie :

(4.1) $V_j \subset V_{j+1}$, $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$, $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}, dx)$,
(4.2) $f(x) \in V_j$ ssi $f(2x) \in V_{j+1}$,
(4.3) les $\varphi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, forment une base orthonormée de V_0.

A la fonction d'échelle φ est associée une *ondelette* ψ définie par

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{2N-1} (-1)^k a_{2N-1-k} \varphi(x-k)\,. \tag{5}$$

On définit alors également :

(6.1) $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$;
(6.2) W_j est le complémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1};
(6.3) $Q_j f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f \mid \psi_{j,k}\rangle \psi_{j,k}$.

Alors les $\psi_{j,k}$, $k \in \mathbb{Z}$, forment une base orthonormée de W_j et $Q_j = P_{j+1} - P_j$ est le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{R}, dx)$ sur W_j. En particulier, les $\psi_{j,k}$ ($j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$) forment une *base d'ondelettes* de $L^2(\mathbb{R}, dx)$, c'est-à-dire une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}, dx)$ engendrée à partir d'une seule fonction ψ par les translations-dilatations dyadiques (6.1).

Les principales propriétés de ces bases d'ondelettes sont décrites dans le livre de Y. Meyer [6]. Celles que nous utiliserons plus particulièrement sont les suivantes :

(7.1) $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(x-k) = 1$;
(7.2) $\int \psi\,dx = 0$;
(7.3) $\operatorname{Supp}\varphi = \operatorname{Supp}\psi = [0, 2N-1]$;
(7.4) si $\sum \lambda_k \varphi(x-k)$ est nulle sur un intervalle I et si $|I \cap \operatorname{Supp}\varphi(x-k_0)| > 0$, alors $\lambda_{k_0} = 0$.

Les propriétés (7.3) et (7.4) ont été démontrées récemment par G. Malgouyres [3], [4].

Remarque. De (7.1) on déduit effectivement la propriété, évoquée dans l'introduction, que $P_j f$ tend vers f uniformément lorsque f est continue à support compact :

$$|P_j f(x) - f(x)| \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\varphi(2^j x - k)| \cdot |\langle f(y) \mid 2^j \varphi(2^j y - k)\rangle - f(x)|$$

$$\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\varphi(2^j x - k)| \cdot \Big| \int (f(y) - f(x))2^j \varphi(2^j y - k)\, dy \Big|$$
$$\leq (2N-1)^2 \|\varphi\|_\infty^2 \sup_{|x-y|\leq(2N-1)/2^j} |f(x) - f(y)| \,.$$

2. Démonstration du théorème 2. Avant de démontrer le théorème 2, remarquons la propriété suivante :

LEMME 1. *On note*

$$\alpha_0 = \sup_{|I|=1} |||\chi_I|||_{p,\mu} |||\chi_I|||_{p,\mu,*}$$

et

$$\alpha_1 = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |||\varphi(x-k)|||_{p,\mu} |||\varphi(x-k)|||_{p,\mu,*} \,.$$

(i) *Si* $\alpha_0 < \infty$, *il existe* $\beta_0 = 4\alpha_0^2$ *tel que, pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{\beta_0} |||\chi_{[x,x+1]}|||_{p,\mu} \leq |||\chi_{[x+1,x+2]}|||_{p,\mu} \leq \beta_0 |||\chi_{[x,x+1]}|||_{p,\mu} \,.$$

(ii) *Si* $\alpha_1 < \infty$, *il existe* $\beta_1 = \beta_2(\varphi)\alpha_1$ (*où* $\beta_2(\varphi)$ *ne dépend que de* φ) *tel que, pour tout* $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{\beta_1} |||\varphi(x-k)|||_{p,\mu} \leq |||\varphi(x-k-1)|||_{p,\mu} \leq \beta_1 |||\varphi(x-k)|||_{p,\mu} \,.$$

(iii) $\alpha_0 < \infty$ *est équivalent à* $\alpha_1 < \infty$ *et* α_0 *ne se majore qu'en fonction de* α_1, p *et* φ (*et de même* α_1 *en fonction de* α_0, p *et* φ) :

$$\alpha_0 \leq 4N^2 \beta_1^{4N-2} \alpha_1 \quad \textit{et} \quad \alpha_1 \leq (2N-1)^2 \|\varphi\|_\infty^2 \beta_0^{4N-4} \alpha_0 \,.$$

Démonstration. (i) En effet, on a

$$\int \chi_{[x,x+1]}(t) \chi_{[x+1/2,x+3/2]}(t)\, dt = \frac{1}{2}$$

et donc

$$\begin{aligned}
|||\chi_{[x,x+1]}|||_{p,\mu} &= 4 |||\chi_{[x,x+1]}|||_{p,\mu} \int \chi_{[x,x+1]} \chi_{[x+1/2,x+3/2]}\, dt \\
&\quad \times \int \chi_{[x+1/2,x+3/2]} \chi_{[x+1,x+2]}\, dt \\
&\leq 4 |||\chi_{[x,x+1]}|||_{p,\mu} |||\chi_{[x,x+1]}|||_{p,\mu,*} |||\chi_{[x+1/2,x+3/2]}|||_{p,\mu} \\
&\quad \times |||\chi_{[x+1/2,x+3/2]}|||_{p,\mu,*} |||\chi_{[x+1,x+2]}|||_{p,\mu} \\
&\leq 4\alpha_0^2 |||\chi_{[x+1,x+2]}|||_{p,\mu}
\end{aligned}$$

et de même $|||\chi_{[x,x+1]}|||_{p,\mu} \leq 4\alpha_0^2 |||\chi_{[x-1,x]}|||_{p,\mu}$.

(ii) D'après (7.3), $\operatorname{Supp}\varphi(x)\varphi(x-1) = [1, 2N-1]$ et donc il existe h continue à support compact telle que

$$\int h(x)\varphi(x)\varphi(x-1)\,dx = 1\,.$$

On a alors

$$\begin{aligned}|||\varphi(x-k)|||_{p,\mu} &= |||\varphi(x-k)|||_{p,\mu} \int h(x-k)\varphi(x-k)\varphi(x-k-1)\,dx\\ &\le |||\varphi(x-k)|||_{p,\mu}|||\varphi(x-k)|||_{p,\mu,*}|||h(x-k)\varphi(x-k-1)|||_{p,\mu}\\ &\le \alpha_1\|h\|_\infty|||\varphi(x-k-1)|||_{p,\mu}\end{aligned}$$

et de même $|||\varphi(x-k)|||_{p,\mu} \le \alpha_1\|h\|_\infty|||\varphi(x-k+1)|||_{p,\mu}$.

(iii) En effet, $\operatorname{Supp}\varphi(x-k) = [k, k+2N-1]$ et donc

$$\begin{aligned}|||\varphi(x-k)|||_{p,\mu} &\le \|\varphi\|_\infty \sum_{p=0}^{2N-2} |||\chi_{[k+p,k+p+1]}|||_{p,\mu}\\ &\le (2N-1)\beta_0^{2N-2}\|\varphi\|_\infty|||\chi_{[k,k+1]}|||_{p,\mu}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|||\varphi(x-k)|||_{p,\mu,*} &\le \|\varphi\|_\infty \sum_{p=0}^{2N-2} |||\chi_{[k+p,k+p+1]}|||_{p,\mu,*}\\ &\le \alpha_0\|\varphi\|_\infty \sum_{p=0}^{2N-2} \frac{1}{|||\chi_{[k+p,k+p+1]}|||_{p,\mu}}\\ &\le \alpha_0(2N-1)\beta_0^{2N-2}\|\varphi\|_\infty \frac{1}{|||\chi_{[k,k+1]}|||_{p,\mu}}\,,\end{aligned}$$

d'où $\alpha_1 \le \|\varphi\|_\infty^2\alpha_0(2N-1)^2\beta_0^{4N-4}$.

Inversement, si $k \le x < k+1$, alors

$$\chi_{[x,x+1]}(t) = \chi_{[x,x+1]}(t)\sum_{p=-1}^{2N-2}\varphi(t-k+p)$$

et donc

$$|||\chi_{[x,x+1]}|||_{p,\mu} \le \sum_{p=-1}^{2N-2}|||\varphi(t-k+p)|||_{p,\mu} \le 2N\beta_1^{2N-1}|||\varphi(t-k-1)|||_{p,\mu}$$

et

$$\begin{aligned}|||\chi_{[x,x+1]}|||_{p,\mu,*} &\le \alpha_1\sum_{p=-1}^{2N-2}\frac{1}{|||\varphi(t-k+p)|||_{p,\mu,*}}\\ &\le 2N\alpha_1\beta_1^{2N-1}\frac{1}{|||\varphi(t-k-1)|||_{p,\mu}}\,,\end{aligned}$$

d'où $\alpha_0 \le \alpha_1 4N^2\beta_1^{4N-2}$.

Démontrer le théorème 2 revient alors à démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2bis. *Pour $p \in [1,\infty[$ et $C \geq 1$ on note $K_{C,p}$ l'ensemble des mesures boréliennes positives μ sur $\mathbb{R}$ telles que :*

(i) $\int |\varphi(x)|^p \, d\mu(x) = 1$;

(ii) *pour toute fonction f continue à support compact,*

$$\int |P_0 f|^p \, d\mu \leq C \int |f|^p \, d\mu \,.$$

Alors $K_{C,p}$, muni de la topologie de la convergence vague, est un compact métrisable et

$$\sup_{\mu \in K_{C,p}} \sup_{|||f|||_{p,\mu}=1} \left| \int f\varphi \, dx \right| < \infty \,. \tag{8}$$

Pour démontrer ce théorème, nous allons recourir à une série de lemmes intermédiaires. Dans ce qui suit, le lettre C' désignera diverses constantes dépendant de C, p et φ mais pas de μ.

LEMME 2. $|||\varphi(x-k)|||_{p,\mu} \leq C'^{|k|}$ *pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et toute $\mu \in K_{C,p}$.*

En effet, on peut trouver une fonction h_0 continue à support compact telle que

$$\int h_0(x)\varphi(x)\varphi(x-p)\, dx = \delta_{1,p}$$

(où $\delta_{1,p} = 1$ si $p = 1$, et 0 si $p \neq 1$). Cela provient du fait que si

$$\sum_{p=-2N+2}^{2N-2} \alpha_p \varphi(x)\varphi(x-p) = 0 \qquad \text{p.p.}$$

alors $\sum \alpha_p \varphi(x-p)$ est nulle p.p. sur un ouvert dense de $[0, 2N-1]$ (puisque $\operatorname{Supp}\varphi = [0, 2N-1]$ et donc que $\varphi(x) \neq 0$ sur un ouvert dense de $]0, 2N-1[$) et donc $\sum \alpha_p \varphi(x-p)$ est nulle sur $[0, 2N-1]$; par (7.4) on obtient que tous les α_p sont nuls. Les formes linéaires $h \to \int h\varphi(x)\varphi(x-p)\, dx$ (pour $-2N+2 \leq p \leq 2N-2$) sont donc linéairement indépendantes sur l'espace des fonctions continues (nulles à l'infini) et un lemme classique assure l'existence de h_0 (qu'on peut supposer à support compact puisque seules ses valeurs sur $[0, 2N-1]$ interviennent). Mais alors on a

$$\varphi(x-k-1) = P_0(h_0(x-k)\varphi(x-k))$$

et

$$\varphi(x+k+1) = P_0(h_0(x+k+1)\varphi(x+k)) \,,$$

d'où

$$|||\varphi(x-k-1)|||_{p,\mu} \leq C\|h_0\|_\infty |||\varphi(x-k)|||_{p,\mu}$$

et de même

$$|||\varphi(x+k+1)|||_{p,\mu} \leq C\|h_0\|_\infty |||\varphi(x+k)|||_{p,\mu} \,.$$

LEMME 3. $\forall\mu \in K_{C,p}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu([-n,n]) \le C'^n$.

Cela provient directement de (7.1) et du lemme 2 :

$$\mu([-n,n]) = \int_{[-n,n]} \Big|\sum_k \varphi(x-k)\Big|^p d\mu$$
$$\le \Big(\sum_{k=-n-2N+2}^{n-1} |||\varphi(x-k)|||_{p,\mu}\Big)^p$$
$$\le \Big(\sum_{k=-n-2N+2}^{n-1} C'^{|k|}\Big)^p \le C'^{np}\Big(2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{C'^k}\Big)^p \le C''^n.$$

LEMME 4. *$K_{C,p}$ est un compact métrisable pour la topologie de la convergence vague.*

La topologie de la convergence vague est définie sur l'espace des mesures boréliennes par les semi-normes $\|\mu\|_f = |\int f\,d\mu|$ où f décrit l'espace des fonctions continues à support compact. On note B_n la boule fermée de centre 0 et de rayon C'^n (où C' est la constante du lemme 3) dans l'espace des mesures boréliennes sur $[-n,n]$; B_n muni de la topologie de la convergence vague est un compact métrisable d'après le théorème de Banach–Alaoglu; or K s'identifie à un fermé de $\prod_{n\in\mathbb{N}} B_n$ par l'application $\mu \to (\mu|_{[-n,n]})_{n\in\mathbb{N}}$. Le lemme est donc démontré.

LEMME 5. $\forall\mu \in K_{C,p}$, $\operatorname{Supp}\mu = \mathbb{R}$.

En effet, considérons un intervalle I borné tel que $|I| > 0$. Fixons $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $|[k_0, k_0+2N-1] \cap I| > 0$. Le même argument que dans la démonstration du lemme 2 montre qu'il existe h_I continue à support compact telle que $\int h_I(x)\chi_I(x)\varphi(x-k)\,dx = \delta_{k,k_0}$ (la mesure $\chi_I(x)\varphi(x-k_0)dx$ étant linéairement indépendante, d'après (7.4), des $\chi_I\varphi(x-k)dx$ avec $k \ne k_0$). On a alors

$$|||\varphi(x-k_0)|||_{p,\mu} \le C\|h_I\|_\infty \mu(I)^{1/p}\,.$$

Or la démonstration du lemme 2 montre que

$$|||\varphi(x-k_0)|||_{p,\mu} \ge C'^{-|k_0|} > 0$$

et donc $\mu(I) > 0$.

LEMME 6. *On note $K = \{(\varepsilon_k)_{-2N+2\le k\le 2N-2} : \sum|\varepsilon_k|^p = 1\}$. Alors*

$$\inf_{\varepsilon\in K}\ \inf_{\mu\in K_{C,p}} \int_{[0,2N-1]} \Big|\sum_{k=-2N+2}^{2N-2} \varepsilon_k\varphi(x-k)\Big|^p d\mu(x) > 0\,.$$

Remarquons d'abord que l'application F qui à $(\varepsilon, \mu) \in K \times K_{C,p}$ associe

$$F(\varepsilon, \mu) = \int_{[0,2N-1]} \Big| \sum_k \varepsilon_k \varphi(x-k) \Big|^p \, d\mu$$

est continue : en effet, si (ε_n, μ_n) converge vers (ε, μ) (μ_n convergeant vers μ au sens de la convergence vague) alors

$$\sum_{k=-2N+2}^{2N-2} \varepsilon_{k,n} \varphi(x-k)$$

converge uniformément vers

$$\sum_{k=-2N+2}^{2N-2} \varepsilon_k \varphi(x-k);$$

comme, d'après le lemme 3, $\sup_n \mu_n([0, 2N-1]) < \infty$ il est clair que

$$\lim_{n \to \infty} F(\varepsilon_n, \mu_n) - F(\varepsilon, \mu_n) = 0;$$

par ailleurs $F(\varepsilon, \mu_n)$ converge vers $F(\varepsilon, \mu)$. F est donc continue; comme K et $K_{C,p}$ sont compacts, la borne inférieure de F sur $K \times K_{C,p}$ est atteinte. Il reste à montrer qu'elle est non nulle.

Supposons que $F(\varepsilon, \mu)$ soit nul; cela implique que

$$\chi_{[0,2N-1]}(x) \Big(\sum_{k=-2N+2}^{2N-2} \varepsilon_k \varphi(x-k) \Big)$$

soit nulle μ-presque partout; or la fonction $\sum \varepsilon_k \varphi(x-k)$ est continue; si elle était non nulle en un point de $]0, 2N-1[$, elle serait non nulle sur un (petit) intervalle I autour de ce point; or d'après le lemme 5, $\mu(I) > 0$; on obtient donc que $\sum \varepsilon_k \varphi(x-k)$ doit être nulle sur $[0, 2N-1]$ et (7.4) entraîne alors que les ε_k sont nuls pour $-2N+2 \leq k \leq 2N-2$; ce dernier résultat est absurde puisque $\sum \varepsilon_k^p = 1$. $F(\varepsilon, \mu)$ est donc non nul. Le lemme 6 est alors démontré.

Le théorème 2bis est alors immédiat. Appelons α la borne inférieure de $F(\varepsilon, \mu)$ sur $K \times K_{C,p}$. Alors on a

$$\begin{aligned} |\langle f \mid \varphi \rangle| &\leq \Big(\sum_{k=-2N+2}^{2N-2} |\langle f \mid \varphi(x-k) \rangle|^p \Big)^{1/p} \\ &\leq \Big(\frac{1}{\alpha} \int_{[0,2N-1]} \Big| \sum \langle f \mid \varphi(x-k) \rangle \varphi(x-k) \Big|^p \, d\mu \Big)^{1/p} \\ &\leq \alpha^{-1/p} |||P_0 f|||_{p,\mu} \leq C \alpha^{-1/p} |||f|||_{p,\mu} \, . \end{aligned}$$

Le théorème 2bis est donc démontré.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 2. Supposons que

$$C_1 = \sup_{|||f|||_{p,\mu}=1} |||P_0 f|||_{p,\mu} < \infty\,.$$

Remarquons qu'alors tous les $|||\varphi(x-k)|||_{p,\mu}$, $k \in \mathbb{Z}$, sont non nuls (si μ est non nulle) : il suffit de reprendre les démonstrations des lemmes 2 et 3 pour voir que si $\varphi = 0$ dans $L^p(d\mu)$ et si P_0 est continu sur $L^p(d\mu)$ alors tous les $\varphi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, sont nuls et pour finir μ est nulle. On remarque alors que μ_k définie par

$$\int f(x)\, d\mu_k = \int f(x-k) \frac{d\mu}{|||\varphi(x-k)|||_{p,\mu}^p}$$

vérifie que $\mu_k \in K_{C_1,p}$ et donc $|||\varphi|||_{p,\mu_k,*} \le C'$ d'après le théorème 2bis; or

$$|||\varphi|||_{p,\mu_k,*} = |||\varphi(x-k)|||_{p,\mu} |||\varphi(x-k)|||_{p,\mu,*}\,.$$

On utilise alors le lemme 1 pour conclure que

$$C_2 = \sup_{|I|=1} |||\chi_I|||_{p,\mu} |||\chi_I|||_{p,\mu,*}$$

est fini et se majore en fonction de C_1, p et φ, mais indépendamment de μ.

Réciproquement, si $C_2 < \infty$, alors $C_3 = \sup |||\varphi(x-k)|||_{p,\mu} \times |||\varphi(x-k)|||_{p,\mu,*}$ est fini (toujours d'après le lemme 1). On a alors

$$\begin{aligned} |||P_0 f|||_{p,\mu} &\le \sum_{r=1}^{2N-1} \Big|\Big|\Big| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f \mid \varphi(x-k(2N-1)-r)\rangle \\ &\qquad \times \varphi(x-k(2N-1)-r) \Big|\Big|\Big|_{p,\mu} \\ &\le \sum_{r=1}^{2N-1} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f \mid \varphi(x-k(2N-1)-r)\rangle|^p \\ &\qquad \times |||\varphi(x-k(2N-1)-r)|||_{p,\mu}^p \Big)^{1/p} \end{aligned}$$

(car $\varphi(x)$ et $\varphi(x-k(2N-1))$ sont à supports disjoints) et donc

$$\begin{aligned} |||P_0 f|||_{p,\mu} &\le (2N-1)^{(p-1)/p} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f \mid \varphi(x-k)\rangle|^p |||\varphi(x-k)|||_{p,\mu}^p \Big)^{1/p} \\ &\le (2N-1)^{(p-1)/p} \\ &\quad \times \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |||f\chi_{[k,k+2N-1]}|||_{p,\mu}^p |||\varphi(x-k)|||_{p,\mu,*}^p |||\varphi(x-k)|||_{p,\mu}^p \Big)^{1/p} \\ &\le (2N-1)^{(p-1)/p} C_3 (2N-1)^{1/p} |||f|||_{p,\mu} \end{aligned}$$

et donc $C_1 \le (2N-1)C_3$.

Le théorème 2 est donc démontré.

3. Démonstration de la proposition 1. Commençons par noter pour $R > 0$, $p \in [1, \infty]$ et μ mesure borélienne positive

$$\alpha(R) = \sup_{|I|=R} \frac{1}{|I|} |||\chi_I|||_{p,\mu} |||\chi_I|||_{p,\mu,*} \,. \tag{9}$$

On a le résultat simple suivant:

Lemme 7. *Si* $R \leq R' \leq 2R$ *alors* $\frac{1}{2}\alpha(R) \leq \alpha(R') \leq 16\alpha(R)^3$.

En effet, soit $I = [x_0 - R/2, x_0 + R/2]$ un intervalle de longueur R et $I' = [x_0 - R'/2, x_0 + R'/2]$. Alors il est clair que $|||\chi_I|||_{p,\mu} \leq |||\chi_{I'}|||_{p,\mu}$ et que $|||\chi_I|||_{p,\mu,*} \leq |||\chi_{I'}|||_{p,\mu,*}$, et donc

$$\frac{1}{R} |||\chi_I|||_{p,\mu} |||\chi_I|||_{p,\mu,*} \leq \frac{R'}{R} \frac{1}{R'} |||\chi_{I'}|||_{p,\mu} |||\chi_{I'}|||_{p,\mu,*} \leq 2\alpha(R') \,,$$

d'où $\alpha(R) \leq 2\alpha(R')$.

Décomposons maintenant I' en $I_1 \cup I_2$ avec

$$I_1 = [x_0 - R'/2, x_0 + R - R'/2] \quad \text{et} \quad I_2 = [x_0 + R'/2 - R, x_0 + R'/2] \,.$$

On a

$$|||\chi_I|||_{p,\mu} \leq |||\chi_{I_1}|||_{p,\mu} + |||\chi_{I_2}|||_{p,\mu}$$

et

$$|||\chi_I|||_{p,\mu,*} \leq |||\chi_{I_1}|||_{p,\mu,*} + |||\chi_{I_2}|||_{p,\mu,*} \,.$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{R}{2} \leq \frac{3R - R'}{2} &= |I_1 \cap I| \\ &\leq |||\chi_{I_1}|||_{p,\mu} |||\chi_I|||_{p,\mu,*} \leq \frac{R\alpha(R)}{|||\chi_{I_1}|||_{p,\mu,*}} |||\chi_I|||_{p,\mu,*} \,, \end{aligned}$$

d'où

$$|||\chi_{I_1}|||_{p,\mu,*} \leq 2\alpha(R) |||\chi_I|||_{p,\mu,*} \,.$$

On obtient de même

$$|||\chi_{I_1}|||_{p,\mu} \leq 2\alpha(R) |||\chi_I|||_{p,\mu}, \qquad |||\chi_{I_2}|||_{p,\mu} \leq 2\alpha(R) |||\chi_I|||_{p,\mu}$$

et

$$|||\chi_{I_2}|||_{p,\mu,*} \leq 2\alpha(R) |||\chi_I|||_{p,\mu,*} \,,$$

et en fin de compte

$$\begin{aligned} \frac{1}{R'} |||\chi_{I'}|||_{p,\mu} |||\chi_{I'}|||_{p,\mu,*} &\leq \frac{R}{R'} 16\alpha(R)^2 \frac{1}{R} |||\chi_I|||_{p,\mu} |||\chi_I|||_{p,\mu,*} \\ &\leq 16\alpha(R)^3 \,. \end{aligned}$$

Le lemme 7 est donc démontré.

Lemme 8. $|||P_j f|||_{p,\mu} \leq (2N-1)^2 \|\varphi\|_\infty^2 \alpha((2N-1)/2^j) |||f|||_{p,\mu}$.

En effet, la démonstration du théorème 2 donne

$$|||P_j f|||_{p,\mu} \le (2N-1)(\sup_{k\in\mathbb{Z}} |||\varphi_{j,k}|||_{p,\mu} |||\varphi_{j,k}|||_{p,\mu,*}) |||f|||_{p,\mu} \, .$$

Or on a

$$|\varphi_{j,k}(x)| \le 2^{j/2} \|\varphi\|_\infty \chi_{[k/2^j,(k+2N-1)/2^j]}(x)$$

et donc

$$|||\varphi_{j,k}|||_{p,\mu} |||\varphi_{j,k}|||_{p,\mu,*} \le (2N-1)\alpha\left(\frac{2N-1}{2^j}\right) \|\varphi\|_\infty^2 \, .$$

De ce lemme 8 on tire les conclusions suivantes. Si les $\alpha(R)$ sont finis (critère de Muckenhoupt à une échelle), les projecteurs P_j sont continus sur $L^p(d\mu)$ (et réciproquement d'après le théorème 2). Si les $\alpha(R)$ restent bornés quand R tend vers 0 (critère de Muckenhoupt aux petites échelles), les projecteurs P_j sont équicontinus pour $j \ge 0$ (et réciproquement, en appliquant le théorème 2 aux mesures $\mu_j(x)$ définies par $\int f \, d\mu_j = \int f(2^j x) \, d\mu$). De même, les P_j, $j \in \mathbb{Z}$, sont équicontinus sur $L^p(d\mu)$ si et seulement si $\sup_R \alpha(R) < \infty$ (critère de Muckenhoupt global).

De plus, si les P_j sont équicontinus sur $L^p(d\mu)$ pour $j \ge 0$, comme $P_j f$ converge vers f dans $L^p(d\mu)$ pour f continue à support compact, on a $\lim_{j\to\infty} |||P_j f - f|||_{p,\mu} = 0$ pour tout $f \in L^p(d\mu)$. La réciproque est également vraie d'après le théorème de Banach–Steinhaus. De plus, si E est un borélien borné tel que $|E| = 0$, alors $P_j(\chi_E) = 0$ pour tout j et donc, si $\sup_{R\le 1} \alpha(R) < \infty$, on a $|||\chi_E|||_{p,\mu} = 0$ et donc $\mu(E) = 0$, ce qui montre que μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

La proposition 1 est donc démontrée. L'équivalence (B1)$\Leftrightarrow$(B2) du théorème 1 a été également démontrée. L'équivalence (A1)$\Leftrightarrow$(A2) est immédiate : si (A1) est vérifiée, alors les P_j sont équicontinus (par Banach–Steinhaus) et donc $v \in A_p$; inversement, si $v \in A_p$, les P_j sont équicontinus et pour tout $f \in L^p(d\mu)$, $\lim_{j\to\infty} |||P_j f - f|||_{p,\mu} = 0$. Il reste à vérifier que pour $f \in D$, D dense dans $L^p(d\mu)$, $\lim_{j\to-\infty} |||P_j f|||_{p,\mu} = 0$. Considérons le cas de f bornée à support dans $[-M, M]$; alors on a

$$\begin{aligned} |P_j f(x)| &\le \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^j |\langle f \mid \varphi(2^j x - k)\rangle| \, |\varphi(2^j x - k)| \\ &\le 2M \|f\|_\infty \|\varphi\|_\infty^2 \\ &\quad \times 2^j \sum_{[k/2^j,(k+2N-1)/2^j]\cap[-M,M]\ne\emptyset} \chi_{[k/2^j,(k+2N-1)/2^j]}(x) \\ &\le 2M \|f\|_\infty \|\varphi\|_\infty^2 2^j (2N-1) \chi_{[-M-(2N-1)/2^j, M+(2N-1)/2^j]} \end{aligned}$$

et donc

$$|||P_j f|||_{p,\mu} \le C \, 2^j |||\chi_{[-M-(2N-1)/2^j, M+(2N-1)/2^j]}|||_{p,\mu}$$

$$\leq C' \frac{1}{|||\chi_{[-M-(2N-1)/2^j, M+(2N-1)/2^j]}|||_{p,\mu,*}}.$$

Or on a $d\mu = v dx$ et

$$|||\chi_{[-M-(2N-1)/2^j, M+(2N-1)/2^j]}|||_{p,\mu,*} = \Big(\int_{[-M-(2N-1)/2^j, M+(2N-1)/2^j]} v^{-1/(p-1)}\,dx \Big)^{(p-1)/p}$$

et il suffit donc de vérifier que si $v \in A_p$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^{-1/(p-1)}\,dx = \infty\,.$$

Or

$$\begin{aligned}
\Big(\int_0^{2^{N+1}} v^{-1/(p-1)}\,dx \Big)^{(p-1)/p}
&= \Big(\int_0^{2^{N+1}} v^{-1/(p-1)}\,dx \Big)^{(p-1)/p} \frac{1}{2^N} \int \chi_{[0,2^{N+1}]}\chi_{[2^N,2^{N+1}]}\,dx \\
&\leq \frac{1}{2^N} \Big(\int_0^{2^{N+1}} v^{-1/(p-1)}\,dx \Big)^{(p-1)/p} \\
&\quad \times \Big(\int_0^{2^{N+1}} v\,dx \Big)^{1/p} \Big(\int_{2^N}^{2^{N+1}} v^{-1/(p-1)}\,dx \Big)^{(p-1)/p} \\
&\leq C \Big(\int_{2^N}^{2^{N+1}} v^{-1/(p-1)}\,dx \Big)^{(p-1)/p}
\end{aligned}$$

et on voit que

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{2^{N+1}} v^{-1/(p-1)}\,dx = \infty\,.$$

On a bien (A1)$\Leftrightarrow$(A2). Lorsque $p = 1$, (A1) n'est pas vérifié pour $v \in A_1$ en général : par exemple pour $v = 1$ on a $\int P_j f\,dx = \int f\,dx$ pour tout $f \in L^1(dx)$ (car

$$\begin{aligned}
\int P_j f\,dx &= \int \sum \langle f \mid \varphi_{j,k}\rangle \varphi_{j,k}\,dx = \sum \langle f \mid \varphi_{j,k}\rangle 2^{-j/2} \\
&= \int f(x) \sum \varphi(2^j x - k)\,dx = \int f\,dx
\end{aligned}$$

par (7.1)) et donc si $\int f\,dx \neq 0$ on ne peut avoir $\lim_{j\to-\infty} |||P_j f|||_{1,1} = 0$.

4. Bases inconditionnelles et opérateurs de Calderón–Zygmund. Nous allons montrer que les ondelettes $(\psi_{j,k})$ forment une base inconditionnelle de $L^p(vdx)$ lorsque $v \in A_p$ et $1 < p < \infty$ (nous excluons le cas $p = 1$ car les espaces $L^1(vdx)$ n'admettent pas de bases inconditionnelles). De même, la famille $(\varphi_{j_0,k})_{k\in\mathbb{Z}} \cup (\psi_{j,k})_{j\geq j_0,k\in\mathbb{Z}}$ forme une base inconditionnelle de $L^p(vdx)$ si et seulement si v satisfait le critère local (ou aux petites échelles) de Muckenhoupt.

PROPOSITION 2. *Soit (V_j) une analyse multi-résolution d'I. Daubechies (à ondelettes höldériennes à support compact), v une fonction de poids sur $\mathbb{R}$ ($v \geq 0$ p.p., v localement intégrable) et $p \in]1,\infty[$. Alors* :

(i) *Les assertions suivantes sont équivalentes* :

(D1) *les $\psi_{j,k}$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, forment une base inconditionnelle de $L^p(vdx)$;*

(D2) *la norme $|||f|||_{p,v}$ est équivalente à la norme*

$$N_{p,v}(f) = \Big|\Big|\Big| \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f \mid \psi_{j,k}\rangle|^2 \chi_{j,k}(x)^2 \Big)^{1/2} \Big|\Big|\Big|_{p,v}$$

où $\chi_0 = \chi_{[0,1]}$ et $\chi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\chi(2^j x - k)$;

(D3) $v \in A_p$.

(ii) *Les assertions suivantes sont équivalentes* :

(E1) *les $(\varphi_{j_0,k})$, $k \in \mathbb{Z}$, et les $(\psi_{j,k})$, $j \geq j_0$, $k \in \mathbb{Z}$, forment une base inconditionnelle de $L^p(vdx)$;*

(E2) *la norme $|||f|||_{p,v}$ est équivalente à la norme*

$$M_{p,v,j_0}(f) = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f \mid \varphi_{j_0,k}\rangle|^p |||\varphi_{j_0,k}|||^p_{p,v} \Big)^{1/p} + \Big|\Big|\Big| \Big(\sum_{j\geq j_0} \sum_{k} |\langle f \mid \psi_{j,k}\rangle|^2 \chi_{j,k}(x)^2 \Big)^{1/2} \Big|\Big|\Big|_{p,v};$$

(E3) $\sup_{|I|\leq 1} |I|^{-1} |||\chi_I|||_{p,v} |||\chi_I|||_{p,v,*} < \infty$.

Rappelons qu'une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *base inconditionnelle* d'un espace de Banach B si :

(i) tout élément b de B s'écrit $b = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \beta_k(b) b_k$, la convergence ayant lieu dans B et les coefficients $\beta_k(b)$ étant uniques;

(ii) il existe une constante C telle que

$$\forall b \in B,\ \forall \varepsilon \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}, \quad \Big\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon(n)\beta_n(b) b_n \Big\|_B \leq C\|b\|_B\,.$$

Les familles $(\varepsilon(n)\beta_n(b)b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont alors sommables dans B et les séries sont commutativement convergentes, de sorte que la façon d'indexer la famille (b_n) est indifférente.

Si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base inconditionnelle de B et si $A \subset \mathbb{N}$, l'opérateur de somme partielle $b \to P_A(b) = \sum_{n\in A}\beta_n(b)b_n$ est continu et sa norme d'opérateur se majore indépendamment de A, puisque $2P_A(b) - b = \sum_{n\in\mathbb{N}}\varepsilon_A(n)\beta_n(b)b_n$ avec $\varepsilon_A(n) = 1$ si $n \in A$ et $\varepsilon_A(n) = -1$ si $n \notin A$.

On en conclut immédiatement que (D2)⇒(D1), que (D1) implique que les opérateurs P_j sont équicontinus (car on a

$$P_j f = \sum_{l<j}\sum_k \langle f \mid \psi_{l,k}\rangle \psi_{l,k}$$

et donc P_j est un opérateur de somme partielle) et donc que (D1)⇒(D3). De même (E2)⇒(E1) et (E1)⇒(E3).

On est donc ramené à montrer (D3)⇒(D2) et (E3)⇒(E2). En fait, il suffit de montrer que $v \in A_p$ implique

$$\Big|\Big|\Big|\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\langle f \mid \psi_{j,k}\rangle|^2\chi_{j,k}(x)^2\Big)^{1/2}\Big|\Big|\Big|_{p,v} \le C_{p,v}|||f|||_{p,v} \tag{9}$$

et, de même, que $\sup_{|I|\le 1}|I|^{-1}|||\chi_I|||_{p,v}|||\chi_I|||_{p,v,*} < \infty$ implique que

$$\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\langle f \mid \varphi_{j_0,k}\rangle|^p|||\varphi_{j_0,k}|||_{p,v}^p\Big)^{1/p} \le C_{j_0,p,v}|||f|||_{p,v}\,, \tag{10.1}$$

$$\Big|\Big|\Big|\Big(\sum_{j\ge j_0}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\langle f \mid \psi_{j,k}\rangle|^2\chi_{j,k}(x)^2\Big)^{1/2}\Big|\Big|\Big|_{p,v} \le C_{j_0,p,v}|||f|||_{p,v}\,. \tag{10.2}$$

Les inégalités réciproques s'obtiennent par dualité, car $\langle\ \mid\ \rangle$ identifie le dual de $L^p(vdx)$ à $L^{p*}(v^*dx)$ avec $p^* = p/(p-1)$ et $v^* = v^{-1/(p-1)}$; de plus,

$$|||\chi_I|||_{p,v} = |||\chi_I|||_{p^*,v^*,*} \quad \text{et} \quad |||\chi_I|||_{p,v,*} = |||\chi_I|||_{p,v}$$

de sorte que (9) (ou (10)) est également vérifiée pour p^*, v^*, et donc

$$\begin{aligned}
|||f|||_{p,v} &= \sup\{|\langle f \mid g\rangle| : g \in L^{p*}(v^*dx),\ |||g|||_{p^*,v^*} \le 1\}\\
&= \sup\Big\{\Big|\sum_{j,k}|\langle f \mid \psi_{j,k}\rangle\langle\psi_{j,k} \mid g\rangle\Big| : g \in L^{p*}(v^*dx),\ |||g|||_{p^*,v^*} \le 1\Big\}\\
&\le \sup\Big\{\sum_{j,k}|\langle f \mid \psi_{j,k}\rangle||\langle\psi_{j,k} \mid g\rangle|\ \int\chi_{j,k}^2\,dx : g \in L^{p*}(v^*dx),\ |||g|||_{p^*,v^*} \le 1\Big\}\\
&\le \sup\Big\{\int\ \Big(\sum_{j,k}|\langle f \mid \psi_{j,k}\rangle|^2\chi_{j,k}(x)^2\Big)^{1/2}\\
&\qquad \times\Big(\sum_{j,k}|\langle g \mid \psi_{j,k}\rangle|^2\chi_{j,k}(x)^2\Big)^{1/2}dx : |||g|||_{p^*,v^*} \le 1\Big\}
\end{aligned}$$

$$\leq N_{p,v}(f)\sup\{N_{p^*,v^*}(g) : |||g|||_{p^*,v^*}\leq 1\}\leq C_{p^*,v^*}N_{p,v}(f)$$

(et de même on contrôle $|||f|||_{p,v}$ par $M_{p,v}(f)$ grâce à (10) appliquée à p^*, v^*).

On est donc ramené à établir (9) et (10). (10.1) est immédiat puisque

$$|\langle f \mid \varphi_{j_0,k}\rangle|^p \leq |||\varphi_{j_0,k}|||^p_{p,v,*}\int_{[k/2^{j_0},(k+2N-1)/2^{j_0}]}|f|^p v\,dx$$

et qu'on a vu que $\sup_k |||\varphi_{j_0,k}|||_{p,v}|||\varphi_{j_0,k}|||_{p,v,*}$ était borné en fonction de

$$\sup_{|I|\leq 1}\frac{1}{|I|}|||\chi_I|||_{p,v}|||\chi_I|||_{p,v,*}\,.$$

Par ailleurs on note ω une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support dans $[-1,2]$ et valant sur $[0,1]$. On va montrer que

$$\text{(9bis)}\qquad \sup_{\varepsilon}\Big|\Big|\Big|\sum_j\sum_k\varepsilon(j,k)\langle f\mid\psi_{j,k}\rangle\omega_{j,k}\Big|\Big|\Big|_{p,v}\leq C_{p,v}|||f|||_{p,v}$$

où $\varepsilon\in\{-1,1\}^{\mathbb{Z}^2}$, $\omega_{j,k}(x)=2^{j/2}\omega(2^jx-k)$ et $v\in A_p$, et de même,

$$\text{(10bis)}\qquad \sup_{\varepsilon}\Big|\Big|\Big|\sum_{j\geq j_0}\sum_k\varepsilon(j,k)\langle f\mid\psi_{j,k}\rangle\omega_{j,k}\Big|\Big|\Big|_{p,v}\leq C_{p,v}|||f|||_{p,v}$$

lorsque $\sup_{|I|\leq 1}|I|^{-1}|||\chi_I|||_{p,v}|||\chi_I|||_{p,v,*}<\infty$. Si on moyenne (9bis) sur tous les choix possibles de ε, on obtient, par l'inégalité de Khintchine,

$$\int_{\{-1,1\}^{\mathbb{Z}^2}}\Big|\sum_j\sum_k\varepsilon(j,k)\langle f\mid\psi_{j,k}\rangle\omega_{j,k}(x)\Big|^p d\varepsilon \geq \gamma_p\Big(\sum_j\sum_k|\langle f\mid\psi_{j,k}\rangle|^2\omega_{j,k}(x)^2\Big)^{p/2}$$

et donc

$$\gamma_p\int\Big(\sum_j\sum_k|\langle f\mid\psi_{j,k}\rangle|^2\omega_{j,k}(x)^2\Big)^{p/2}v\,dx\leq C^p_{p,v}|||f|||^p_{p,v}\,;$$

comme $|\omega_{j,k}(x)|\geq\chi_{j,k}(x)$, (9) se déduit de (9bis) et de même (10) se déduit de (10bis).

On conclut alors grâce à la théorie des opérateurs de Calderón–Zygmund [7]. Si T est un opérateur linéaire continu de $L^2(\mathbb{R},dx)$ dans $L^2(\mathbb{R},dx)$ tel que le noyau-distribution $K(x,y)$ de T coïncide en dehors de la diagonale $x=y$ avec une fonction continue localement höldérienne (d'exposant $\alpha>0$) telle que

$$\text{(11.1)}\qquad |K(x,y)|\leq C_1\frac{1}{|x-y|}\,,$$

$$|K(x,y)-K(x+z,y)|+|K(x,y)-K(x,y+z)|\le C_2\frac{|z|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}} \tag{11.2}$$

pour $z<\frac{1}{2}|x-y|$,

$$\|Tf\|_2\le C_3\|f\|_2 \tag{11.3}$$

et si $v\in A_p$,

$$\forall I\quad \frac{1}{|I|}|||\chi_I|||_{p,v}|||\chi_I|||_{p,v,*}\le C_4 \tag{11.4}$$

pour un $p\in\,]1,\infty[$, alors on a

$$|||Tf|||_{p,v}\le C_5|||f|||_{p,v} \tag{11.5}$$

où C_5 ne dépend que de α, C_1, C_2, C_3, C_4 et p.

(9bis) est alors immédiat. On note T_ε l'opérateur

$$f\to\sum\varepsilon_{(j,k)}\langle f\mid\psi_{j,k}\rangle\omega_{j,k}$$

et K_ε son noyau. En dehors de la diagonale, on a

$$K_\varepsilon(x,y)=\sum\varepsilon_{(j,k)}\psi_{j,k}(y)\omega_{j,k}(x)$$

et donc

$$|K_\varepsilon(x,y)|\le\sum_j\sum_k 2^j|\psi(2^jy-k)|\cdot|\omega(2^jx-k)|\,.$$

Or $\psi(2^jy-k)$ est non nul seulement si $2^jy-2N+1<k<2^jy$ et de même $\omega(2^jx-k)$ est non nul seulement si $2^jx-2<k<2^jx+1$; le produit est non nul seulement si $-2<2^j(y-x)<2N$ et donc $2^j|y-x|\le 2N$. On a alors

$$|K_\varepsilon(x,y)|\le\sum_{2^j|y-x|\le 2N}2^j\|\psi\|_\infty\|\omega\|_\infty\cdot 3\le\frac{C}{|x-y|}\,.$$

De même on a

$$\begin{aligned}&|K_\varepsilon(x,y)-K_\varepsilon(x,z+y)|\\&\qquad\le\sum_j\sum_k 2^j|\omega(2^jx-k)|\cdot|\psi(2^jy-k)-\psi(2^j(z+y)-k)|\,.\end{aligned}$$

Or ψ est höldérienne d'exposant $\beta>0$, de sorte qu'on a

$$|\psi(2^jy-k)-\psi(2^j(y+z)-k)|\le C2^{j\beta}|z|^\beta\,.$$

La somme court à nouveau pour $2^j|y-x|\le 4N$ si $|z|\le\frac{1}{2}|x-y|$ et on obtient

$$\begin{aligned}|K_\varepsilon(x,y)-K_\varepsilon(x,y+z)|&\le\sum_{2^j|y-x|\le 4N}2^jC2^{j\beta}|z|^\beta\|\omega\|_\infty\cdot 3\\&\le C'\frac{|z|^\beta}{|x-y|^{1+\beta}}\qquad\text{pour }|z|<\tfrac{1}{2}|x-y|\,.\end{aligned}$$

On obtient de même

$$|K_\varepsilon(x,y) - K_\varepsilon(x+z,y)| \le C' \frac{|z|^\beta}{|x-y|^{1+\beta}} \qquad \text{pour } |z| < \tfrac{1}{2}|x-y|\,.$$

Enfin, il suffit de vérifier que

$$\Big\| \sum_{j,k} \lambda_{j,k}\omega_{j,k} \Big\|_2^2 \le C \sum_{j,k} |\lambda_{j,k}|^2$$

pour obtenir

$$\|T_\varepsilon f\|_2^2 \le C \sum_{j,k} |\langle f \mid \psi_{j,k}\rangle|^2 \le C\|f\|_2^2\,.$$

Or cette inégalité est élémentaire (voir [2] par exemple).

Les T_ε, $\varepsilon \in \{-1,1\}^{\mathbb{Z}^2}$, vérifient donc (11.1) à (11.4) uniformément; ils sont donc équicontinus sur $L^p(vdx)$ lorsque $v \in A_p$ et (9bis) est donc démontré.

Pour démontrer (10bis), posons $S_\varepsilon = T_\varepsilon \circ (\mathrm{Id} - P_{j_0})$:

$$S_\varepsilon f = \sum_{j \ge j_0} \sum_k \varepsilon(j,k)\langle f \mid \psi_{j,k}\rangle \omega_{j,k}\,.$$

Il est clair qu'à nouveau les S_ε, $\varepsilon \in \{-1,1\}^{\mathbb{Z}^2}$, vérifient (11.1) à (11.4) uniformément. De plus le noyau $G_\varepsilon(x,y)$ de S_ε vérifie

$$G_\varepsilon(x,y) = 0 \qquad \text{si } |x-y| \ge 2N\cdot(1/2)^{j_0}\,.$$

Supposons maintenant que v satisfasse le critère de Muckenhoupt aux petites échelles :

$$\sup_{|I| \le 1} \frac{1}{|I|} |||\chi_I|||_{p,v} |||\chi_I|||_{p,v,*} < \infty\,.$$

On considère $f \in L^p(vdx)$ et on pose $f_k = f\chi_{[k/2^{j_0},(k+1)/2^{j_0}]}$. On va montrer que

$$|||S_\varepsilon f_k|||_{p,v} \le C|||f_k|||_{p,v}$$

où C est indépendante de ε et de k. Comme $\operatorname{Supp} S_\varepsilon f_k \subset [(k-2N)/2^{j_0}, (k+2N+1)/2^{j_0}]$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} |||S_\varepsilon f|||_{p,v} &\le \sum_{r=0}^{4N} \Big|\Big|\Big| \sum_{k\in\mathbb{Z}} S_\varepsilon f_{r+(4N+1)k} \Big|\Big|\Big|_{p,v} \\ &\le (4N+1)^{(p-1)/p} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |||S_\varepsilon f_k|||_{p,v}^p \Big)^{1/p} \\ &\le C(4N+1)^{(p-1)/p} |||f|||_{p,v} \end{aligned}$$

et (10bis) sera démontré.

Pour estimer $|||S_\varepsilon f_k|||_{p,v}$ on définit le poids v_k par :

(i) $v_k = v$ sur $\left[\dfrac{k-2N}{2^{j_0}}, \dfrac{k+2N+1}{2^{j_0}}\right]$,

(ii) $v_k(x) = v\left(2\dfrac{k+2N+1}{2^{j_0}} - x\right)$ sur $\left[\dfrac{k+2N+1}{2^{j_0}}, \dfrac{k+6N+2}{2^{j_0}}\right]$,

(iii) v_k est étendu en dehors de $[(k-2N)/2^{j_0}, (k+6N+2)/2^{j_0}]$ par périodicité de période $(8N+2)/2^{j_0}$.

Alors :

(j) $|||S_\varepsilon f_k|||_{p,v_k} = |||S_\varepsilon f_k|||_{p,v}$ et $|||f_k|||_{p,v_k} = |||f_k|||_{p,v}$,

(jj) $\sup_k \sup_I |I|^{-1} |||\chi_I|||_{p,v_k} |||\chi_I|||_{p,v_k,*} < \infty$.

En effet, si $|I| \geq (8N+2)/2^{j_0}$, alors si

$$2^q \frac{8N+2}{2^{j_0}} \leq |I| \leq 2^{q+1} \frac{8N+2}{2^{j_0}},$$

on a

$$2^{q/p} |||\chi_{[0,(8N+2)/2^{j_0}]}|||_{p,v_k} \leq |||\chi_I|||_{p,v_k} \leq 2^{(q+1)/p} |||\chi_{[0,(8N+2)/2^{j_0}]}|||_{p,v_k},$$

$$\begin{aligned} 2^{q(p-1)/p} & |||\chi_{[0,(8N+2)/2^{j_0}]}|||_{p,v_k,*} \\ & \leq |||\chi_I|||_{p,v_k,*} \leq 2^{(q+1)(p-1)/p} |||\chi_{[0,(8N+2)/2^{j_0}]}|||_{p,v_k,*} \end{aligned}$$

et

$$|||\chi_{[0,(8N+2)/2^{j_0}]}|||_{p,v_k} = 2^{1/p} |||\chi_{[(k-2N)/2^{j_0},(k+2N+1)/2^{j_0}]}|||_{p,v},$$

$$|||\chi_{[0,(8N+2)/2^{j_0}]}|||_{p,v_k,*} = 2^{(p-1)/p} |||\chi_{[(k-2N)/2^{j_0},(k+2N+1)/2^{j_0}]}|||_{p,v,*}$$

et enfin,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|I|} |||\chi_I|||_{p,v_k} |||\chi_I|||_{p,v_k,*} & \leq \frac{2^{j_0+2}}{8N+2} |||\chi_{[(k-2N)/2^{j_0},(k+2N+1)/2^{j_0}]}|||_{p,v} \\ & \quad \times |||\chi_{[(k-2N)/2^{j_0},(k+2N+1)/2^{j_0}]}|||_{p,v,*} \\ & \leq 2\alpha\left(\frac{4N+1}{2^{j_0}}\right). \end{aligned}$$

Supposons maintenant $|I| \leq (8N+2)/2^{j_0}$. Trois cas sont alors possibles :

(i) I est entièrement contenu dans un translaté de

$$\left[\frac{k-2N}{2^{j_0}}, \frac{k+2N+1}{2^{j_0}}\right] \quad \text{ou} \quad \left[\frac{k+2N+1}{2^{j_0}}, \frac{k+6N+2}{2^{j_0}}\right].$$

Alors $|I|^{-1} |||\chi_I|||_{p,v_k} |||\chi_I|||_{p,v_k,*}$ se contrôle immédiatement par $\alpha(|I|)$.

(ii) I contient un translaté de

$$\left[\frac{k-2N}{2^{j_0}}, \frac{k+2N+1}{2^{j_0}}\right] \quad \text{ou} \quad \left[\frac{k+2N+1}{2^{j_0}}, \frac{k+6N+2}{2^{j_0}}\right].$$

Alors $|I| \geq (4N+1)/2^{j_0}$ tandis que
$$|||\chi_I|||_{p,v_k} \leq |||\chi_{[0,(8N+2)/2^{j_0}]}|||_{p,v_k}$$
et
$$|||\chi_I|||_{p,v_k,*} \leq |||\chi_{[0,(8N+2)/2^{j_0}]}|||_{p,v_k,*}\,.$$
On obtient alors
$$\begin{aligned}\frac{1}{|I|}&|||\chi_I|||_{p,v_k}|||\chi_I|||_{p,v_k,*}\\ &\leq 2\frac{1}{|[0,(8N+2)/2^{j_0}]|}|||\chi_{[0,(8N+2)/2^{j_0}]}|||_{p,v_k}|||\chi_{[0,(8N+2)/2^{j_0}]}|||_{p,v_k,*}\\ &\leq 4\alpha\Big(\frac{4N+1}{2^{j_0}}\Big)\,.\end{aligned}$$

(iii) Dans le cas contraire, on a $I = \tilde{I} \cup \tilde{\tilde{I}}$ où $\tilde{I}$ et $\tilde{\tilde{I}}$ ont une extrémité commune et sont contenus dans des translatés de
$$\Big[\frac{k-2N}{2^{j_0}}, \frac{k+2N+1}{2^{j_0}}\Big] \quad \text{et} \quad \Big[\frac{k+2N+1}{2^{j_0}}, \frac{k+6N+2}{2^{j_0}}\Big]\,.$$
Si $|\tilde{I}| \geq |\tilde{\tilde{I}}|$, on a
$$|||\chi_{\tilde{\tilde{I}}}|||_{p,v_k} \leq |||\chi_{\tilde{I}}|||_{p,v_k}\,, \qquad |||\chi_{\tilde{\tilde{I}}}|||_{p,v_k,*} \leq |||\chi_{\tilde{I}}|||_{p,v_k,*}\,,$$
et donc
$$\frac{1}{|I|}|||\chi_I|||_{p,v_k}|||\chi_I|||_{p,v_k,*} \leq \frac{2}{|I|}|||\chi_{\tilde{I}}|||_{p,v_k}|||\chi_{\tilde{I}}|||_{p,v_k,*} \leq 4\alpha(|\tilde{I}|)\,.$$
Au total,
$$\sup_I \frac{1}{|I|}|||\chi_I|||_{p,v_k}|||\chi_I|||_{p,v_k,*} \leq 4 \sup_{|I|\leq(4N+1)/2^{j_0}} \frac{1}{|I|}|||\chi_I|||_{p,v}|||\chi_I|||_{p,v,*}\,.$$
Les v_k sont donc uniformément dans la classe A_p et on a bien
$$|||S_\varepsilon f_k|||_{p,v_k} \leq C|||f|||_{p,v_k}$$
uniformément par rapport à ε et à k.

La proposition 2 est donc démontrée.

Bibliographie

[1] I. Daubechies, *Orthonormal basis of compactly supported wavelets*, Comm. Pure Appl. Math. 41 (1988), 909–996.

[2] P. G. Lemarié, *Fonctions à support compact dans les analyses multi-résolutions*, Rev. Mat. Iberoamericana 7 (1991), 157–182.

[3] P. G. Lemarié et G. Malgouyres, *Support des fonctions de base dans une analyse multi-résolution*, C. R. Acad. Sci. Paris 313 (1991), 377–380.

[4] G. Malgouyres, *Analyse multi-résolution sur l'intervalle : algorithmes rapides*, preprint, Univ. Paris-XI, 1991.
[5] S. Mallat, *Multiresolution approximation and wavelet bases of* $L^2(\mathbb{R})$, Trans. Amer. Math. Soc. 315 (1989), 69–87.
[6] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs*, tome I, Hermann, Paris, 1990.
[7] —, *Ondelettes et opérateurs*, tome II, Hermann, Paris, 1991.

UA CNRS 757
UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
MATHÉMATIQUES
BÂTIMENT 425
91405 ORSAY CEDEX, FRANCE

Received March 3, 1992
Revised version July 6, 1993 (2914)