STUDIA MATHEMATICA 107 (2) (1993)

Quelques espaces fonctionnels associés à des processus gaussiens

par

Z. CIESIELSKI (Gdańsk), G. KERKYACHARIAN (Amiens)
et B. ROYNETTE (Nancy)

Abstract. The first part of the paper presents results on Gaussian measures supported by general Banach sequence spaces and by particular spaces of Besov–Orlicz type. In the second part, a new constructive isomorphism between the just mentioned sequence spaces and corresponding function spaces is established. Consequently, some results on the support function spaces for the Gaussian measure corresponding to the fractional Brownian motion are proved. Next, an application to stochastic equations is given. The last part of the paper contains a result on the support function spaces for stable processes with independent increments.

I. Introduction. Soit $\chi_1 = 1$, χ_{jk}, $j = 0, 1, \ldots$; $k = 1, \ldots, 2^j$, $\operatorname{supp}\chi_{jk} = [(k-1)/2^j, k/2^j]$, l'ensemble des fonctions de Haar de l'intervalle $[0,1]$, et soit $\varphi_0(t) = 1$, $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_{jk}(t) = \int_0^t \chi_{jk}(s)\,ds$ l'ensemble des fonctions de Schauder. Il est bien connu que toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ s'écrit

$$f(t) = f_0\varphi_0(t) + f_1\varphi_1(t) + \sum_{j,k} f_{jk}\varphi_{jk}(t) \tag{I.1}$$

où les coefficients f_{jk} sont donnés par les "évaluations" de f :

$$\begin{gathered} f_0 = f(0), \quad f_1 = f(1) - f(0), \\ f_{jk} = 2\cdot 2^{j/2}\left\{ f\left(\frac{2k-1}{2^{j+1}}\right) - \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{2k}{2^{j+1}}\right) + f\left(\frac{2k-2}{2^{j+1}}\right)\right)\right\}. \end{gathered} \tag{I.2}$$

Ces formules permettent de montrer que l'appartenance de f à certains espaces de Banach (espaces de Besov $\mathcal{B}_{\alpha,p,q}$, espaces modelés sur des espaces d'Orlicz $\mathcal{B}_{\alpha,M,\infty}$, espaces associés à certains modules de continuité) est équivalente à l'appartenance de ses coefficients f_{jk} à certains espaces de Banach de suites. Le paragraphe III de ce papier est consacré à montrer ces équivalences et nous permet de disposer d'un "dictionnaire" permettant

1991 *Mathematics Subject Classification*: 28C20, 41A15, 60B01, 60G15, 60G17.

de lire les propriétés fonctionnelles d'une fonction f en termes d'espace de Banach de suites.

Soit maintenant B_t ($t \in [0,1]$) un processus gaussien à trajectoires continues. La formule (I.1) permet alors d'écrire

$$B_t = g_0\varphi_0(t) + g_1\varphi_1(t) + \sum_{j,k} g_{jk}\varphi_{jk}(t)$$

où les (g_0, g_1, g_{jk}) forment une suite gaussienne. L'appartenance de $t \to B_t$ à certains espaces fonctionnels va donc se lire sur les propriétés de la suite (g_{jk}), et donc sur sa covariance. C'est pourquoi le paragraphe II est consacré à l'étude des suites de v.a. (g_{jk}) gaussiennes et à leur appartenance à des espaces de Banach de suites. Nous avons préféré, pour des raisons de clarté, étudier dans ce paragraphe de façon autonome les espaces de suites gaussiennes sans référence aux processus gaussiens ni aux théorèmes d'isomorphisme du paragraphe III. Cette démarche permet de mettre en évidence la dichotomie existant entre les espaces de Banach séparables, où la mesure gaussienne charge toutes les boules ouvertes, et les espaces de Banach non séparables, où apparaît un "phénomène de trou" : il existe une boule ouverte centrée à l'origine non chargée. Ce phénomène est classique (cf. [T] ou [DHJS]). Notons aussi que, pour l'étude de ces suites gaussiennes, nous faisons un usage important des propriétés d'hypercontractivité du semi-groupe d'Ornstein–Uhlenbeck.

Le paragraphe IV consiste simplement à rassembler les résultats des paragraphes II et III pour obtenir des théorèmes d'appartenance de certains processus gaussiens à des espaces de Banach : espaces de Besov, espaces modelés sur un espace d'Orlicz, espaces liés à des modules de continuité. En particulier, nos résultats s'appliquent au mouvement brownien fractionnaire d'indice α, i.e. au processus gaussien sur $[0,1]$ dont la covariance est donnée par

$$K_\alpha(t,s) = E(B_t^\alpha B_s^\alpha) = \frac{1}{2}(|t|^\alpha + |s|^\alpha - |t-s|^\alpha) \quad (0 < \alpha < 2)$$

(la situation $\alpha = 1$ est celle du mouvement brownien classique).

L'une des conséquences des résultats d'appartenance décrits ci-dessus est qu'il est possible de définir, par dualité, l'intégrale stochastique de Stratonovitch anticipante pour une large classe de processus. En particulier, pour le mouvement brownien fractionnaire d'indice α, si $\alpha > 1$, ces techniques permettent de montrer l'existence et l'unicité de la solution des équations différentielles stochastiques, bien que le processus B^α n'ait pas de propriété de martingale ni de markovianité. Enfin, nous montrons que les techniques développées ici s'appliquent à d'autres processus que les processus gaussiens, en l'occurrence des bruits blancs stables.

Nous remercions vivement le referee qui nous a fait part de plusieurs remarques intéressantes, notamment en ce qui concerne le théorème II.6 et la separabilité des espaces gaussiens.

II. Quelques espaces de suites gaussiennes. L'espace de toutes les suites est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, avec $\mathbb{N} = \{0,1,\ldots\}$. Pour $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, la double notation $x = (x_n) = (x_{jk})$ sera utilisée, avec :

$$(x_n) = (x_n, n \in \mathbb{N}) \quad \text{et}$$
$$(x_{jk}) = (x_0, x_1, x_{jk}; j \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, 2^j; \text{ et } x_{jk} = x_{2^j+k}).$$

Dans toute la suite de ce paragraphe $g = (g_n) = (g_{jk})$ désignera un vecteur gaussien tel que les v.a. g_n soient centrées et de variance égale à 1. On utilisera l'hypothèse suivante :

(H) Il existe $\delta > 0$ et une constante $C_\delta > 0$ telle que, pour tous $1 \le k, k' \le 2^j$,

$$|E(g_{jk}g_{jk'})| \le \frac{C_\delta}{(1+|k'-k|)^\delta}.$$

Nous utilisons ici l'hypothèse (H) car cette condition est satisfaite par les composantes du mouvement brownien fractionnaire sur la base de Schauder (cf. lemme IV.2).

A. *Les espaces $\mathcal{S}_p$.* Pour $1 \le p < \infty$, on notera

$$\|x_{j\cdot}\|_p = \Big(\sum_{k=1}^{2^j} |x_{jk}|^p\Big)^{1/p} \tag{II.1}$$

et on définit la norme $\|\cdot\|_{(p)}$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par

$$\|x\|_{(p)} = \sup(|x_0|, |x_1|, \sup_j 2^{-j/p}\|x_{j\cdot}\|_p). \tag{II.2}$$

L'ensemble des $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que $\|x\|_{(p)} < \infty$, muni de cette norme, est ainsi un espace de Banach, non séparable, que l'on désignera par $\mathcal{S}_p$. On notera $\mathcal{S}_p^0$ le sous-espace fermé de $\mathcal{S}_p$ constitué des suites x de $\mathcal{S}_p$ telles que $\lim_{j\to\infty} 2^{-j/p}\|x_{j\cdot}\|_p = 0$. C'est un espace de Banach séparable.

Dans toute la suite, on notera $c_p = E(|g_0|^p)$, où g_0 est une v.a. gaussienne réduite, et $k_p = (c_p)^{1/p}$.

Théorème II.1. *Soit g une suite gaussienne satisfaisant à* (H). *Alors :*

1. *Presque sûrement, $k_p \le \|g\|_{(p)} < \infty$.*
2. *g appartient p.s. à $\mathcal{S}_p$ et n'appartient pas, p.s., à $\mathcal{S}_p^0$.*

Observons que $\mathcal{S}_p$ n'est pas un espace de Wiener abstrait, puisqu'il n'est pas séparable et puisque la boule de centre l'origine et de rayon k_p est de mesure nulle d'après 1 (cf. [T] et [DHJS] pour une étude de la non séparabilité et l'existence d'un "trou" dans la probabilité).

Démonstration du théorème II.1. En fait, nous allons montrer que, sous l'hypothèse (H),

$$2^{-j/p}\Big(\sum_k |g_{jk}|^p\Big)^{1/p} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} k_p \quad \text{p.s.}, \tag{II.3}$$

et il est évident que (II.3) implique le théorème II.1.

Pour établir (II.3) nous aurons besoin des lemmes suivants :

Lemme II.2 (cf. [G], [C6]). *Soit (X, Y) un couple gaussien centré tel que $E(X^2) = E(Y^2) = 1$, $|E(XY)| = \varrho$. Alors, pour toutes fonctions mesurables f et g telles que $Ef(X)^2 < \infty$, $Eg(X)^2 < \infty$ et $f(X)$, $g(Y)$ soient centrées, on a*

$$|E(f(X)g(Y))| \le \varrho[E(f(X)^2)]^{1/2}[E(g(X)^2)]^{1/2}.$$

Si de plus f (ou g) est paire, on peut remplacer ϱ par ϱ^2 dans l'inégalité précédente.

Démonstration. On pourra trouver cette démonstration dans [C6]. Ce lemme est classique. Indiquons en brièvement les grandes lignes. Ecrivons $X = \xi$, $Y = \varrho\xi + \sqrt{1-\varrho^2}\,\eta$, avec (ξ, η) couple gaussien réduit. On a alors

$$E(f(X)g(Y)) = E(f(\xi)g(\varrho\xi + \sqrt{1-\varrho^2}\eta)) = E(f(\xi)O_t g(\xi))$$

en notant O_t le semi-groupe d'Ornstein–Uhlenbeck, et où $\varrho = e^{-t}$. Décomposant alors $f(\xi)$ (resp. $g(\xi)$) sur les chaos de Wiener, on a

$$f(\xi) = \sum_{n\ge1} f_n, \qquad g(\xi) = \sum_{n\ge1} g_n$$

(il n'y a pas d'indice 0 dans la somme à cause de l'hypothèse de centrage). Il reste alors à observer que $O_t g_n = e^{-nt} g_n$ pour écrire

$$E(f(X)g(Y)) = E\Big\{\sum_{n\ge1} e^{-nt} f_n g_n\Big\},$$

et le lemme s'en déduit immédiatement. Notons que, si f est symétrique, $f = \sum_{n\ge2} f_n$, ce qui explique dans ce cas la présence de ϱ^2 au lieu de ϱ dans l'inégalité annoncée.

Lemme II.3. *Sous l'hypothèse* (H), *on a*

$$E\Big[\sum_k(|g_{jk}|^p - c_p)\Big]^2 \le c(\delta)c_{2p}2^{2j(1-\delta)} \tag{II.4}$$

($c(\delta)$ est ici la constante dont (H) *affirme l'existence; rappelons que $c_{2p} = E(g_0^{2p}) = (2p)!/(p!\,2^p)$ si p est entier).*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}E\Big\{\Big[\sum_k(|g_{jk}|^p - c_p)\Big]^2\Big\} &= E\Big\{\sum_{k,k'}(|g_{jk}|^p - c_p)(|g_{jk'}|^p - c_p)\Big\}\\ &\le (c_{2p} - c_p^2)\sum_{k,k'}|E(g_{jk}g_{jk'})|^2\end{aligned}$$

(d'après le lemme II.2 appliqué à $f(x) = g(x) = |x|^p - c_p$)

$$\le c_{2p}\sum_{k,k'}\frac{c_\delta^2}{(1+|k'-k|)^{2\delta}} \quad \text{(d'après (H))}$$

$$\le c_\delta^2 c_{2p} 2^{2j(1-\delta)}.$$

Lemme II.4. *Sous l'hypothèse* (H), *pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\sum_j P\Big\{2^{-j/p}\Big(\sum_k |g_{jk}|^p\Big)^{1/p} \notin [k_p - \varepsilon, k_p + \varepsilon]\Big\} < \infty.$$

Il est évident, d'après Borel–Cantelli, que le lemme II.4 implique (II.3), et donc le théorème II.1.

Démonstration du lemme II.4.

$$\begin{aligned}P\Big\{2^{-j/p}\Big(\sum|g_{jk}|^p\Big)^{1/p} &\notin [k_p - \varepsilon, k_p + \varepsilon]\Big\}\\ &= P\Big\{\Big|\sum(|g_{jk}|^p - c_p)\Big| \ge 2^j\varepsilon'_p\Big\}\\ &\le \frac{1}{2^{2j}\varepsilon_p'^2}E\Big\{\Big[\sum(|g_{jk}|^p - c_p)\Big]^2\Big\}\end{aligned}$$

(d'après l'inégalité de Markov avec $\varepsilon'_p = (k_p + \varepsilon)^p - c_p$)

$$\le c(\delta)c_{2p}\frac{2^{2j(1-\delta)}}{\varepsilon_p'^2 2^{2j}} \le \frac{c}{2^{2j\delta}} \quad \text{(d'après le lemme II.3).}$$

Ceci prouve le lemme II.4. Le théorème II.1 est ainsi prouvé.

B. *Que se passe-t-il quand $p \to \infty$?* On vient de voir que g appartient p.s. à $\mathcal{S}_p$ $(1 \le p < \infty)$ et l'on voudrait maintenant étudier ce qui se passe lorsque $p \to \infty$. Bien sûr, si l'on définit, pour $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

$$\|x\|_{(\infty)} = \sup_n |x_n| = \lim_{p\to\infty}\uparrow \|x\|_{(p)},$$

il est clair que $\|g\|_{(\infty)} = \infty$ p.s. Il n'est donc pas très intéressant de faire tendre p "brutalement" vers l'infini.

Nous allons maintenant montrer qu'il est possible, de deux façons, de faire tendre p de "manière douce" vers l'infini de façon que "tout continue à être fini".

B1. Définissons la nouvelle norme

$$\|x\|_{(\exp)} = \sup_{j,p} \frac{1}{\sqrt{p}} 2^{-j/p} \|x_{j\cdot}\|_p \tag{II.5}$$

(la notation (exp) sera justifiée au chapitre III).

Il est clair que la norme $\|x\|_{(\exp)}$ est plus grande (au sens de la comparaison des normes) que chacune des normes $\|\cdot\|_{(p)}$.

Définissons $\mathcal{S}_{\exp} = \{x : \|x\|_{(\exp)} < \infty\}$ et $\mathcal{S}^0_{\exp}$ le sous-espace fermé des $x \in \mathcal{S}_{\exp}$ tels que

$$\sup_p \frac{1}{\sqrt{p}} 2^{-j/p} \|x_{j\cdot}\|_p \xrightarrow[j\to\infty]{} 0 .$$

THÉORÈME II.5. *Sous l'hypothèse* (H) :

1. *Il existe une constante* $c_{\exp} > 0$ *telle que, p.s.,*

$$c_{\exp} \le \|g\|_{(\exp)} < \infty \quad \textit{avec} \quad c_{\exp} = \sup_p \frac{1}{\sqrt{p}} k_p . \tag{II.6}$$

2. g *appartient p.s. à* $\mathcal{S}_{\exp}$ *et* g *n'appartient pas, p.s., à* $\mathcal{S}^0_{\exp}$.

Il est clair que $\mathcal{S}_{\exp}$ n'est pas un espace de Wiener abstrait, puisqu'il n'est pas séparable et que la boule de centre 0 et de rayon $c_{\exp}$ n'est pas chargée (cf. [DHJS] ou [T]).

Démonstration du théorème II.5. Nous allons en fait montrer que, pour λ assez grand,

$$\sum_{j,p} P\Big\{ \frac{1}{\sqrt{p}} 2^{-j/p} \Big(\sum_k |g_{jk}|^p \Big)^{1/p} > \lambda \Big\} < \infty , \tag{II.7}$$

ce qui, d'après Borel–Cantelli, suffit à montrer la partie droite de (II.6). La partie gauche de (II.6) et le point 2 découlent du théorème II.1 et du fait que la norme $\|\cdot\|_{(\exp)}$ est plus grande que chaque norme $\|\cdot\|_{(p)}$. Montrons donc (II.7). On a, en remplaçant p par $2p$ et en supposant p entier,

$$\begin{aligned} P\Big\{ \frac{1}{\sqrt{2p}} 2^{-j/(2p)} \Big(\sum_k |g_{jk}|^{2p} \Big)^{1/(2p)} \ge \lambda \Big\} &= P\Big\{ 2^{-j} \sum_k (|g_{jk}|^{2p} - c_{2p}) \ge \lambda^{2p} (2p)^p - c_{2p} \Big\} \\ &\le P\Big\{ 2^{-j} \sum_k (|g_{jk}|^{2p} - c_{2p}) \ge (2p)^p [\lambda^{2p} - ce^{-p}] \Big\} \end{aligned}$$

(où la constante $c > 1$ est telle que $c_{2p} \le ce^{-p}(2p)^p$; notons que $c_{2p} = (2p)!/(p!\,2^p) \underset{p\to\infty}{\sim} e^{-p} 2^{p+1/2} p^p$)

$$\le P\Big\{ 2^{-j} \sum_k (|g_{jk}|^{2p} - c_{2p}) \ge (2p)^p \frac{\lambda^{2p}}{2} \Big\}$$

dès que $\lambda > (2c/e)^{1/2}$.

Appliquant alors l'inégalité de Bienaymé–Tchebyschev et le lemme II.3, on obtient, avec des constantes $c' = c(\delta)$ et c'',

$$P\Big\{ \frac{1}{\sqrt{2p}} 2^{-j/(2p)} \Big(\sum_k |g_{jk}|^{2p} \Big)^{1/(2p)} \ge \lambda \Big\} \le \frac{c'}{2^{2j\delta} (\lambda c'')^{4p}} .$$

Ceci prouve (II.7) et le théorème II.5.

B2. Venons-en à la seconde façon de faire tendre p "doucement" vers l'infini. D'après le théorème II.1 et le théorème de Fernique, on sait qu'il existe, pour tout $1 \le p < \infty$, un $\gamma > 0$ tel que

$$E \exp(\gamma \|g\|^2_{(p)}) < \infty . \tag{II.8}$$

Définissons $\chi_p = \sup\{\gamma : E\exp(\gamma\|g\|^2_{(p)}) < \infty\}$.

Une question naturelle (puisque χ_p décroît avec p du fait que $\|\cdot\|_{(p)}$ croît avec p) est: que vaut $\lim_{p\to\infty} \chi_p$? Cette limite est-elle nulle ou strictement positive?

THÉORÈME II.6. *Il existe une constante* $\chi_\infty > 0$ *telle que, pour tout* p, $\chi_p \ge \chi_\infty > 0$. *Autrement dit, il existe une constante* $\chi > 0$, *indépendante de* p, *telle que*

$$E \exp(\chi \|g\|^2_{(p)}) < \infty \quad \textit{pour tout } p .$$

Démonstration. Nous avions une démonstration de ce théorème basée sur l'hypercontractivité du semi-groupe d'Ornstein–Uhlenbeck. La démonstration suivante, plus simple, nous a été communiquée par M. Ledoux. Nous l'en remercions vivement. Si X_t $(t \in T)$ est un processus gaussien centré borné p.s., alors (cf. [LT])

$$\chi = \sup\{\gamma > 0 : E\exp(\gamma \sup_t |X_t|^2) < \infty)\} = \frac{1}{2\sup_t E(X_t)^2} .$$

Ici, le "processus" à considérer est $(1/p + 1/q = 1)$:

$$\sum_{j\ge1} \sum_{k=1}^{2^j} g_{jk} a_{jk}, \quad \sum_{j\ge1} \sum_{k=1}^{2^j} 2^{j/p} \|a_{j\cdot}\|_q \le 1 ,$$

puisque, par dualité,

$$\|g\|_{(p)} = \sup \Big\{ \sum_{j\ge1} \sum_{k=1}^{2^j} g_{jk} a_{jk} : \sum_{j\ge1} \sum_{k=1}^{2^j} 2^{j/p} \|a_{j\cdot}\|_q \le 1 \Big\} .$$

Minorer uniformément en p les χ_p revient donc à majorer, uniformément en p, la quantité

$$\sup\Big\{E\Big|\sum_{j\geq 1}\sum_{k=1}^{2^j} g_{jk}a_{jk}\Big|^2 : \sum_{j\geq 1}\sum_{k=1}^{2^j} 2^{j/p}\|a_{j\cdot}\|_q \leq 1\Big\}.$$

Mais

$$E\Big|\sum_{j\geq 1}\sum_{k=1}^{2^j} g_{jk}a_{jk}\Big|^2 \leq \Big(\sum_{j\geq 1}\sum_{k=1}^{2^j}|a_{jk}|\Big)^2 \leq \Big(\sum_{j\geq 1} 2^{j/p}\|a_{j\cdot}\|_q\Big)^2 \leq 1,$$

ci qui prouve le théorème.

C. *La norme de P. Lévy* (1). Pour $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, définissons

$$\|x\|_{\mathrm{L}} = \sup_j \frac{1}{\sqrt{j}}\sup_k |x_{jk}|$$

(la notation $\|\cdot\|_{\mathrm{L}}$ est pour Lévy, et la justification de cette notation sera faite au paragraphe III). Définissons

$$\mathcal{S}_{\mathrm{L}} = \{x : \|x\|_{\mathrm{L}} < \infty\} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_{\mathrm{L}}^0 = \Big\{x \in \mathcal{S}_{\mathrm{L}} : \lim_{j\to\infty}\frac{1}{\sqrt{j}}\sup_k |x_{jk}| = 0\Big\}.$$

$\mathcal{S}_{\mathrm{L}}$ est un espace de Banach non séparable tandis que $\mathcal{S}_{\mathrm{L}}^0$ est un sous-espace fermé et séparable de $\mathcal{S}_{\mathrm{L}}$.

THÉORÈME II.7. *Sous l'hypothèse* (H) :

1) *Il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$c \leq \|g\|_{\mathrm{L}} < \infty \quad p.s.$$

2) *g appartient p.s. à $\mathcal{S}_{\mathrm{L}}$ et g n'appartient pas, p.s., à $\mathcal{S}_{\mathrm{L}}^0$.*

Il est clair que $\mathcal{S}_{\mathrm{L}}$ n'est pas un espace de Wiener abstrait puisqu'il n'est pas séparable et que la boule de centre l'origine et de rayon c n'est pas chargée.

Démonstration du théorème II.7. La partie $\|g\|_{\mathrm{L}} < \infty$ p.s. est la plus facile. Elle résulte du lemme classique suivant.

LEMME II.8. *Pour toute suite de v.a. (g_{jk}) gaussiennes réduites,*

$$\limsup_{j\to\infty}\frac{1}{\sqrt{j}}\sup_k |g_{jk}| \leq \sqrt{2\log 2} \quad p.s.$$

Démonstration. Soit $C > \sqrt{2\log 2}$. On a

$$P\Big\{\frac{1}{\sqrt{j}}\sup_k |g_{jk}| > C\Big\} \leq \sum_k P\{|g_{jk}| > C\sqrt{j}\} \leq 2^j\exp(-C^2 j/2)$$

(1) Au chap. III, l'espace $\mathcal{S}_{\mathrm{L}}$ sera $\mathcal{S}^{\omega}_{\infty,\infty}$ avec $\omega(t) = \sqrt{t\log(1/t)}$.

pour j assez grand et donc

$$\sum_j P\Big\{\frac{1}{\sqrt{j}}\sup_k |g_{jk}| > C\Big\} < \infty \quad \text{dès que} \quad C > \sqrt{2\log 2}.$$

Ceci montre, d'après Borel–Cantelli, le lemme II.8.

Notons que, sous l'hypothèse d'indépendance, la même ligne d'arguments conduit à

$$\lim_{j\to\infty}\frac{1}{\sqrt{j}}\sup_k |g_{jk}| = \sqrt{2\log 2} \quad \text{p.s.}$$

Il reste à prouver que, sous (H), il existe $c > 0$ telle que $\|g\|_{\mathrm{L}} \geq c$ p.s.

LEMME II.9. *Soient $g_1, \ldots, g_n$ n gaussiennes centrées telles que*

(i) $E(g_i^2) = 1$,
(ii) $E(g_i g_j) = \varrho^2 \quad (i \neq j)$.

Alors pour tout M,

(II.9) $$P\{\sup_{i=1,\ldots,n}|g_i| \leq M\} \leq P\{|g_1| \leq M\}^{n/(1+(n-1)\varrho^2)}.$$

Démonstration. Soient $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_n$ $(n+1)$ gaussiennes réduites indépendantes. On pose

$$g_i = \varrho\xi + \sqrt{1-\varrho^2}\,\xi_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On a

$$E\{f(g_1)\ldots f(g_n)\} = \|O_t f\|_n^n$$

où O_t est le semi-groupe d'Ornstein–Uhlenbeck et où $\varrho = e^{-t}$.

Soit r tel que $1 + (r-1)e^{2t} = n$, i.e. $r = 1 + (n-1)\varrho^2$. On sait que O_t est borné de L_r dans L_n (cf. [N]). D'où

$$\|O_t f\|_n^n \leq \|f\|_r^n = \|f\|^n_{1+(n-1)\varrho^2}.$$

Le lemme découle alors de cette inégalité appliquée avec $f = 1_{[-M,M]}$.

Observons que (II.9) est également vraie sous la forme

$$P\{\sup_{i=1,\ldots,n} g_i \leq M\} \leq P\{g_1 \leq M\}^{n/(1+(n-1)\varrho^2)}.$$

(On utilise l'inégalité précédente avec $f = 1_{]-\infty,M]}$.)

LEMME II.10. *Sous* (H), *il existe $c > 0$ telle que*

$$\liminf_{j\to\infty}\frac{1}{\sqrt{j}}\sup_k |g_{jk}| > c \quad p.s.$$

Bien sûr, le lemme II.10, joint au lemme II.9, implique le théorème II.7.

Démonstration du lemme II.10. Soit $\delta > 0$ comme dans (H) et soit s tel que $0 < s < 1$. Il est clair que

$$P\{\sup_k g_{jk} \le c\sqrt{j}\} \le P\{\sup_{k=1,2^{js},2\cdot 2^{js},\ldots,2^j} g_{jk} < c\sqrt{j}\}. \tag{II.10}$$

Or, les v.a. $g_{j,1}, g_{j,2^{js}}, g_{j,2\cdot 2^{js}}, \ldots, g_{j,2^j}$ ont d'après (H) une covariance plus petite que $c(\delta)/2^{js\delta}$. D'après le lemme de Slépian (cf. [LT], p. 74), on peut majorer $P\{\sup_k g_{jk} < c\sqrt{j}\}$ par le second membre de (II.10) en supposant que les $2^{j(1-s)}$ variables intervenant dans le second membre de (II.10) ont une covariance constante égale à $c/2^{js\delta}$.

Appliquant alors le lemme II.9, on obtient

$$P\{\sup_k g_{jk} < c\sqrt{j}\} \le P\{g_1 < c\sqrt{j}\}^{2^{j(1-s)}/(1+c2^{j(1-s)}2^{-js\delta})},$$

soit

$$P\{\sup_k g_{jk} < c\sqrt{j}\} \le (1-\exp(-c'^2 j/2))^{2^{js\delta}}$$

avec c' proche de c et j assez grand. On en déduit sans peine que, pour c assez petit, $\sum_j P\{\sup_k g_{jk} < c\sqrt{j}\} < \infty$, ce qui prouve le lemme II.10 et le théorème II.7.

D. *Un espace séparable.* L'existence d'un trou dans la probabilité pour un espace non séparable nous incite à trouver un espace de Banach séparable tel que

$$\|g\| < \infty \quad \text{p.s.}$$

Bien sûr, de tels espaces existent. Par exemple (cf. [R] ou [Ro]), soit

$$\|x\|_{\beta,p,q} = \Big(\sum 2^{-jq(1/2-\beta+1/p)}\|x_{j\cdot}\|_p^q\Big)^{1/q}, \tag{II.11}$$
$$\mathcal{S}^\beta_{p,q} = \{x : \|x\|_{\beta,p,q} < \infty\},$$
$$\mathcal{S}^{\beta,0}_{p,\infty} = \{x \in \mathcal{S}^\beta_{p,\infty} : \lim_{j\to\infty} 2^{-j(1/2-\beta+1/p)}\|x_{j\cdot}\|_p = 0\}.$$

Il est clair que $\mathcal{S}^\beta_{p,q}$ est séparable si $q < \infty$ et que $\mathcal{S}^{\beta,0}_{p,\infty}$ est également séparable. Par ailleurs, d'après le théorème II.1 on a, sous (H) :

- $\|g\|_{\beta,p,q} < \infty$ p.s. pour $\beta < 1/2$, tout p et tout q.
- g appartient p.s. à $\mathcal{S}^{\beta,0}_{p,\infty}$ pour $\beta < 1/2$ et tout p.

Nous voudrions, dans le théorème qui suit, donner un exemple de norme plus grande que toutes celles données par (II.11) avec $\beta < 1/2$, et telle que g appartienne p.s. à un sous-espace séparable de l'espace de Banach correspondant.

Définissons, en référence à l'alinéa B1,

$$\|x\|_{\underline{\exp}} = \sup_{j,p} \frac{2^{-j/p}}{\sqrt{jp}}\|x_{j\cdot}\|_p,$$
$$\mathcal{S}_{\underline{\exp}} = \{x : \|x\|_{\underline{\exp}} < \infty\},$$
$$\mathcal{S}^{00}_{\underline{\exp}} = \Big\{x \in \mathcal{S}_{\underline{\exp}} : \lim_{p\vee j\to\infty} \frac{2^{-j/p}}{\sqrt{jp}}\|x_{j\cdot}\|_p = 0\Big\}.$$

Alors $\mathcal{S}^{00}_{\underline{\exp}}$ est un sous-espace fermé séparable de $\mathcal{S}_{\underline{\exp}}$.

Théorème II.11. *Sous* (H), *g appartient p.s. à $\mathcal{S}^{00}_{\underline{\exp}}$.*

Notons que, pour tout $\beta < 1/2$, il existe $c(\beta,p,q)$ telle que

$$\|x\|_{\beta,p,q} \le c(\beta,p,q)\|x\|_{\underline{\exp}}.$$

Démonstration du théorème II.11.

1. On a

$$\sup_{j,p} \frac{2^{-j/p}}{\sqrt{p}}\|g_{j\cdot}\|_p < \infty \quad \text{p.s.}$$

d'après le théorème II.5. On en déduit

$$\lim_{j\to\infty}\sup_p \frac{2^{-j/p}}{\sqrt{jp}}\|g_{j\cdot}\|_p = 0. \tag{II.12}$$

2. On a

$$\sup_j \frac{2^{-j/p}}{\sqrt{j}}\|g_{j\cdot}\|_p \le \sup_j \frac{1}{\sqrt{j}}\sup_k |g_{jk}| < \infty \quad \text{p.s.}$$

d'après le lemme II.8, d'où

$$\lim_{p\to\infty}\sup_j \frac{2^{-j/p}}{\sqrt{jp}}\|g_{j\cdot}\|_p = 0. \tag{II.13}$$

Le théorème II.11 est alors une conséquence de (II.12) et (II.13).

III. Isomorphismes entre espaces de suites et espaces fonctionnels

A. *Espaces de type Besov–Orlicz.* La fonction $\omega : [0,\infty[\to [0,\infty[$ est appelée un *(β,γ)-module* si elle est continue, non décroissante et s'il existe $\beta > 0, \gamma > 0$ et K finie telles que

$$\omega(0) = 0, \quad \omega(2t) \le K\omega(t), \tag{III.1}$$

$$\sum_{j_0 \le j} 2^{j\beta}\omega\Big(\frac{1}{2^j}\Big) \le K2^{j_0\beta}\omega\Big(\frac{1}{2^{j_0}}\Big), \tag{III.2}$$

$$\text{(III.3)}\qquad \sum_{0\le j\le j_0} \frac{1}{2^{j\beta}\omega(1/2^j)} \le K\frac{1}{2^{j_0\beta}\omega(1/2^{j_0})},$$

$$\text{(III.4)}\qquad \sum_{0\le j\le j_0} 2^{j\gamma}\omega\Big(\frac{1}{2^j}\Big) \le K2^{j_0\gamma}\omega\Big(\frac{1}{2^{j_0}}\Big),$$

$$\text{(III.5)}\qquad \sum_{j_0\le j} \frac{1}{2^{j\gamma}\omega(1/2^j)} \le K\frac{1}{2^{j_0\gamma}\omega(1/2^{j_0})},\qquad j_0=0,1,\ldots$$

Toutes les fonctions se comportant comme $t^\alpha(\log(1/t))^\lambda$ pour t petit, avec $\beta<\alpha<\gamma$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, sont des (β,γ)-modules.

Pour la théorie de base des espaces d'Orlicz nous renvoyons à [K]. Cependant nous allons rappeler quelques définitions et résultats qui vont nous être utiles. Une fonction $M:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ est appelée une *N-fonction* si elle est paire, convexe et satisfait à $M(0)=0$. Nous noterons dans tout ce qui suit : $\mathbb{R}_+=[0,\infty[$, $\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$ et $I=[0,1]$. L'espace d'Orlicz relatif à la N-fonction M est noté $L_M^*=L_M^*(I)$, et $L^p=L^p(I), 1\le p<\infty$, est l'espace de Lebesgue ordinaire muni de la norme

$$\|f\|_p=\Big(\int_I |f(t)|^p\,dt\Big)^{1/p}.$$

Pour une N-fonction M et pour f définie sur I et mesurable, définissons

$$\varrho(f;M)=\int_I M(f(t))\,dt.$$

Dans l'espace L_M^* nous définissons la norme

$$\|f\|_M=\sup_{\varrho(g;N)\le 1}\Big|\int_I f(t)g(t)\,dt\Big|$$

où N est la N-fonction complémentaire de M. De plus, nous avons

$$\text{(III.6)}\qquad \|f\|_M=\inf_{\lambda>0}\frac{1}{\lambda}(1+\varrho(\lambda f;M)).$$

Le *module de régularité* d'ordre k en norme d'Orlicz est défini par

$$\omega_{k,M}(f;\delta)=\sup_{0<h<\delta}\|I_{kh}\cdot\Delta_h^k f\|_M\qquad\text{avec }\ \delta k\le 1$$

où I_δ est la fonction caractéristique de l'intervalle $I\cap(I-\delta)$ et où $\Delta_h^1 f(x)=f(x+h)-f(x)$ (Δ_h^k désigne le k-ième itéré de Δ_h^1). Pour k entier, M une N-fonction et ω un $(0,\gamma)$-module, avec $\gamma\le k$ et $1\le q<\infty$, définissons

$$\text{(III.7)}\qquad \|f\|_{\omega,M,q}=\|f\|_M+\Big(\int_0^{1/k}\Big(\frac{\omega_{k,M}(f;t)}{\omega(t)}\Big)^q\frac{dt}{t}\Big)^{1/q}.$$

L'*espace de Besov-Orlicz* est alors défini par

$$\text{(III.8)}\qquad \mathcal{B}_{M,q}^{\omega}(I)=\{f\in L_M^*(I):\|f\|_{\omega,M,q}<\infty\}.$$

$(\mathcal{B}_{M,q}^{\omega}(I),\|\cdot\|_{\omega,M,q})$ est un espace de Banach séparable pour tout q fini. Pour $q=\infty$, il est non séparable, avec la norme

$$\text{(III.9)}\qquad \|f\|_{\omega,M,\infty}=\|f\|_M+\sup_{0<t<1/k}\frac{\omega_{k,M}(f;t)}{\omega(t)},$$

et il possède un sous-espace séparable :

$$\text{(III.10)}\qquad \mathcal{B}_{M,\infty}^{\omega,0}(I)=\{f\in\mathcal{B}_{M,\infty}^{\omega}(I):\omega_{k,M}(f;t)=o(\omega(t))\text{ quand }t\to 0_+\}.$$

Toutes les normes précédentes dépendent implicitement de k, mais en fait, d'après les inégalités de type Marchaud (cf. [C6], th. 2.20) et d'après (III.5) elles sont équivalentes pour des k différents.

B. *Les espaces de suites de type Besov-Orlicz.* Nous allons étendre les définitions de l'alinéa II.D. Pour r entier (qui sera l'ordre des splines; en fait pour nos applications, nous n'utiliserons que les cas $r=1$ et $r=2$), pour toute suite réelle

$$x=(x_i,i=2-r,\ldots,1;x_{jk},k=1,\ldots,2^j;j=0,1,\ldots)$$

et pour q fini, nous définissons

$$\text{(III.11)}\qquad \|x\|_{\omega,M,q}=\Big(\sum_i|x_i|^q+\sum_j\Big(\frac{m_j}{\omega(2^{-j})}\|x_{j\cdot}\|_{[M]}\Big)^q\Big)^{1/q}$$

où (m_j) est une suite de multiplicateurs dont le rôle est précisé ci-dessous et où

$$\text{(III.12)}\qquad \|x_{j\cdot}\|_{[M]}=\Big\|\sum_k x_{jk}\chi_{jk}\Big\|_M.$$

La norme définie par (III.12) et (III.11) dépend donc de la suite m_j dont il nous faudra préciser la valeur pour chaque usage. Ci-dessous, les (x_i,x_{jk}) seront les coefficients d'une fonction dans une base associée à une partition dyadique, et les m_j seront égaux à la norme L^2 de chaque fonction de base du j-ième bloc dyadique. Ainsi, on aura $m_j=1$ chaque fois que ces fonctions de base seront normalisées dans L^2, ce qui sera le cas lorsqu'on utilisera la base de Franklin ou la base de Schauder normalisée (cf. III.C et III.D ci-dessous).

Donnons un exemple de la valeur de (III.11) et (III.12). Si $M(t)=|t|^p/p$, on a

$$\|x_{j\cdot}\|_{[M]}\simeq\Big\|\sum_k x_{jk}\chi_{jk}\Big\|_p=2^{j/2-j/p}\|x_{j\cdot}\|_p$$

et si de plus les x_{jk} sont donnés par (I.2) (i.e., si on fait usage de la base de Schauder) alors $m_j = \|\varphi_{jk}\|_2 \simeq C2^{-j}$ si bien que

$$\|x\|_{\omega,M,q} = \Big(\sum_i |x_i|^q + \sum_j \Big(\frac{2^{-j/2-j/p}}{\omega(2^{-j})}\|x_{j\cdot}\|_p\Big)^q\Big)^{1/q}.$$

Une quantité équivalente à (III.12) peut être obtenue en utilisant la norme de Luxemburg qui est équivalente à la norme originale d'Orlicz. Plus précisément, si $x = K_j$ est la solution positive de l'équation

$$\text{(III.13)} \qquad \frac{1}{2^j}\sum_k M\Big(\frac{2^{j/2}|x_{jk}|}{x}\Big) = 1,$$

alors

$$\text{(III.14)} \qquad \frac{1}{2}\|x_{j\cdot}\|_{[M]} \le K_j \le \|x_{j\cdot}\|_{[M]}.$$

Pour $q = \infty$, nous définissons

$$\|x\|_{\omega,M,\infty} = \sup_{i,j}\Big(|x_i|, \frac{m_j}{\omega(2^{-j})}\|x_{j\cdot}\|_{[M]}\Big).$$

Définissons maintenant l'espace des suites de Besov–Orlicz par

$$\text{(III.15)} \qquad \mathcal{S}^\omega_{M,q} = \{x = (x_i, x_{jk}) : \|x\|_{\omega,M,q} < \infty\} \quad \text{si } q < \infty,$$

$$\text{(III.16)} \qquad \mathcal{S}^\omega_{M,\infty} = \{x = (x_i, x_{jk}) : \|x\|_{\omega,M,\infty} < \infty\},$$

$$\text{(III.17)} \qquad \mathcal{S}^{\omega,0}_{\omega,\infty} = \Big\{x \in \mathcal{S}^\omega_{M,\infty} : \frac{m_j}{\omega(2^{-j})}\|x_{j\cdot}\|_{[M]} = o(1)\Big\}.$$

Pour $q < \infty$, $(\mathcal{S}^\omega_{M,q}, \|\cdot\|_{\omega,M,q})$ est séparable. $(\mathcal{S}^\omega_{M,\infty}, \|\cdot\|_{\omega,M,\infty})$ n'est pas séparable tandis que $\mathcal{S}^{\omega,0}_{\omega,\infty}$ est un sous-espace séparable de $\mathcal{S}^\omega_{M,\infty}$.

C. *L'isomorphisme entre espace fonctionnels et espaces de suites.* L'outil principal de cet alinéa est les systèmes orthonormaux de splines (cf. [C5], [C6]). Nous présentons ici un résumé de leur construction. A chaque entier naturel $n \ge 2$, il correspond une partition dyadique de I. Chaque $n \ge 2$ s'écrit de manière unique comme $2^j + k$ avec $1 \le k \le 2^j$ et $j \ge 0$. La partition peut alors être définie comme suit :

$$s_{i,n} = \begin{cases} \dfrac{i}{2^{j+1}} & \text{pour } i = 0, \ldots, 2k, \\[2mm] \dfrac{i-k}{2^j} & \text{pour } i = 2k+1, \ldots, n. \end{cases}$$

Pour compléter cette définition, posons $s_{0,1} = 0$ et $s_{1,1} = 1$. Définissons également : $(1) = I$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ et pour $n \ge 2$,

$$t_n = \frac{2k-1}{2^{j+1}}, \qquad (n) = \Big(\frac{k-1}{2^j}, \frac{k}{2^j}\Big) \quad \text{pour } n = 2^j + k,$$

si bien que $\{s_{i,n} : i = 0, \ldots, n\}$ est le réarrangement croissant de $\{t_i : i = 0, \ldots, n\}$. Pour tout entier $r \ge 1$ et $n \ge 1$ soit $S^r_n = S^r_n(I)$ l'espace vectoriel des splines d'ordre r (de degré inférieur ou égal à $r-1$) d'ordre maximal de régularité correspondant à $\{s_{i,n} : i = 0, \ldots, n\}$. Soit de plus $S^r_k = \Pi_{r+k-1}$ l'espace des polynômes de degré $< r+k$ pour $k = 2-r, \ldots, 0$. Ainsi, pour $n \ge 2-r$, nous avons

$$S^r_{2-r} \subset S^r_{3-r} \subset \ldots \subset S^r_1 \subset S^r_n.$$

Puisque $\dim S^r_n = n + r - 1$, on peut définir pour chaque $r \ge 1$ le système intéressant de splines suivant : le système $(f^{(r)}_n; n \ge 2-r)$ qui est un système de splines orthonormal est qui est uniquement déterminé par les conditions

$$f^{(r)}_{2r} = 1, \quad f^{(r)}_{n+1} \in S^r_{n+1}, \quad (f^{(r)}_{n+1}, g) = 0 \quad \text{pour } g \in S^r_n,$$
$$\|f^{(r)}_n\|_2 = 1 \ \text{ et } \ f^{(r)}_n(t_n) > 0 \ \text{ pour } \ n \ge 2-r$$

(où $(f, g) = \int_I f(t)g(t)\,dt$).

Notons que, pour $r = 1$, l'ensemble $\{f^{(r)}_n : n \ge 2-r\}$ est simplement le système de Haar $\{\chi_n : n \ge 1\}$ et pour $r = 2$, c'est le système de Franklin $\{f_n : n \ge 0\}$. Comme dans le cas du système de Haar, il est commode d'utiliser la double notation $(f^{(r)}_n; n \ge 2-r) = (f^{(r)}_i; i = 2-r, \ldots, 1; f^{(r)}_{jk}, n = 2^j + k)$. Ces deux systèmes de splines sont les deux seules que nous utiliserons dans nos applications.

Théorème III.1. *Pour chaque N-fonction M et chaque entier r, le système $(f^{(r)}_n)$ est une base dans chaque espace d'Orlicz $L^*_M(I)$, i.e. pour chaque $f \in L^*_M(I)$, la série*

$$\text{(III.18)} \qquad f = \sum_{2-r \le i \le 1} x_i f^{(r)}_i + \sum_j \sum_k x_{jk} f^{(r)}_{jk}$$

avec $x_i = (f^{(r)}_i, f)$, $x_{jk} = (f^{(r)}_{jk}, f)$ converge en norme $\|\cdot\|_M$ et l'application $Tf = (x_i, x_{jk})$ est injective. De plus, pour $r \ge 2$, $1 \le q < \infty$ et pour chaque $(0, r-1)$-module ω, $T : \mathcal{B} \to \mathcal{S}$ est un isomorphisme entre espaces de Banach pour

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}^\omega_{M,q}, \mathcal{B}^\omega_{M,\infty}, \mathcal{B}^{\omega,0}_{M,\infty} \quad \text{et} \quad \mathcal{S} = \mathcal{S}^\omega_{M,q}, \mathcal{S}^\omega_{M,\infty}, \mathcal{S}^{\omega,0}_{M,\infty}$$

(avec $m_j = 1$) respectivement. Les normes de T et T^{-1} sont indépendantes de M.

Dans le cas particulier des espaces L^p, i.e. si $M(t) = |t|^p/p$, on peut énoncer :

Théorème III.2. *Pour $r \ge 1$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le q < \infty$ et pour chaque $(0, r-1+1/p)$-module ω, $T : \mathcal{B} \to \mathcal{S}$ est un isomorphisme entre espaces de*

Banach pour

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}^{\omega}_{p,q}, \mathcal{B}^{\omega}_{p,\infty}, \mathcal{B}^{\omega,0}_{p,\infty} \quad \text{et} \quad \mathcal{S} = \mathcal{S}^{\omega}_{p,q}, \mathcal{S}^{\omega}_{p,\infty}, \mathcal{S}^{\omega,0}_{p,\infty}$$

(avec $m_j = 1$) respectivement. Les normes de T et T^{-1} ne dépendent pas de p.

Les théorèmes III.1 et III.2 sont des extensions de résultats antérieurs du même type (cf. [C1]–[C5], [R]) et leur démonstration repose sur les mêmes idées. Aussi ne ferons-nous pas ici cette démonstration et renvoyons nous aux papiers ci-dessus.

Remarque au théorème III.2. La continuité de l'application $T : \mathcal{B} \to \mathcal{S}$ est également vraie pour tout $(0,\infty)$-module ω.

D. *Les bases de Franklin et Schauder.* Le système orthonormal de Franklin (i.e. le système de splines correspondant à $r = 2$) possède en commun avec la base de Schauder beaucoup de propriétés. Pour notre usage, i.e. l'étude des processus aléatoires à trajectoires continues, l'existence de la formule (I.2), particulièrement simple, rend bien plus avantageuse l'utilisation de la base de Schauder au lieu de celle de Franklin. C'est pourquoi nous allons, dans cet alinéa, traduire en termes de base de Schauder les théorèmes III.1 et III.2. Commençons par le résultat classique de plongement suivant :

LEMME III.3. *Soit ω un $(1/p,\infty)$-module et soit $\omega_0(t) = t^{1/p}$. Alors, pour tous p et q tels que $1 \le p \le \infty$, $1 \le q < \infty$, on a les plongements continus suivants :*

$$\mathcal{B}^{\omega}_{p,q} \subset \mathcal{B}^{\omega}_{p,\infty} \subset \mathcal{B}^{\omega_0}_{p,1} \subset \mathcal{C}(I)\,. \tag{III.19}$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{B}^{\omega}_{p,q}$; d'après l'inégalité de base du système de Franklin prouvée dans [C3] et d'après le théorème III.1, on a

$$\Big\| \sum_k x_{jk} f_{jk} \Big\|_\infty \le C \cdot 2^{j/2} \|x_{j\cdot}\|_\infty \le C \cdot 2^{j/2} \|x_{j\cdot}\|_p$$
$$\le C \cdot 2^{j/p} \|x_{j\cdot}\|_{[p]} \le C \cdot 2^{j/p} \omega(1/2^j) \|f\|_{\omega,p,q}\,,$$

ce qui prouve le lemme grâce à (III.2).

En plus de la base de Schauder $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_{jk})$, introduisons sa version normalisée dans $L^2(I)$, $(\varphi_0^*, \varphi_1^*, \varphi_{jk}^*)$, où

$$\varphi_0^* = \varphi_0, \qquad \varphi_1^* = \sqrt{3}\,\varphi_1,$$
$$\varphi_{jk}^* = \sqrt{3} \cdot 2^{j+1} \varphi_{jk}\,.$$

Alors il est clair que pour chaque $f \in \mathcal{C}(I)$, la série de Schauder

$$f = y_0 \varphi_0^* + y_1 \varphi_1^* + \sum_j \sum_k y_{jk} \varphi_{jk}^*\,,$$

$$y_0 = f(0), \qquad y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(f(1) - f(0))\,, \tag{III.20}$$

$$y_{jk} = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 2^j}} \left(f\left(\frac{2k-1}{2^{j+1}}\right) - \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{k}{2^j}\right) + f\left(\frac{k-1}{2^j}\right)\right)\right),$$

est uniformément convergente.

LEMME III.4. *Soit ω un $(0,\infty)$-module et soit $1 \le p, q \le \infty$. Alors il existe une constante C finie telle que, pour toute $f \in \mathcal{C}(I)$,*

$$\|x\|_{\omega,p,q} \le C \|y\|_{\omega,p,q}$$

où $x = (x_i, x_{jk})$ est donnée par (III.18) avec $r = 2$, $m_j = 1$, et $y = (y_i, y_{jk})$ est donnée par (III.20).

Démonstration. D'après les propriétés du système de Franklin établies dans [C4] on a

$$\|x_{j\cdot}\|_{[p]} \le C \sum_{j' \ge j} \|y_{j'\cdot}\|_{[p]} \qquad \text{pour } j \ge 0\,.$$

(III.2) implique alors

$$\left(\frac{1}{\omega(2^{-j})} \|x_{j\cdot}\|_{[p]} \right)^q \le \frac{C^q}{(\omega(2^{-j}))^q} \left(\sum_{j' \ge j} \omega(2^{-j'}) \frac{1}{\omega(2^{-j'})} \|y_{j'\cdot}\|_{[p]} \right)^q$$
$$\le C^q (\omega(2^{-j}))^{q-1} \sum_{j' \ge j} \omega(2^{-j'}) \left(\frac{1}{\omega(2^{-j'})} \|y_{j'\cdot}\|_{[p]} \right)^q$$

et d'après (III.3), on a

$$\left(\sum_j \left(\frac{1}{\omega(2^{-j})} \|x_{j\cdot}\|_{[p]} \right)^q \right)^{1/q} \le C \|y\|_{\omega,p,q}\,. \tag{III.21}$$

Il reste donc à estimer les deux premières coordonnées de x. Pour cela, il suffit de remarquer que $|x_0| \le \|f\|_1$ et $|x_1| \le \sqrt{3}\|f\|_1$. Ainsi, d'après (III.20) et (III.2) et l'inégalité de Hölder, on a

$$\|f\|_1 \le C\left(|y_0| + |y_1| + \sum_j \frac{1}{2^{j/2}} \sum_k |y_{jk}| \right) \le C \|y\|_{\omega,p,q}\,.$$

Cette dernière estimation, jointe à (III.21), complète la démonstration du lemme III.4.

Il reste à obtenir l'estimée inverse. C'est l'objet du :

LEMME III.5. *Soit ω un $(1/p,\infty)$-module et soit $1\le p,q\le\infty$. Alors il existe une constante C finie telle que pour toute $f\in C(I)$ on ait*

$$\|y\|_{\omega,p,q}\le C\|x\|_{\omega,p,q}$$

où $x=(x_i,x_{jk})$ est donnée par (III.18) *avec $r=2$ et $m_j=1$, et $y=(y_i,y_{jk})$ est donnée par* (III.20).

Démonstration. Elle repose sur l'estimée suivante des fonctions de Franklin qu'on trouvera dans [C4] :

$$|f_{jk}(t)|\le C\cdot 2^{j/2}q^{|2^jt-k|}\quad \text{pour } t\in I, \tag{III.22}$$

avec q tel que $0<q<1$ et $0<C<\infty$. Ainsi, pour les coefficients (III.20) de la fonction $f_{j'k'}$ on a

$$|y_{jk}|=|y_{jk}(f_{j'k'})|\le C\cdot 2^{(j'-j)/2}q^{|2^{j'-j}k-k'|}$$

avec $j'\ge j$, $1\le k\le 2^j$, $1\le k'\le 2^{j'}$. D'où, d'après (III.18),

$$|y_{jk}|=|y_{jk}(f)|\le C\sum_{j'\ge j}2^{(j'-j)/2}|x_{j'k'}|q^{|2^{j'-j}k-k'|},$$

donc

$$\|y_{j\cdot}\|_p\le C\sum_{j'\ge j}2^{(j'-j)/2}\sum_{k'}\|z_{j'\cdot}\|_p$$

avec

$$z_{j'k}=\sum_{k'}|x_{j'k'}|q^{|2^{j'-j}k-k'|}.$$

Définissant $Q(j)=q^{|j|}$ et

$$X_{j'}(k')=\begin{cases}|x_{j'k'}| & \text{pour } 1\le k'\le 2^{j'},\\ 0 & \text{pour } k'<0 \text{ ou } k'>2^{j'},\end{cases}$$

nous observons que

$$z_{j'k}=(Q*X_{j'})(2^{j'-j}k),$$

d'où

$$\|z_{j'\cdot}\|_p\le\|Q(\cdot)\|_1\|X_{j'}(\cdot)\|_p=C\|X_{j'}(\cdot)\|_p.$$

Ainsi

$$\|y_{j\cdot}\|_{[p]}\le C\sum_{j'\ge j}2^{(j'-j)/p}\|x_{j'\cdot}\|_{[p]},$$

et

$$\frac{1}{\omega(2^{-j})}\|y_{j\cdot}\|_{[p]}\le C\sum_{j'\ge j}P_{j'j}\Big(\frac{1}{\omega(2^{-j'})}\|x_{j'\cdot}\|_{[p]}\Big),$$

en posant

$$P_{j'j}=\begin{cases}\dfrac{2^{j'/p}\omega(2^{-j'})}{2^{j/p}\omega(2^{-j})} & \text{pour } j\le j',\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Mais (III.2) et (III.3) impliquent

$$\sum_{j'}P_{j'j}\le C\quad\text{et}\quad\sum_{j}P_{j'j}\le C,$$

si bien que l'opérateur matriciel $(P_{j'j})$ est borné dans l^q, d'où

$$\Big(\sum_j\Big(\frac{1}{\omega(2^{-j})}\|y_{j\cdot}\|_{[p]}\Big)^q\Big)^{1/q}\le C\|x\|_{\omega,p,q}. \tag{III.23}$$

Il ne reste plus qu'à estimer y_0 et y_1. Mais d'après (III.20),

$$|y_0|\le\|f\|_\infty\quad\text{et}\quad|y_1|\le\frac{2}{\sqrt3}\|f\|_\infty,$$

et d'après (III.22),

$$\|f\|_\infty\le C\Big(\|x_0\|+\|x_1\|+\sum_j 2^{j/2}\|x_{j\cdot}\|_\infty\Big).$$

Utilisant alors (III.2), on a

$$\begin{aligned}\sum_j 2^{j/2}\|x_{j\cdot}\|_\infty&\le\sum_j 2^{j/p}\|x_{j\cdot}\|_{[p]}\\&=\sum_j(2^{j/p}\omega(2^{-j}))\Big(\frac{1}{\omega(2^{-j})}\|x_{j\cdot}\|_{[p]}\Big)\\&\le\Big(\sum_j(2^{j/p}\omega(2^{-j}))^{q'}\Big)^{1/q'}\|x\|_{\omega,p,q}\\&\le\sum_j 2^{j/p}\omega(2^{-j})\|x\|_{\omega,p,q}=C\|x\|_{\omega,p,q}.\end{aligned}$$

D'où $|y_0|+|y_1|\le C\|x\|_{\omega,p,q}$, ce qui joint à (III.23) termine la démonstration du lemme III.5.

On peut alors énoncer :

THÉORÈME III.6. *Soit ω un $(1/p,1+1/p)$-module et soit $1\le p,q\le\infty$. Alors* (III.20) *établit un isomorphisme d'espace de Banach entre $\mathcal{B}^\omega_{p,q}$ et $\mathcal{S}^\omega_{p,q}$ (avec $m_j=1$). De plus, dans le cas séparable, les bases de Franklin et de Schauder sont équivalentes, i.e. elles ont même espace de coefficients.*

E. *Les fonctions d'Orlicz de type exponentiel.* Pour les applications ultérieures, nous nous intéresserons ici à des N-fonctions M particulières (cf. [C6] et [F]). Plus précisément, soit

$$M_\beta(x) = \begin{cases} (\exp|x|^\beta) - 1 & \text{pour } 1 \le \beta < \infty, \\ E_\beta(x) - E_\beta(0) & \text{pour } 0 < \beta < 1, \end{cases}$$

où $E_\beta(-x) = E_\beta(x)$ est l'extension de la partie convexe de $\exp x^\beta$ sur (x_β, ∞) par sa droite tangente en $x_\beta > 0$. Au point x_β, la fonction $\exp x^\beta$ change de concavité. Il s'ensuit que $E_\beta(x) \ge \exp|x|^\beta$ pour tout x. Par ailleurs, on peut voir que pour tout β, $0 < \beta < \infty$, il existe une constante C_β finie telle que

$$\text{(III.24)} \qquad \frac{1}{C_\beta}\|f\|_{M_\beta} \le \inf_{\lambda>0} \frac{1}{\lambda} \int_I \exp|\lambda f(t)|^\beta dt \le C_\beta \|f\|_{M_\beta}.$$

Considérons par ailleurs la famille d'espaces de Banach définie par

$$\text{(III.25)} \qquad B_\gamma = \{f \in L^1(I) : \|f\|_p = O(p^\gamma) \text{ quand } p \to \infty\}$$

où $0 < \gamma < \infty$, avec la norme

$$\text{(III.26)} \qquad |f|_\gamma = \sup_{p\ge 1} \frac{\|f\|_p}{p^\gamma}.$$

La proposition suivante explicite les liens entre les espaces de Banach B_γ et $L^*_{M_\beta}$ (cf. [F]).

Proposition III.7. *Soit* $0 < \gamma < \infty$ *et* $\beta\gamma = 1$. *Alors* $B_\gamma = L^*_{M_\beta}$ *et il existe une constante* C_γ, $0 < C_\gamma < \infty$, *telle que*

$$\text{(III.27)} \qquad \frac{1}{C_\gamma}|f|_\gamma \le \|f\|_{M_\beta} \le C_\gamma |f|_\gamma \quad \textit{pour } f \in B_\gamma.$$

Observons que pour tout $a > 1$ fixé, les deux normes

$$\sup_{p\ge 1} \frac{\|f\|_p}{p^\gamma} \quad \text{et} \quad \sup_{p\ge a} \frac{\|f\|_p}{p^\gamma} \quad \text{sont équivalentes.}$$

En effet,

$$\text{(III.28)} \qquad \sup_{p\ge a} \frac{\|f\|_p}{p^\gamma} \le \sup_{p\ge 1} \frac{\|f\|_p}{p^\gamma} \le a^\gamma \sup_{p\ge a} \frac{\|f\|_p}{p^\gamma}.$$

Nous pouvons maintenant énoncer les théorèmes III.1 et III.2 dans la situation particulière où $M = M_\beta$. On obtient ainsi une extension du résultat correspondant de [C6] à des modules plus généraux.

Théorème III.8. *Soit* $0 < \beta < \infty$ *et* $\beta\gamma = 1$. *Alors, pour tout* $(1/p, 1)$-*module* ω *la norme dans* $\mathcal{B}^\omega_{M_\beta,\infty}$ *est équivalente à la norme originale dans l'espace des suites* $\mathcal{S}^\omega_{M_\beta,\infty}$, *i.e. à*

$$\text{(III.29)} \qquad \max\Big(\max_i |y_i|, \sup_p \sup_j \Big(\frac{1}{p^\gamma \omega(2^{-j})}\|y_{j\cdot}\|_{[p]}\Big)\Big)$$

où f *et* (y_i, y_{jk}) *sont reliés par la relation* (III.20).

Notons qu'avec l'écriture (I.2) et $\omega(t) = t^\alpha$ la norme (III.29) s'écrit

$$\|f\|_{\alpha,M_\beta,\infty} = \max\Big(|f_0|, |f_1|, \sup_{p,j} \frac{1}{p^\gamma} 2^{-j(1/2-\alpha+1/p)} \|f_{j\cdot}\|_p\Big).$$

La démonstration du théorème III.8 est simple. Elle repose sur l'inégalité (III.28) et sur le fait qu'étant donné ω il existe p_ω fini tel que les normes de l'isomorphisme des théorèmes III.1 et III.2 sont uniformément bornées pour $p \ge p_\omega$.

F. *Identification d'espaces de suites et d'espaces de fonctions.* Dans cet alinéa, nous considérons la correspondance entre espaces de suites et espaces de fonctions données par le développement de Schauder

$$f = x_0\varphi_0 + x_1\varphi_1 + \sum_j \sum_k x_{jk}\varphi_{jk},$$

les espaces de suites $\mathcal{S}^\omega_{M,q}$ étant alors définis avec les multiplicateurs (m_j) donnés par $m_0 = 1$, $m_1 = 1/\sqrt{3}$, $m_j = 1/(\sqrt{3}\cdot 2^{j+1})$ (cf. (III.11) et (III.20)). On peut alors décrire le "dictionnaire" suivant :

F.1. Pour $\omega(t) = \sqrt{t}$ et $M(x) = |x|^p/p$, notons

$$\mathcal{S}_{(p)} = \mathcal{S}^\omega_{M,\infty} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}^0_{(p)} = \mathcal{S}^{\omega,0}_{M,\infty}.$$

Si nous définissons

$$\mathcal{B}_{(p)} = \{f : (x_i, x_{jk}) \in \mathcal{S}_{(p)}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}^0_{(p)} = \{f : (x_i, x_{jk}) \in \mathcal{S}^0_{(p)}\},$$

alors

$$\mathcal{B}_{(p)} = \mathcal{B}^\omega_{M,\infty} = \mathcal{B}^{1/2}_{p,\infty} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}^0_{(p)} = \mathcal{B}^{\omega,0}_{M,\infty} = \mathcal{B}^{1/2,0}_{p,\infty}.$$

F.2. Pour $\omega(t) = \sqrt{t}$ et $M_2(x) = \exp(x^2) - 1$, notons

$$\mathcal{S}_{\exp} = \mathcal{S}^\omega_{M_2,\infty} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}^0_{\exp} = \mathcal{S}^{\omega,0}_{M_2,\infty}.$$

Si nous définissons

$$\mathcal{B}_{\exp} = \{f : (x_i, x_{jk}) \in \mathcal{S}_{\exp}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}^0_{\exp} = \{f : (x_i, x_{jk}) \in \mathcal{S}^0_{\exp}\},$$

alors

$$\mathcal{B}_{\exp} = \mathcal{B}^{1/2}_{M_2,\infty} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}^0_{\exp} = \mathcal{B}^{1/2,0}_{M_2,\infty}.$$

F.3. Pour $\omega(t) = \sqrt{t\log(1/t)}$, notons

$$\mathcal{S}_{\mathrm{L}} = \mathcal{S}^\omega_{\infty,\infty} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}^0_{\mathrm{L}} = \mathcal{S}^{\omega,0}_{\infty,\infty}.$$

Si nous définissons

$$\mathcal{B}_{\mathrm{L}} = \{f : (x_i, x_{jk}) \in \mathcal{S}_{\mathrm{L}}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}^0_{\mathrm{L}} = \{f : (x_i, x_{jk}) \in \mathcal{S}^0_{\mathrm{L}}\},$$

alors

$$\mathcal{B}_{\mathrm{L}} = \mathcal{B}^\omega_{\infty,\infty} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}^0_{\mathrm{L}} = \{f \in \mathcal{B}_{\mathrm{L}} : \omega_{1,\infty}(f;\delta) = o(\omega(\delta)) \text{ quand } \delta \to 0_+\}.$$

F.4. Nous présentons ici un espace de Banach séparable supportant la mesure gaussienne correspondante. Pour $\omega(t) = \sqrt{t\log(1/t)}$, définissons

$$\underline{\mathcal{S}^{00}_{\text{exp}}} = \{(x_i, x_{jk}) \in \underline{\mathcal{S}_{\text{exp}}} : \|x_{j\cdot}\|_{[p]} = o(\sqrt{p}\cdot 2^j\omega(1/2^j)) \quad \text{quand } \max(j,p)\to\infty\}$$

et

$$\underline{\mathcal{B}^{00}_{\text{exp}}} = \{f : (x_i, x_{jk}) \in \underline{\mathcal{S}^{00}_{\text{exp}}}\}.$$

Alors

$$\underline{\mathcal{B}^{00}_{\text{exp}}} = \{f \in \mathcal{B}^{1/2}_{M_2,\infty} : \omega_{1,p}(f;\delta) = o(\sqrt{p}\,\omega(\delta)) \text{ quand } \max(p, 1/\delta)\to\infty\}.$$

IV. Application au mouvement brownien fractionnaire. Commençons par une remarque générale relative aux processus gaussiens ($X_t = X(t), t\in I$) de moyenne nulle ($I = [0,1]$). Pour un tel processus séparable de covariance K continue :

$$K(s,t) = E\,X(s)X(t) \quad \text{et} \quad P\{X(0) = 0\} = 1$$

nous utilisons le critère de type Kolmogorov (cf. [C0] ou [KR]).

PROPOSITION IV.1 (cf. [C0]). *Pour un processus gaussien du type ci-dessus, si l'on a*

$$\text{(IV.1)} \qquad \left|K\left(\frac{t_1+t_2}{2}, s\right) - \frac{K(t_1,s)+K(t_2,s)}{2}\right| \le C|t_1-t_2|^\alpha$$

pour $t_1, t_2, s \in I$, $0 < C < \infty$ *et* $0<\alpha<2$, *alors pour tout* β *avec* $0<\beta<\alpha/2$, *on a*

$$P\{X(\cdot)\in\mathcal{B}^\beta_{\infty,\infty}\} = 1.$$

De plus, p.s., le développement de Schauder

$$\text{(IV.2)} \qquad X = x_1\varphi_1 + \sum_j\sum_k x_{jk}\varphi_{jk}$$

converge en norme dans $\mathcal{B}^\beta_{\infty,\infty}$ (*i.e. en norme Höldérienne d'indice* β) *avec*

$$\text{(IV.3)} \qquad \begin{aligned} x_1 &= X(1) - X(0),\\ x_{jk} &= 2\cdot 2^{j/2}\left(X\left(\frac{2k-1}{2^{j+1}}\right) - \frac{1}{2}\left(X\left(\frac{k-1}{2^j}\right) + X\left(\frac{k}{2^j}\right)\right)\right).\end{aligned}$$

La classe des processus gaussiens qui satisfont à (IV.1) contient les mouvements browniens fractionnaires (B^α_t) d'indice α, $0<\alpha<2$. Plus précisément, on a

$$\text{(IV.4)} \qquad E|B^\alpha(t) - B^\alpha(s)|^2 = |t-s|^\alpha$$

et

$$\text{(IV.5)} \qquad K_\alpha(s,t) = EB^\alpha(t)B^\alpha(s) = \frac{1}{2}(|s|^\alpha + |t|^\alpha - |s-t|^\alpha).$$

Le cas $\alpha = 1$ est celui du mouvement brownien classique. Il est clair que d'après (IV.5) on a (IV.1) :

$$\text{(IV.6)} \qquad \left|K_\alpha\left(\frac{t_1+t_2}{2}, s\right) - \frac{K_\alpha(t_1,s)+K_\alpha(t_2,s)}{2}\right| \le |t_1-t_2|^\alpha \qquad (t_1,t_2,s\in I).$$

Ainsi, la proposition IV.1 s'applique à B^α. Les formules (IV.2) et (IV.3) peuvent alors être réécrites pour le mouvement brownien fractionnaire :

$$\text{(IV.7)} \qquad B^\alpha = b^\alpha_1\varphi_1 + \sum_j\sum_k b^\alpha_{jk}\varphi_{jk}$$

avec

$$\text{(IV.8)} \qquad \begin{aligned} b^\alpha_1 &= B^\alpha(1) - B^\alpha(0),\\ b^\alpha_{jk} &= 2\sqrt{2^j}\left(B^\alpha\left(\frac{2k-1}{2^{j+1}}\right) - \frac{1}{2}\left(B^\alpha\left(\frac{k-1}{2^j}\right) + B^\alpha\left(\frac{k}{2^j}\right)\right)\right).\end{aligned}$$

La forme particulière de la covariance de B^α permet d'estimer la covariance des variables b^α_{jk} :

LEMME IV.2. *Soit* $0<\alpha<2$. *Alors*

$$\text{(IV.9)} \qquad E(b^\alpha_{jk}b^\alpha_{jk'}) = -\frac{2^{j(1-\alpha)}}{2^{1+\alpha}}\Delta^4\phi(x)$$

où $\phi(x) = |2(k-k') - 2 + x|^\alpha$ *et où* Δ^4 *est la différence progressive d'ordre 4 et de pas 1. De plus,*

$$\text{(IV.10)} \qquad E(b^\alpha_{jk})^2 = (2^{2-\alpha}-1)2^{j(1-\alpha)}$$

et il existe une constante $C = C(\alpha)$ *finie telle que*

$$\text{(IV.11)} \qquad |E(b^\alpha_{jk}b^\alpha_{jk'})| \le C\frac{2^{j(1-\alpha)}}{1+|k-k'|^{4-\alpha}}.$$

Les formules (IV.9) et (IV.10) se démontrent par calcul direct et (IV.11) s'obtient à partir de (IV.9) en utilisant le théorème de la valeur moyenne.

Notons que pour $\alpha = 1$, (IV.9) et (IV.10) impliquent que $E(b^1_{jk}b^1_{jk'}) = \delta_{kk'}$ et qu'ainsi les coefficients définis par (IV.8) sont indépendants.

Nous allons maintenant rassembler les résultats des sections II et III :

THÉORÈME IV.3. *Soit* $0<\alpha<2$ *et* $0<1/p<\alpha/2$ (voir [S] pour le cas $\alpha = 1$). *Alors, p.s., les trajectoires du mouvement brownien fractionnaire* ($B^\alpha(t)$, $t\in I$) *appartiennent à* $\mathcal{B}^{\alpha/2}_{p,\infty}(I)$ *et il existe* $C = C(\alpha,p) > 0$ *telle que*

$$\text{(IV.12)} \qquad P\{C \le \|B^\alpha\|_{\alpha/2,p,\infty} < \infty\} = 1$$

et

$$\text{(IV.13)} \qquad P\{B^\alpha \in \mathcal{B}^{\alpha/2,0}_{p,\infty}\} = 0.$$

De plus, il existe une constante $K = K(\alpha) > 0$, indépendante de p, telle que

$$E(\exp K\|B^\alpha\|^2_{\alpha/2,p,\infty}) < \infty\,. \tag{IV.14}$$

Démonstration. Définissons $g_{jk} = b^\alpha_{jk}/\sqrt{E(b^\alpha_{jk})^2}$. D'après (IV.10) et (IV.11), l'hypothèse (H) est satisfaite avec $\delta = 4-\alpha$. D'où, d'après (II.3),

$$2^{j\alpha/2} m_j \|b^\alpha_{j\cdot}\|_{[p]} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} C \quad \text{p.s.,} \tag{IV.15}$$

avec les multiplicateurs $m_j = 1/2^j$. Passer de la représentation (IV.7) à (III.20) revient à changer les multiplicateurs en $m_j = 1$, et ainsi on peut appliquer les théorèmes III.2 et III.6, ce qui montre (IV.12) et (IV.13). Par ailleurs, (II.2) pour $g = (0, g_1, g_{jk})$ implique l'équivalence de $\|g\|_{(p)}$ avec $\|B^\alpha\|_{\alpha/2,p,\infty}$ et alors le théorème II.6 implique l'inégalité (IV.14). Notons qu'ici une norme équivalente à $\|B^\alpha\|_{\alpha/2,p,\infty}$ s'écrit

$$\sup_j 2^{-j(1/2-\alpha/2+1/p)}\|b^\alpha_{j\cdot}\|_p\,.$$

THÉORÈME IV.4. *Soit $0<\alpha<2$. Alors, p.s., les trajectoires du mouvement brownien fractionnaire $(B^\alpha(t),\ t\in I)$ appartiennent à $\mathcal{B}^{\alpha/2}_{M_2,\infty}(I)$ et il existe une constante $C = C(\alpha) > 0$ telle que*

$$P\{C \le \|B^\alpha\|_{\alpha/2,M_2,\infty} < \infty\} = 1 \tag{IV.16}$$

et

$$P\{B^\alpha \in \mathcal{B}^{\alpha/2,0}_{M_2,\infty}\} = 0\,. \tag{IV.17}$$

Démonstration. D'après le théorème III.8 la norme $\|g\|_{(\exp)}$ est équivalente à $\|B^\alpha\|_{\alpha/2,M_2,\infty}$ et il suffit alors d'appliquer le théorème II.5.

THÉORÈME IV.5. *Soit $0<\alpha<2$ et $\omega_\alpha(t) = (t^\alpha\log(1/t))^{1/2}$. Il existe $C = C(\alpha) > 0$ telle que*

$$P\{C \le \|B^\alpha\|_{\omega_\alpha,\infty,\infty} < \infty\} = 1$$

et

$$P\{B^\alpha \in \mathcal{B}^{\omega_\alpha,0}_{\infty,\infty}\} = 0\,.$$

Ce théorème est un corollaire du théorème II.7.

Enfin, terminons cet alinéa en appliquant ici les résultats de III.F.4. Pour ω_α comme ci-dessus, définissons

$$\mathcal{S}^{\omega_\alpha,0,0}_{\underline{\exp}} = \{(x_i, x_{jk}) : \|x_{j\cdot}\|_{[p]} = o(\sqrt{p}\,2^j\omega_\alpha(1/2^j)) \text{ quand } \max(j,p)\to\infty\}$$

et

$$\mathcal{B}^{\omega_\alpha,0,0}_{\underline{\exp}} = \{f : (x_i, x_{jk}) \in \mathcal{S}^{\omega_\alpha,0,0}_{\underline{\exp}}\}$$

(avec f liée à (x_i, x_{jk}) comme en III.F). Alors, l'espace de Banach séparable $\mathcal{B}^{\omega_\alpha,0,0}_{\underline{\exp}}$ vérifie

$$\mathcal{B}^{\omega_\alpha,0,0}_{\underline{\exp}} = \{f \in \mathcal{B}^{\alpha/2}_{M_2,\infty} : \omega_{1,p}(f;\delta) = o(\sqrt{p}\,\omega_\alpha(\delta)) \quad \text{quand } \max(p,1/\delta)\to\infty\}\,.$$

THÉORÈME IV.6. *Pour $0<\alpha<2$, on a* $P\{B^\alpha \in \mathcal{B}^{\omega_\alpha,0,0}_{\underline{\exp}}\} = 1$.

V. Application à l'intégrale stochastique

A. *L'intégrale non causale.* Soit deux suites numériques $\underline{f} = (f_1, f_{jk})$ et $\underline{g} = (g_1, g_{jk})$ et définissons

$$f = f_1\chi_1 + \sum_{j,k} f_{jk}\chi_{jk}\,, \tag{V.1}$$

$$g = g_1\varphi_1 + \sum_{j,k} g_{jk}\varphi_{jk}\,. \tag{V.2}$$

Puisque les fonctions de Haar sont les dérivées des fonctions de Schauder, il est naturel de définir :

DÉFINITION V.1. Pour $\underline{f}$ et $\underline{g}$ deux suites à support fini, soit

$$\int_0^s f\circ dg = \sum_{j,k,j',k'} f_{jk}g_{j'k'}\int_0^s \chi_{jk}(u)\chi_{j'k'}(u)\,du \qquad (s\in I) \tag{V.3}$$

et notons

$$I(f,g)(s) = \int_0^s f\circ dg\,.$$

Nous allons maintenant étudier les propriétés de $I(f,g)$ en utilisant les développements en série de Schauder. Nous noterons

$$(jk) = \left(\frac{k-1}{2^j}, \frac{k}{2^j}\right) \quad \text{et} \quad t_{jk} = \frac{2k-1}{2^{j+1}}\,. \tag{V.4}$$

Le lemme technique suivant se montre par calcul direct :

LEMME V.2. *On a*

$$\int_0^s \chi_{jk}(u)\chi_{j'k'}(u)\,du = \chi_{j'k'}(t_{jk})\varphi_{jk}(s) \quad \textit{pour } j'\le j \textit{ et } (jk)\ne(j'k')\,, \tag{V.5}$$

$$\int_0^s \chi^2_{jk}(u)\,du = \varphi_1(s) + \sum_{j'=0}^{j-1}\sum_{k'=1}^{2^{j'}} \chi_{j'k'}(t_{jk})\varphi_{j'k'}(s)\,. \tag{V.6}$$

Voici notre principal résultat, qui permet d'étendre par continuité la définition de $I(f,g)$.

THÉORÈME V.3 (cf. [Ro]). *Soient α et p tels que $1 \le p \le \infty$, $1/p+1/p' = 1$ et $1/p < \alpha < 1/p'$. Alors il existe $C = C(\alpha,p)$ tel que pour $f \in \mathcal{B}^{1-\alpha}_{p,1}$ et $g \in \mathcal{B}^{\alpha}_{p,\infty}$, on ait*

$$\|I(f,g)\|_{\alpha,p,\infty} \le C\|f\|_{1-\alpha,p,1}\|g\|_{\alpha,p,\infty}\,. \tag{V.7}$$

Démonstration. Il suffit de montrer (V.7) pour des suites $\underline{f}$ et $\underline{g}$ à support fini. Ecrivons $I(f,g) = I_0 + \ldots + I_6$ avec

$$I_0 = (f_1 g_1)\varphi_1\,, \qquad I_2 = \sum_{j,k}(g_1 f_{jk})\varphi_{jk}\,,$$

$$I_1 = \sum_{j,k}(f_1 g_{jk})\varphi_{jk}\,, \qquad I_3 = \Big(\sum_{j,k} f_{jk} g_{jk}\Big)\varphi_1\,,$$

$$I_4 = \sum_{j',k'}\Big(\sum_{j>j'}\sum_k f_{jk} g_{jk}\chi_{j'k'}(t_{jk})\Big)\varphi_{j'k'}\,,$$

$$I_5 = \sum_{j',k'}\Big(\sum_{j<j'}\sum_k f_{jk} g_{j'k'}\chi_{jk}(t_{j'k'})\Big)\varphi_{j'k'}\,,$$

$$I_6 = \sum_{j',k'}\Big(\sum_{j<j'}\sum_k f_{j'k'} g_{jk}\chi_{jk}(t_{j'k'})\Big)\varphi_{j'k'}\,.$$

D'après les définitions des différentes normes, on voit sans peine que :

$$|f_1| \le C\|\underline{f}\|_{1-\alpha,p,1}\,, \tag{V.8}$$

$$|g_1| \le C\|g\|_{\alpha,p,\infty}\,. \tag{V.9}$$

La combinaison de (V.8) et (V.9) entraîne

$$\|I_0\|_{\alpha,p,\infty} \le C\|\underline{f}\|_{1-\alpha,p,1}\|g\|_{\alpha,p,\infty}\,. \tag{V.10}$$

Par ailleurs, d'après (V.2), $I_1 = f_1 g - I_0$ et ainsi (V.10) et (V.8) impliquent

$$\|I_1\|_{\alpha,p,\infty} \le C\|\underline{f}\|_{1-\alpha,p,1}\|g\|_{\alpha,p,\infty}\,. \tag{V.11}$$

Pour I_2, nous avons d'après (V.9) et le théorème III.6,

$$\begin{aligned}\|I_2\|_{\alpha,p,\infty} &\le |g_1|\cdot\Big\|\sum_{j,k} f_{jk}\varphi_{jk}\Big\|_{\alpha,p,\infty}\\ &\le C\|g\|_{\alpha,p,\infty}\sup_j 2^{j(\alpha-1)}\|f_{j\cdot}\|_{[p]}\\ &\le C\|g\|_{\alpha,p,\infty}\sum_j 2^{2j(\alpha-1)}2^{j(1-\alpha)}\|f_{j\cdot}\|_{[p]}\\ &\le C\|g\|_{\alpha,p,\infty}\sum_j 2^{j(1-\alpha)}\|f_{j\cdot}\|_{[p]}\\ &\le C\|\underline{f}\|_{1-\alpha,p,1}\|g\|_{\alpha,p,\infty}\,.\end{aligned} \tag{V.12}$$

Pour I_3, l'inégalité de Hölder et le théorème III.6 impliquent

$$\begin{aligned}\|I_3\|_{\alpha,p,\infty} &\le C\sum_j \|f_{j\cdot}\|_{[p']}\|g_{j\cdot}\|_{[p]}\\ &\le C\sum_j 2^{1-\alpha}\|f_{j\cdot}\|_{[p']}\cdot 2^{\alpha-1}\|g_{j\cdot}\|_{[p]}\\ &\le C\|\underline{f}\|_{1-\alpha,p',1}\|g\|_{\alpha,p,\infty}\\ &\le C\|\underline{f}\|_{1-\alpha,p,1}\|g\|_{\alpha,p,\infty}\end{aligned} \tag{V.13}$$

où $\|\underline{f}\|_{1-\alpha,p',1}$, $\|\underline{f}\|_{1-\alpha,p,1}$ sont les normes dans $\mathcal{S}^{1-\alpha}_{p',1}$, $\mathcal{S}^{1-\alpha}_{p,1}$ respectivement correspondant aux multiplicateurs $m_j = 1$.

Pour estimer la norme de I_4 nous introduisons

$$B_{jk,j'k'} = f_{jk} g_{jk}\chi_{j'k'}(t_{jk}) \quad \text{et} \quad A_{j'k'} = \sum_{j>j'}\sum_k B_{jk,j'k'}\,.$$

Nous savons que

$$\begin{aligned}\|I_4\|_{\alpha,p,\infty} &\le C\sup_{j'} 2^{j'(\alpha-1)}\|A_{j'\cdot}\|_{[p]}\\ &\le C\sup_{j'} 2^{j'(\alpha-1)}\sum_{j>j'}\Big\|\sum_k B_{jk,j'\cdot}\Big\|_{[p]}\,.\end{aligned} \tag{V.14}$$

Soit maintenant $E(k') = \{k : 2^{j-j'}(k'-1) < k \le 2^{j-j'}k'\}$, d'où $|E(k')| = 2^{j-j'}$ et

$$\begin{aligned}\Big|\sum_k B_{jk,j'\cdot}\Big| &\le 2^{j'/2}\sum_{k\in E(k')}|f_{jk}g_{jk}| \le 2^{j'/2}\|g_{j\cdot}\|_p\Big(\sum_{k\in E(k')}|f_{jk}|^{p'}\Big)^{1/p'}\\ &\le 2^{j'/2}\|g_{j\cdot}\|_p\cdot 2^{(j-j')(1/p'-1/p)}\Big(\sum_{k\in E(k')}|f_{jk}|^p\Big)^{1/p}\,,\end{aligned}$$

d'où

$$2^{j'(1/2-1/p)}\Big\|\sum_k B_{jk,j'\cdot}\Big\|_p \le 2^{j'/p}(2^{j(1/2-1/p)}\|g_{j\cdot}\|_p)(2^{j(1/2-1/p)}\|f_{j\cdot}\|_p)\,,$$

$$\sum_{j>j'}\Big\|\sum_k B_{jk,j'\cdot}\Big\|_{[p]} \le 2^{j'/p}\sum_{j>j'}\|g_{j\cdot}\|_{[p]}\|f_{j\cdot}\|_{[p]}\,,$$

$$2^{j'(\alpha-1)}\sum_{j>j'}\Big\|\sum_k B_{jk,j'\cdot}\Big\|_{[p]} \le 2^{j'(\alpha-1/p')}\sum_{j>j'}\|g_{j\cdot}\|_{[p]}\|f_{j\cdot}\|_{[p]}\,.$$

Cela implique, puisque $\alpha < 1/p'$, et d'après (V.14),

$$\|I_4\|_{\alpha,p,\infty} \le C\|\underline{f}\|_{1-\alpha,p,1}\|g\|_{\alpha,p,\infty}\,. \tag{V.15}$$

Pour estimer la norme de I_5, nous utilisons l'inégalité

$$\Big|f_1\chi_1 + \sum_{j<j'}\sum_k f_{jk}\chi_{jk}(t)\Big| \le \|f\|_\infty$$

qui se déduit de (V.1) puisque les sommes partielles forment une martingale. Par ailleurs, pour chaque j',

$$2^{j'(-1/2-1/p+\alpha)}\Big(\sum_{k'}\Big|g_{j'k'}\sum_{j<j'}\sum_k f_{jk}\chi_{jk}(t_{j'k'})\Big|^p\Big)^{1/p} \le \|f\|_\infty\cdot 2^{j'(-1/2-1/p+\alpha)}\|g_{j'\cdot}\|_p \le \|f\|_\infty\|g\|_{\alpha,p,\infty}.$$

De plus,

$$\|\underline{f}\|_{1-\alpha,p,1} = |f_1| + \sum_j 2^{j(1-\alpha)}\Big\|\sum_k f_{jk}\chi_{jk}\Big\|_p \ge |f_1| + \sum_j 2^{j(1/p'-\alpha)}\Big\|\sum_k f_{jk}\chi_{jk}\Big\|_\infty \ge \|f\|_\infty,$$

et ainsi

(V.16) $$\|I_5\|_{\alpha,p,\infty} \le C\|\underline{f}\|_{1-\alpha,p,1}\|g\|_{\alpha,p,\infty}.$$

Utilisant l'inégalité

$$\Big|\sum_k f_{j'k'}g_{jk}\chi_{jk}(t_{j'k'})\Big| \le 2^{j/2}\|g_{j\cdot}\|_p,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}2^{j'(-1/2-1/p+\alpha)}&\Big(\sum_{k'}\Big|f_{j'k'}\sum_{j<j'}\sum_k g_{jk}\chi_{jk}(t_{j'k'})\Big|^p\Big)^{1/p}\\ &\le 2^{j'(-1/2-1/p+\alpha)}\Big(\sum_{k'}|f_{j'k'}|^p\Big(\sum_{j<j'}2^{j/2}\|g_{j\cdot}\|_p\Big)^p\Big)^{1/p}\\ &\le \|g\|_{\alpha,p,\infty}\cdot 2^{j'(-1/2-1/p+\alpha)}\Big(\sum_{k'}|f_{j'k'}|^p\Big(\sum_{j<j'}2^{j(1+1/p-\alpha)}\Big)^p\Big)^{1/p}\\ &\le C\|g\|_{\alpha,p,\infty}\cdot 2^{j'/2}\|f_{j'\cdot}\|_p = C\|g\|_{\alpha,p,\infty}\cdot 2^{j'/p}\|f_{j'\cdot}\|_{[p]}.\end{aligned}$$

Puisque

$$2^{j'/p}\|f_{j'\cdot}\|_{[p]} = 2^{j'(\alpha-1/p')}\cdot 2^{j'(1-\alpha)}\|f_{j'\cdot}\|_{[p]} \le 2^{j'(\alpha-1/p')}\|\underline{f}\|_{1-\alpha,p,1} \le \|\underline{f}\|_{1-\alpha,p,1},$$

on en déduit

(V.17) $$\|I_6\|_{\alpha,p,\infty} \le C\|\underline{f}\|_{1-\alpha,p,1}\|g\|_{\alpha,p,\infty}.$$

Additionnant maintenant les inégalités (V.10) à (V.17) (sauf (V.14)), nous obtenons

(V.18) $$\|I(f,g)\|_{\alpha,p,\infty} \le C\|\underline{f}\|_{1-\alpha,p,1}\|g\|_{\alpha,p,\infty}.$$

Par ailleurs,

$$\|\underline{f}\|_{1-\alpha,p,1} \le C\|f\|_{1-\alpha,p,1}$$

d'après la remarque suivant le théorème II.2. Le théorème V.3 est prouvé.

On pourra trouver dans [Ro] des compléments sur l'intégrale définie par le théorème V.3 : liens avec l'intégrale de Stratonovitch, avec la formule d'Itô, etc. (cf. également [Nu] et [O]).

B. *L'intégrale stochastique pour le mouvement brownien fractionnaire.* Pour le mouvement brownien fractionnaire (B_t^α) de paramètre α $(0<\alpha<2)$ et pour toute fonction mesurable en (s,ω) telle que $f(\cdot,\omega)\in\mathcal{B}_{p,1}^{1-\alpha/2}$, avec $1/p<\alpha/2<1/p'$, l'intégrale stochastique est définie trajectoire par trajectoire par la formule

(V.19) $$I_\alpha f(s,\omega) = \int_0^s f(u,\omega)\circ dB^\alpha(u,\omega).$$

Cette définition a bien un sens d'après les théorèmes IV.3 et V.3.

THÉORÈME V.4. *Soit $1<\alpha<2/p'$ et soit $\sigma:\mathcal{B}_{p,\infty}^{\alpha/2}\to\mathcal{B}_{p,\infty}^{\alpha/2}$ un opérateur contractant. Alors l'équation différentielle stochastique*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \sigma(X)\circ dB^\alpha \qquad (t\in I)$$

a une unique solution forte qui appartient p.s. à $\mathcal{B}_{p,\infty}^{\alpha/2}$.

Démonstration. Pour $1<\alpha<2$ nous avons $\mathcal{B}_{p,\infty}^{\alpha/2}\subset\mathcal{B}_{p,1}^{1-\alpha/2}$, et la démonstration se fait alors par des méthodes standards.

VI. Application au bruit blanc stable. Soit maintenant $X(t)$ $(t\in[0,1])$ un bruit blanc stable d'indice α $(0<\alpha<2)$. Cela signifie ici que :

(VI.1) $X_{(0)}=0$, $t\to X(t)$ est p.s. continue à droite et limitée à gauche.

(VI.2) $X(t)$ est un processus à accroissements indépendants stationnaires tel que

$$E(\exp izX(t)) = \exp\Big(-t|z|^\alpha\Big[1+i\beta\operatorname{sgn}(z)\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\Big]\Big) \qquad (-1\le\beta\le1).$$

Notons qu'on déduit de (VI.2) que pour tout $a>0$, $X(a)$ a même loi que $a^{1/\alpha}X(1)$.

THÉORÈME VI.1. *On suppose* $1 < \alpha < 2$. *Alors* :

(VI.3) *p.s.*, $t \to X(t)$ *appartient à* $\mathcal{B}^{1/\alpha}_{p,\infty}$ *si* $1 \le p < \alpha$,

(VI.4) *p.s.*, $t \to X(t)$ *n'appartient pas à* $\mathcal{B}^{1/\alpha}_{p,\infty}$ *si* $p \ge \alpha$.

Remarque. La valeur limite ($p = \alpha$) apparaissant dans le théorème VI.1 montre que pour les processus stables la situation est tout à fait différente de celle des processus gaussiens. Par exemple, le mouvement brownien fractionnaire d'indice γ ($0 < \gamma < 2$) appartient à $\mathcal{B}^{\gamma/2}_{p,\infty}$ pour tout p fini avec $1/p < \gamma/2$ (cf. théorème IV.3).

Démonstration du théorème VI.1. Nous utiliserons le

LEMME VI.2. *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *continue à droite et limitée à gauche. Notons* $\{\Delta f_s : s \in D\}$ *l'ensemble de ses sauts. Alors*

$$\|f\|_{1/\alpha,\alpha,\infty} \ge \Big(\sum_{s\in D} |\Delta f_s|^\alpha\Big)^{1/\alpha}. \tag{VI.5}$$

La démonstration de ce lemme est élémentaire à partir de la définition (III.7) (avec $k = 1$, $M(t) = |t|^\alpha/\alpha$, $\omega(t) = t^{1/\alpha}$).

Démontrons déjà (VI.4). Soit

$$\mu_X(\omega, dt, dx) = \sum_{s\le 1} 1_{\{\Delta X_s \ne 0\}} \delta_{\{s,\Delta X_s(\omega)\}}(dt\,dx)$$

la mesure des sauts de X (où δ désigne la masse de Dirac).

Soient

$$\nu = dt\Big(\frac{C_1 1_{\{x>0\}}}{|x|^{1+\alpha}} + \frac{C_2 1_{\{x<0\}}}{|x|^{1+\alpha}}\Big)\,dx$$

le compensateur de μ_X et

$$A_n = [0,1] \times \Big[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\Big[.$$

Les v.a. $\mu_X(A_n)$ sont indépendantes et suivent une loi de Poisson de paramètre

$$\nu(A_n) = \int_{1/n}^{1/(n-1)} \frac{C}{|x|^{1+\alpha}}\,dx \sim C n^{\alpha-1}.$$

Il est clair que

$$\sum_{s\le 1} |\Delta X_s|^\alpha \ge \sum_n \frac{\mu_X(A_n)}{n^\alpha} \ge \sum_n \frac{\mu_X(A_n) - \nu(A_n)}{n^\alpha} + \sum_n \frac{\nu(A_n)}{n^\alpha}. \tag{VI.6}$$

Or,

$$\sum_n \frac{\nu(A_n)}{n^\alpha} \sim C \sum_n \frac{n^{\alpha-1}}{n^\alpha} = \infty,$$

tandis que $\sum_n (\mu_X(A_n) - \nu(A_n))/n^\alpha$ converge dans L^2, et donc p.s., puisque

$$E\Big(\sum_n \frac{\mu_X(A_n) - \nu(A_n)}{n^\alpha}\Big)^2 = \sum_n \frac{\operatorname{Var}\mu_X(A_n)}{n^{2\alpha}} \sim C\sum_n \frac{n^{\alpha-1}}{n^{2\alpha}} = C\sum_n \frac{1}{n^{\alpha+1}} < \infty. \tag{VI.7}$$

Ainsi d'après (VI.5)–(VI.7),

$$\|X\|_{1/\alpha,\alpha,\infty} \ge \sum_{s\le 1} |\Delta X_s|^\alpha = \infty \quad \text{p.s.}$$

et ceci achève la démonstration de (VI.4).

Montrons maintenant (VI.3). Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ limitée à gauche et continue à droite telle que $f(0) = 0$. Soient f_1, f_{jk} ses coefficients dans la base de Schauder donnés par (I.2). Ecrivons

$$f_n = f_1\varphi_1 + \sum_{j\le n}\sum_k f_{jk}\varphi_{jk}.$$

LEMME VI.3. $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ *presque partout (pour la mesure de Lebesgue sur* $[0,1]$).

Démonstration. Notons que f_n coïncide avec f aux points dyadiques d'ordre n, i.e. aux points de la forme $k/2^n$ ($k = 0, \ldots, 2^n$) et que f_n est linéaire par morceaux. Puisque f est limitée à gauche et continue à droite, elle est continue sauf sur un ensemble dénombrable de points. Soit x un point de continuité de f et désignons par $\delta_n^+(x)$ (resp. $\delta_n^-(x)$) le point dyadique immédiatement à droite (resp. à gauche) de x. Il est clair que

$$|f_n(x) - f(x)| \le \sup(|f(x) - f_n(\delta_n^+(x))|, |f(x) - f_n(\delta_n^-(x))|). \tag{VI.8}$$

Comme $f_n(\delta_n^\pm(x)) = f(\delta_n^\pm(x))$, le lemme est prouvé.

D'après le Lemme VI.3, on peut donc écrire

$$X_t = x_1\varphi_1 + \sum_j\sum_k x_{jk}\varphi_{jk} \quad \text{avec}$$

$$x_1 = X(1),$$

$$x_{jk} = 2\cdot 2^{j/2}\Big[X\Big(\frac{2k-1}{2^{j+1}}\Big) - \frac{1}{2}\Big(X\Big(\frac{2k}{2^{j+1}}\Big) + X\Big(\frac{2k-2}{2^{j+1}}\Big)\Big)\Big].$$

Utilisant alors le même type d'arguments que dans la section III, on montre (cela résulte du théorème III.2 et d'une légère modification du lemme III.4, modification permettant de remplacer la continuité de la fonction par le lemme VI.3) qu'il suffit, pour prouver que $X \in \mathcal{B}^{1/\alpha}_{p,\infty}$, de voir que, p.s.,

$$\text{(VI.9)} \qquad \sup_j 2^{-j(1/2-1/\alpha+1/p)}\Big(\sum_k |x_{jk}|^p\Big)^{1/p} < \infty \quad \text{pour } 1 \le p < \alpha\,.$$

Soit $a_{jk} = X((k+1)/2^j) - X(k/2^j)$. Il est évident que (VI.9) est impliqué par

$$\text{(VI.10)} \qquad \sup_j 2^{-j(-1/\alpha+1/p)}\Big(\sum_k |a_{jk}|^p\Big)^{1/p} < \infty \quad \text{p.s. pour } 1 \le p < \alpha\,.$$

Définissons

$$\text{(VI.11)} \qquad \widetilde{a}_{jk} = 2^{j/\alpha} a_{jk}\,.$$

On a bien sûr, d'après (VI.1) et (VI.2),

(VI.12) les v.a. $\widetilde{a}_{jk}$ sont indépendantes en k,

(VI.13) les v.a. $\widetilde{a}_{jk}$ sont stables et normalisées.

Par ailleurs, puisque $p < \alpha$, $E|\widetilde{a}_{jk}|^p = c_p < \infty$. Il suffit donc, pour prouver (VI.10), de montrer que

$$\text{(VI.14)} \qquad \sup_j 2^{-j}\sum_k (|\widetilde{a}_{jk}|^p - c_p) < \infty \quad \text{p.s.}$$

LEMME VI.4. *Soient $Y_1, \ldots, Y_n$ n v.a. indépendantes de même loi, ayant un moment d'ordre $\gamma > 1$ et centrées. Alors, il existe c telle que*

$$E\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i\Big|^\gamma \le c\frac{1}{n^{\gamma-1}}\,.$$

Démonstration. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. Soit $\mathcal{L}$ l'espace vectoriel de toutes les v.a. définies sur Ω. Soit $T : \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, P) \to \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, P)^{\otimes n}$ défini par

$$TY(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (Y(\omega_i) - E(Y))\,.$$

Il est clair que T est un opérateur linéaire défini dans $L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pour tout $p \ge 1$. Il est clair également que

$$\|T\|_{L^1(\Omega)\to L^1(\Omega^n)} \le c\,,$$
$$\|T\|_{L^2(\Omega)\to L^2(\Omega^n)} \le \frac{c}{n^{1/2}}\,.$$

D'après le théorème d'interpolation de M. Riesz, T est alors borné de $L^\gamma(\Omega)$ dans $L^\gamma(\Omega^n)$ de norme plus petite que $c/n^{(\gamma-1)/\gamma}$: c'est le lemme VI.4.

Appliquant alors le lemme VI.4 à la somme apparaissant dans (VI.14) avec $p\gamma < \alpha$ et $\gamma > 1$, on a

$$E\Big\{\Big|2^{-j}\sum_k (|\widetilde{a}_{jk}|^p - c_p)\Big|^\gamma\Big\} \le c \cdot 2^{-j(\gamma-1)}\,.$$

D'où

$$P\Big\{\Big|2^{-j}\sum_k (|\widetilde{a}_{jk}|^p - c_p)\Big| > \delta\Big\} \le c\frac{2^{-j(\gamma-1)}}{\delta^\gamma}$$

et donc, d'après Borel–Cantelli,

$$\sup_j 2^{-j}\Big(\sum_k (|\widetilde{a}_{jk}|^p - c_p)\Big) < \infty \quad \text{p.s.,}$$

ce qui prouve (VI.14) et achève la démonstration du théorème VI.1.

Bibliographie

[C0] Z. Ciesielski, *Hölder conditions for realizations of Gaussian processes*, Trans. Amer. Math. Soc. 99 (1961), 403–413.

[C1] —, *On the isomorphisms of the spaces H_α and m*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 8 (1960), 217–222.

[C2] —, *Some properties of Schauder basis of the space $C\langle 0,1\rangle$*, ibid., 141–144.

[C3] —, *Properties of the orthonormal Franklin system*, Studia Math. 23 (1963), 141–157.

[C4] —, *Properties of the orthonormal Franklin system, II*, ibid. 27 (1966), 289–323.

[C5] —, *Constructive function theory and spline systems*, ibid. 53 (1975), 277–302.

[C6] —, *Orlicz spaces, spline systems and brownian motion*, Constr. Approx. 9 (1993), 191–208.

[DHJS] R. Dudley, J. Hoffmann-Jørgensen and L. Shepp, *On the lower tail of Gaussian seminorms*, Ann. Probab. 7 (1979), 319–342.

[F] X. Fernique, *Régularité de processus gaussiens*, Invent. Math. 12 (1971), 304–320.

[G] H. Gebelein, *Das statistische Problem der Korrelation als Variations- und Eigenwertproblem und sein Zusammenhang mit der Ausgleichsrechnung*, Z. Angew. Math. Mech. 21 (1941), 364–379.

[KR] G. Kerkyacharian et B. Roynette, *Une démonstration simple des théorèmes de Kolmogorov, Donsker et Itô–Nisio*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 312 (1991), 877–882.

[K] M. A. Krasnosel'skiĭ and Ya. B. Rutickiĭ, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, Noordhoff, Groningen, 1961.

[LT] M. Ledoux and M. Talagrand, *Probability on Banach Spaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb. 23, Springer, Berlin, 1991.

[M] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs I*, Hermann, 1990.

[N] E. Nelson, *The free Markoff field*, J. Funct. Anal. 12 (1973), 211–227.

[Nu] D. Nualart, *Noncausal stochastic integrals and calculus*, in: Lecture Notes in Math. 1316, Springer, 1988, 80–129.

[O] S. Ogawa, *The stochastic integral of noncausal type as an extension of the symmetric integrals*, Japan J. Appl. Math. 2 (1985), 229–240.

[R] S. Ropela, *Spline bases in Besov spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 24 (1976), 319–325.

[Ro] B. Roynette, *Mouvement brownien et espaces de Besov*, Stochastics and Stochastics Rep. (1993), à paraître.

[S] P. Sjögren, *Riemann sums for stochastic integrals and L^p moduli of continuity*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 59 (1982), 411–424.

[T] M. Talagrand, *Sur l'intégrabilité des vecteurs gaussiens*, ibid. 68 (1984), 1–8.

INSTITUTE OF MATHEMATICS
POLISH ACADEMY OF SCIENCES
ABRAHAMA 18
81-825 SOPOT, POLAND
E-mail: MATZC@HALINA.UNIV.GDA.PL

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES
ET INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DE PICARDIE
33, RUE SAINT LEU
80039 AMIENS CEDEX 1, FRANCE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE NANCY
B.P. 239
54506 VANDŒUVRE-LÈS-NANCY CEDEX, FRANCE

Received January 4, 1993
Revised version April 14, 1993 (3045)

STUDIA MATHEMATICA 107 (2) (1993)

On first integrals for polynomial differential equations on the line

by

HENRYK ŻOŁĄDEK (Warszawa)

Abstract. We show that any equation $dy/dx = P(x,y)$ with P a polynomial has a global (on $\mathbb{R}^2$) smooth first integral nonconstant on any open domain. We also present an example of an equation without an analytic primitive first integral.

1. Introduction. The first integrals for equations

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

were studied by T. Ważewski [8], Z. Szmydtówna [7] and by J. Szarski [6]. It was shown that even when f is infinitely differentiable there can be no differentiable first integral $F(x,y)$ different from a constant.

Recently K. Krzyżewski (University of Warsaw) asked about the situation with polynomial right hand side of (1). The answer is contained in this paper.

Let me give a little explanation of the origin of nondifferentiability of first integrals. If $y = \phi(x, y_0)$ is the solution of (1) with the initial condition $\phi(0, y_0) = y_0$ on the line $L_0 = \{x = 0\}$ then solving the latter equation with respect to y_0 we get the first integral

$$F(x,y) = y_0(x,y).$$

F is defined in the domain $U_0 = \{(x, \psi(x)) \colon \psi$ a solution of (1), 0 in the domain of $\psi\}$. We want to extend it to the whole $\mathbb{R}^2$ in a smooth way. The obstacles to such extension lie in the escaping of the solutions of (1) to infinity in finite time (x).

If a trajectory γ_0 from the boundary ∂U_0 of U_0 tends to infinity ($+\infty$ or $-\infty$) and does not intersect the line L_0 then we can extend F to a neighbourhood of γ_0 by choosing a section T_0 transversal to γ_0, extending $F|_{T_0 \cap U_0}$ to T_0 and then extending F from $T_0 \setminus U_0$ along the trajectories

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 34C05.
Supported by Polish KBN grant No 2 1090 91 01.