Contents of Volume 106, Number 3

STUDIA MATHEMATICA

Executive Editors: **Z. Ciesielski, A. Pełczyński, W. Żelazko**

The journal publishes original papers in English, French, German and Russian, mainly in functional analysis, abstract methods of mathematical analysis and probability theory. Usually 3 issues constitute a volume.

Detailed information for authors is given on the inside back cover. Manuscripts and correspondence concerning editorial work should be addressed to

STUDIA MATHEMATICA

Śniadeckich 8, P.O. Box 137, 00-950 Warszawa, Poland, fax 48-22-293997

Correspondence concerning subscription, exchange and back numbers should be addressed to

INSTITUTE OF MATHEMATICS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES
Publications Department

Śniadeckich 8, P.O. Box 137, 00-950 Warszawa, Poland, fax 48-22-293997

© Copyright by Instytut Matematyczny PAN, Warszawa 1993

Published by the Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences
Typeset in TEX at the Institute
Printed and bound by
drukarnia
herman & herman
02-240 WARSZAWA, ul. Jakobinów 23

PRINTED IN POLAND

ISBN 83-85116-99-0 ISSN 0039-3223

T_f-splines et approximation par T_f-prolongement

par

N. M. BENBOURHIM et J. GACHES (Toulouse)

Abstract. We study T_f-splines (existence, uniqueness and convergence) in Banach spaces with a view to applications in approximation. Our approach allows, in particular, considering some problems in a more regular domain, and hence facilitating their solution.

0. Introduction. Le problème des T_f-splines consiste, en se donnant un élément u et une partie K d'un espace E, à trouver le ou les éléments v de E qui coïncident avec u sur K et qui minimisent la quantité $f(Tv)$ où f est une fonctionnelle sur un espace F et T une application de E dans F.

L'existence des solutions de ce problème a été étudiée d'une manière générale par D. V. Pai [8] et à l'origine par P. J. Laurent et Pham-Dinh-Tuan [6].

On se place ici dans le cadre d'espaces de Banach. Au paragraphe 1, on donne des conditions minimales d'existence et d'unicité pour les T_f-splines, fréquemment utilisés en approximation. On traite des exemples dans différents espaces fonctionnels où l'ensemble K (ensemble de contraintes) est du type interpolant de Lagrange ou moyennes locales.

Au paragraphe 2, on donne des critères de convergence pour une suite de parties de E décroissante pour l'inclusion.

Enfin, au paragraphe 3, on définit la notion de T_f-prolongement qui permet de mettre en évidence une suite de prolongements d'un élément u de E tels que la suite de leur restrictions converge vers u. Par exemple, c'est le cas où ne pouvant étudier un problème dans un sous-espace de $\mathbb{R}^\omega$, on se place dans un sous-espace de $\mathbb{R}^\Omega$ où $\omega \subset \Omega$, Ω étant plus régulier; le problème se simplifie alors. On généralise ici des travaux de J. Duchon [4].

1. T_f-splines. Soient E et F deux espaces de Banach. On considère un opérateur linéaire T continu de E dans F à image fermée et dont le noyau $\operatorname{Ker} T$ admet un supplémentaire topologique L.

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 65D07.

DÉFINITION 1.1. On dit qu'une partie K de E est *faiblement* (resp. *fortement*) *T-régulière* si $K+\operatorname{Ker} T$ est séquentiellement faiblement (resp. fortement) fermé dans E.

Dans toute la suite, le terme "séquentiellement faiblement (resp. fortement) fermé" sera abrégé par "s-faiblement (resp. s-fortement) fermé" et la convergence faible d'une suite (e_n) vers e sera notée $e_n \rightharpoonup e$.

LEMME 1.1. *Une partie K est faiblement (resp. fortement) T-régulière si est seulement si $T(K)$ est s-faiblement (resp. s-fortement) fermé dans F.*

Preuve. On démontre ce lemme pour les topologies faibles $\sigma(E,E')$ et $\sigma(F,F')$ (la démonstration pour les topologies fortes est analogue; l'hypothèse du supplémentaire topologique n'est plus alors nécessaire).

Soit K faiblement T-régulière. Prenons une suite (Tk_n) dans $T(K)$ telle que $Tk_n \rightharpoonup w$; $\operatorname{Ker} T$ admettant un supplémentaire topologique, T possède un inverse à droite T_{d}^{-1}; d'où l'existence d'un élément v de E tel que $v = T_{\mathrm{d}}^{-1} w$ et $w = Tv$.

Soit la décomposition de E en $L + \operatorname{Ker} T$; posons $k_n = l_n + t_n$ et $v = l + t$ avec l et l_n appartenant à L, t et t_n appartenant à $\operatorname{Ker} T$. T étant à image fermée, la restriction de T à L est un isomorphisme topologique; ainsi $Tk_n \rightharpoonup Tv$, donc $Tl_n \rightharpoonup Tl$ et $l_n \rightharpoonup l$.

De plus, $l_n + t = k_n + (t - t_n)$ appartient à $K + \operatorname{Ker} T$ qui est s-faiblement fermé car K est faiblement T-régulière, donc $l_n + t \rightharpoonup l + t = v \in K + \operatorname{Ker} T$. Ainsi v se décompose en $k + \tau$ avec $k \in K$ et $\tau \in \operatorname{Ker} T$; d'où $Tv = Tk = w \in T(K)$.

Réciproquement, supposons $T(K)$ s-faiblement fermé. Prenons une suite $(k_n + t_n)$ avec $k_n \in K$ et $t_n \in \operatorname{Ker} T$ convergeant faiblement vers v. On a $T(k_n + t_n) = Tk_n \rightharpoonup Tv$ (T étant linéaire est fortement continu, il est faiblement continu); or $T(K)$ est s-faiblement fermé; d'où il existe $k \in K$ tel que $Tk_n \rightharpoonup Tk$ et ainsi, par unicité de la limite, $Tk = Tv$; d'où $v \in K + \operatorname{Ker} T$, donc $K + \operatorname{Ker} T$ est s-faiblement fermé et K est faiblement T-régulière.

DÉFINITION 1.2. Soit $f : F \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, fonctionnelle propre.

On appelle *T_f-spline* de u, élément de E, relativement à une partie K de E, la solution — si elle existe — du problème

$$\text{(P)} \qquad \min\{f(Tv) : v \in u + K\}.$$

Pour obtenir l'existence d'une solution de (P), on supposera dans toute la suite que F est un espace de Banach réflexif. On impose alors à f et K les conditions (suffisantes) suivantes :

$$(\mathrm{H_e}) \qquad \begin{cases} f \text{ faiblement semi-continue inférieurement (s.c.i.), coercive,} \\ K \text{ faiblement } T\text{-régulière.} \end{cases}$$

On a le résultat suivant :

PROPOSITION 1.1. *Sous l'hypothèse $(\mathrm{H_e})$, tout élément u de E admet au moins un T_f-spline relativement à K.*

Preuve. On associe au problème (P) le problème (P′) :

$$\text{(P}'\text{)} \qquad \min\{f(w) : w \in T(u+K)\}.$$

Il est évident que l'existence d'une solution de (P′) entraîne celle d'une solution de (P) (et réciproquement). Avec l'hypothèse $(\mathrm{H_e})$, la fonctionnelle f est s.c.i., coercive et $T(K)$, donc $T(u+K)$, est s-faiblement fermé d'après le lemme 1.1; ainsi (P′) admet au moins une solution (cf. [5]).

Remarque 1.1. (i) On voit que pour assurer cette existence, on peut prendre pour f et K d'autres hypothèses. Par exemple, f convexe, fortement s.c.i. et K partie bornée, convexe, fortement T-régulière.

(ii) Il est clair que l'unicité de la solution de (P′) n'entraîne pas celle d'une solution de (P) (et réciproquement).

Cette dernière remarque conduit à imposer à K l'hypothèse suivante :

$$(\mathrm{H_u^1}) \qquad (K-K) \cap \operatorname{Ker} T = \{\theta_E\}, \quad \theta_E \text{ étant l'élément neutre de } E.$$

LEMME 1.2. *Sous l'hypothèse $(\mathrm{H_u^1})$, si le problème (P′) admet une solution unique, il en est de même pour le problème (P) et réciproquement.*

Preuve. Désignons par S (resp. S') l'ensemble des solutions de (P) (resp. de (P′)). Remarquons que $T(S) = S'$ et $T^{-1}(S') = S + \operatorname{Ker} T$.

Soit v' la solution unique de (P′); il existe donc $v \in S$ tel que $v' = Tv$. Soit $v_0 \in S$; donc $Tv_0 \in S'$, d'où $Tv = Tv_0$ et $v - v_0 \in \operatorname{Ker} T$. Or v_0, $v \in u + K$, d'où $v - v_0 \in K - K$. Ainsi $v - v_0 \in (K-K) \cap \operatorname{Ker} T$ et $v = v_0$ d'après $(\mathrm{H_u^1})$.

Réciproquement, soit v la solution unique de (P); alors $Tv \in S'$. Soit $v_0' \in S'$; il existe $v_0 \in S$ tel que $v_0' = Tv_0$, d'où $v_0 + \operatorname{Ker} T \subset S$; or $S = \{v\}$. Ainsi $v - v_0 \in (K-K) \cap \operatorname{Ker} T$.

Remarque 1.2. Il est facile de vérifier que lorsque l'hypothèse $(\mathrm{H_u^1})$ est satisfaite, la restriction de T à K est une *bijection*.

Pour obtenir l'unicité de la solution de (P′), donc de (P), on impose à f et K les hypothéses suivantes :

$$(\mathrm{H_u^2}) \qquad \begin{cases} f \text{ strictement convexe, fortement s.c.i., coercive,} \\ K \text{ fortement } T\text{-régulière, convexe.} \end{cases}$$

On a le résultat d'unicité suivant :

PROPOSITION 1.2. *Sous les hypothèses $(\mathrm{H_u^1})$ et $(\mathrm{H_u^2})$, tout élément u de E admet un T_f-spline relativement à K et un seul.*

Preuve. L'hypothèse $(\mathrm{H}_{\mathrm{u}}^2)$ assure l'existence et l'unicité de la solution du problème (P′), donc de (P), en remarquant que $T(u+K)$ est un convexe fermé puisque K est convexe est fortement T-régulière. Il suffit alors d'appliquer le lemme 1.2, avec l'hypothèse $(\mathrm{H}_{\mathrm{u}}^1)$.

Exemple 1.1. Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On se donne $\Lambda \subset [a,b]$ et $u \in H^2(a,b)$.

On considère le problème

$$(\mathrm{P}_1) \qquad \min\Big\{ \int_a^b |D^2v(t)|^2\,dt : v \in H^2(a,b),\ v(t)=u(t),\ t\in\Lambda\Big\}.$$

Pour se ramener à la formulation précédente, on pose

$$E = H^2(a,b), \quad F = L^2(a,b),$$
$$T : H^2(a,b) \ni v \mapsto D^2v \in L^2(a,b) \quad (\operatorname{Im} T \text{ est fermée});$$
$$f : w \mapsto \|w\|_{L^2(a,b)} \quad (f \text{ est strictement convexe, continue, coercive});$$
$$K = \{v \in H^2(a,b) : v(t) = 0,\ t \in \Lambda\} \quad (K \text{ convexe}).$$

On vérifie que K est l'orthogonal de l'ensemble K' défini par

$$K' = \{h(\cdot,t) \in H^2(a,b) : t \in \Lambda\}$$

(K' donc K est fermé) où h est le noyau reproduisant de $H^2(a,b)$, considéré comme sous-espace hilbertien de $\mathbb{R}^{[a,b]}$. D'autre part, $\operatorname{Ker} T$ est l'ensemble des polynômes de degré ≤ 1, définis sur $[a,b]$.

Ainsi K fermé et $\operatorname{Ker} T$ de dimension finie entraînent que $K + \operatorname{Ker} T$ est fermé et que $\operatorname{Ker} T$ admet un supplémentaire topologique. De plus, on a $K \cap \operatorname{Ker} T = \{\theta_E\}$ (dans le cas où Λ ne se réduit pas à un seul élément, ce que nous supposerons).

On est ainsi dans les conditions d'existence et d'unicité du T_f-spline, donc de la solution unique du problème (P_1).

Dans la pratique, on pourra prendre $\Lambda_0 \subset [a,b]$, réunion finie d'intervalles fermés disjoints; dans chaque intervalle I_k de Λ_0, on se donne un ensemble discret de points Σ_k.

On pose

$$\Lambda_1 = \bigcup \Sigma_k, \quad \Lambda_2 = [a,b] - \Lambda_0 \quad \text{et} \quad \Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2.$$

On vérifie dans ce cas que le T_f-spline de u relativement à K appartient à $C^1([a,b])$, qu'il coïncide avec u sur Λ_2 et que sur chaque intervalle $I_k = [a_k, a_{k+1}]$ de Λ_0, il coïncide avec la fonction spline (cubique) d'interpolation, solution de

$$\min\Big\{ \int_{I_k} |D^2v(t)|^2\,dt : v(t) = u(t),\ t\in\Sigma_k;$$
$$v^{(q)}(a_{k+\varepsilon}) = u^{(q)}(a_{k+\varepsilon}),\ q,\varepsilon = 0,1\Big\}.$$

Remarquons que, lorsque $\Lambda_0 = [a,b]$, on retrouve la fonction spline classique d'interpolation.

Exemple 1.2. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $V^{1,p}(\Omega)$, $p > 1$, l'espace de Beppo Levi, défini par (cf. [7])

$$V^{1,p}(\Omega) = \{v \in \mathcal{D}'(\Omega) : \partial^i v \in L^p(\Omega),\ 1 \le i \le n\}.$$

et soit $T : V^{1,p}(\Omega) \ni v \mapsto (\partial^i v)_{1\le i\le n} \in (L^p(\Omega))^n$. On se donne Λ, ouvert, contenu dans Ω et $u \in V^{1,p}(\Omega)$. On considère le problème

$$(\mathrm{P}_2) \qquad \min\Big\{ \int_\Omega g(Tv)\,dx : v = u \text{ p.p. sur } \Lambda\Big\}$$

avec g (convexe) : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tel que

$$\exists a \in \mathbb{R}^* \text{ et } b \in \mathbb{R} \text{ (nul si } \operatorname{mes}(\Omega) = +\infty) : \quad a\|t\|_{\mathbb{R}^n}^p + b \le g(t), \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

On pose $E = V^{1,p}(\Omega)$ et $F = \prod_{i=1}^n F_i$ avec $F_i = L^p(\Omega)$ (F réflexif),

$$f : F \ni w \mapsto \int_\Omega g(w)\,dx \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

(f est strictement convexe, continu, coercive, cf. [2]), et

$$K = \{k \in E : k = 0 \text{ p.p. sur } \Omega\} \quad (K \text{convexe}).$$

On vérifie que K est l'orthogonal, pour le produit de dualité, de l'ensemble

$$K' = \Big\{k_b' \in E' : \langle k_b', v\rangle_{(E,E')} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_b v\,dx,\ b \in B(\Lambda)\Big\}$$

où $B(\Lambda)$ est l'ensemble de tous les compacts b contenus dans Λ ($\mathbf{1}_b$ est la fonction caractéristique de b).

De plus, T est continu à image fermée et $\operatorname{Ker} T$ est l'ensemble des polynômes de degré nul, définis sur Ω (cf. [3]).

Pour les mêmes raisons que dans l'exemple 1.1, les conditions d'existence et d'unicité de la solution du problème (P_2) sont satisfaites.

Exemple 1.3. On pose $E = F = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, l'espace de Sobolev défini par

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) = \{w \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : D^\alpha w \in L^p(\Omega),\ |\alpha| \le m\}$$

avec $1 < p < \infty$ et $m \ge 0$; $T = \mathrm{Id}_E$ (remarquons que toute partie fermée K de E est alors T-régulière) et $f = \|\cdot\|_E$.

On se donne Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ ayant la propriété du m-pronlongement, un ouvert Λ contenu dans Ω et $u \in W^{m,p}(\Omega)$. La partie K est définie comme dans l'exemple 1.2.

Soit P_Ω un opérateur de prolongement de $W^{m,p}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

Alors, le T_f-spline de $P_\Omega(u)$ relativement à K, noté ici u_Λ, est indépendant de Ω et de P_Ω (en fait, il ne dépend que de la restriction de P_Ω à Λ). On a

$$\|u_\Lambda\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \le \|P_\Omega(u)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}\,.$$

2. Convergence

Lemme 2.1. *Soit (W_n) une suite d'ensembles de F, s-faiblement fermés et tels que $W_{n+1} \subset W_n$ et $(\bigcap W_n) \cap \operatorname{dom} f \neq \emptyset$. On suppose que les problèmes*

$$(\mathrm{P}_n) \qquad \min\{f(w) : w \in W_n\}, \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}\,,$$

et

$$(\mathrm{P}_\infty) \qquad \min\Big\{f(w) : w \in \bigcap W_n\Big\}$$

admettent chacun une solution unique, notée respectivement ω_n et ω_∞. Alors

(i) $\omega_n \rightharpoonup \omega_\infty$ *dans* F,
(ii) $\lim_{n\to\infty} f(\omega_n) = f(\omega_\infty)$.

Preuve. L'existence et l'unicité de la solution du problème (P_∞) assurent que $\bigcap W_n \neq \emptyset$; de plus, $f(\omega_\infty)$ a une valeur finie car $(\bigcap W_n) \cap \operatorname{dom} f = \emptyset$. Des inclusions $\bigcap W_n \subset W_{n+1} \subset W_n$, on déduit que $f(\omega_n) \le f(\omega_{n+1}) \le f(\omega_\infty)$.

Ainsi, la suite $(f(\omega_n))$ est croissante est majorée dans $\mathbb{R}$, donc convergente. Puisque f est coercive, la suite (ω_n) est bornée dans F réflexif; il existe donc une sous-suite (ω_{n_k}) extraite de (ω_n) convergeant faiblement vers ω^*.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé; pour tout $n_k > n$, on a $W_n \subset W_{n_k}$, d'où la suite (ω_{n_k}) appartient à W_n qui est s-faiblement fermé; ainsi $\omega^* \in W_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\omega^* \in \bigcap W_n$.

D'après la faible semi-continuité inférieure de f, on a

$$f(\omega^*) \le \liminf_{k\to\infty} f(\omega_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(\omega_{n_k}) \le f(\omega_\infty)\,,$$

d'où $f(\omega^*) = f(\omega_\infty)$ et $\omega^* = \omega_\infty$ puisque le problème (P_∞) admet une solution unique. De plus, la limite étant indépendante de la suite extraite, on a $\omega_n \rightharpoonup \omega_\infty$.

Dans tout ce qui suit, on considère une suite (K_n) de parties de E, décroissante pour l'inclusion, les K_n étant s-faiblement T-régulières. On pose $K = \bigcap K_n$, supposé non vide.

Soit l'hypothèse suivante :

$$(\mathrm{H}_\mathrm{c}^1) \qquad \begin{cases} u \in E,\ f(Tu) \neq +\infty, \\ \text{le } T_f\text{-spline de } u \text{ relativement à } K_n \text{ (resp. à } K), \\ \quad \text{noté } u^{K_n} \text{ (resp. } u^K), \text{ est unique.} \end{cases}$$

Proposition 2.1. *Pour tout u vérifiant l'hypothèse* $(\mathrm{H}_\mathrm{c}^1)$, *on a :*

(i) $Tu^{K_n} \rightharpoonup Tu^K$ *dans* $\sigma(F, F')$.
(ii) $\lim_{n\to\infty} f(Tu^{K_n}) = f(Tu^K)$.

Preuve. Il suffit d'appliquer le lemme précédent, en posant $W_n = T(u + K_n)$, $\omega_n = T(u + u^{K_n})$ et $\omega_\infty = T(u + u^K)$.

Faisons une autre hypothèse :

$(\mathrm{H}_\mathrm{c}^2)$ Il existe un sous-espace vectoriel fermé E_0 de E, T-régulier et tel que $K_1 \subset E_0$ et $E_0 \cap \operatorname{Ker} T = \{\theta_E\}$.

Proposition 2.2. *Sous les hypothèses* $(\mathrm{H}_\mathrm{c}^1)$ *et* $(\mathrm{H}_\mathrm{c}^2)$, *on a $u^{K_n} \rightharpoonup u^K$ dans $\sigma(E, E')$.*

Preuve. D'après la remarque 1.2, la restriction T_0 de T à E_0 est une bijection car E_0 vérifie l'hypothèse $(\mathrm{H}_\mathrm{u}^1)$; c'est de plus un isomorphisme topologique car E_0 (resp. $T(E_0)$) est un sous-espace vectoriel fermé dans E (resp. dans F).

Avec l'hypothèse $(\mathrm{H}_\mathrm{c}^1)$ et d'après la proposition 2.1, on a $T(u^{K_n} - u^K) \rightharpoonup 0$. Or $u^{K_n} - u^K \in E_0$, d'où $T_0(u^{K_n} - u^K) \rightharpoonup 0$ et ainsi $u^{K_n} \rightharpoonup u^K$.

Lemme 2.2. *Sous les hypothèses* $(\mathrm{H}_\mathrm{c}^1)$ *et* $(\mathrm{H}_\mathrm{c}^2)$, *et si F est un espace de Banach uniformément convexe, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\lim_{n\to\infty} \|u^{K_n} - u^K\|_E = 0$,
(ii) $\limsup_{n\to\infty} \|Tu^{K_n}\|_F \le \|Tu^K\|_F$.

Preuve. Il est évident que la propriété (i) entraîne la propriété (ii).

Pour la réciproque, on a $Tu^{K_n} \rightharpoonup Tu^K$, grâce à $(\mathrm{H}_\mathrm{c}^1)$; ceci entraîne avec la propriété (ii) et F uniformément convexe que $\lim_{n\to\infty} \|T(u^{K_n} - u^K)\|_F = 0$.

Avec l'hypothèse $(\mathrm{H}_\mathrm{c}^2)$ et les mêmes arguments que ceux utilisés dans la preuve de la proposition 2.2, on déduit que $\lim_{n\to\infty} \|u^{K_n} - u^K\|_E = 0$.

Proposition 2.3. *Sous les hypothèses* $(\mathrm{H}_\mathrm{c}^1)$ *et* $(\mathrm{H}_\mathrm{c}^2)$, *et si f est la norme d'un espace de Banach uniformément convexe, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \|u^{K_n} - u^K\|_E = 0\,.$$

Preuve. D'après la proposition 2.1, on a $\lim_{n\to\infty} \|Tu^{K_n}\|_F = \|Tu^K\|_F$; il suffit alors d'appliquer le lemme 2.2.

Remarque. On pourra prendre pour F, par exemple, un espace de Hilbert ou les espaces $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$.

3. Approximation par T_f-prolongement. Soient ω et Ω deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, $\omega \subset \Omega$. L'espace E est ici contenu dans $\mathbb{R}^\Omega$ (ensemble des fonctions définies sur Ω). Soit V un espace de Banach contenu dans $\mathbb{R}^\omega$.

On considère l'opérateur de restriction R de E dans V défini par $Re = e|_\omega$, $e \in E$ (restriction de e à ω). On suppose R linéaire continu.

DÉFINITION 3.1. On appelle *opérateur de prolongement* de V dans E toute application linéaire continue P vérifiant $R \circ P = \mathrm{Id}_V$.

Remarquons que R est surjectif, $\operatorname{Ker} R$ admet un supplémentaire topologique et P est injectif et à image fermée.

On désigne par $\Xi(V,E)$ l'ensemble des opérateurs de prolongement P de V dans E; cet ensemble est convexe, fermé dans $\mathcal{L}(V,F)$; dans toute la suite, on le supposera non vide.

DÉFINITION 3.2. On appelle *T_f-prolongement* de v, élément de V, relativement à une partie V, la solution — si elle existe — du problème

$$\min\{f(Te) : e \in E, Re \in v + K\}.$$

PROPOSITION 3.1. *Pour tout v de V et pour toute partie K de V, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *v^* est un T_f-prolongement de v relativement à K.*

(ii) *Pour tout P de $\Xi(V,E)$, v^* est un T_f-spline de Pv relativement à $\operatorname{Ker} R + P(K)$.*

Preuve. Pour tout e de E, on a $\{Re = v\} \Leftrightarrow \{Re = R(Pv)\} \Leftrightarrow \{e \in Pv + \operatorname{Ker} R)\}$; d'où pour tout $P \in \Xi(V,E)$, on a $\{Re \in v + K\} \Leftrightarrow \{e \in Pv + (\operatorname{Ker} R + P(K))\}$.

Or (i)$\Leftrightarrow$ $\{f(Tv) = \min\{f(Te) : e \in E,\ e \in v + K\}\}$, c'est-à-dire, d'après ce qui précède,

$$\text{(i)} \Leftrightarrow \{f(Tv) = \min\{f(Te) : e \in Pv + (\operatorname{Ker} R + P(K))\}\} \Leftrightarrow \text{(ii)}.$$

Pour l'existence et l'unicité du T_f-prolongement, on pourra se rapporter aux résultats du paragraphe 1. Remarquons ici que R étant surjectif et T à image fermée, on a

$$T(\operatorname{Ker} R) \text{ fermé} \Leftrightarrow R(\operatorname{Ker} T) \text{ fermé} \Leftrightarrow \operatorname{Ker} R + \operatorname{Ker} T \text{ fermé}.$$

Pour pouvoir utiliser les résultats du paragraphe 2 relatifs à la convergence, on donne le lemme suivant :

LEMME 3.1. *Pour tout prolongement P de $\Xi(V,E)$ et pour toute suite (K_n) de parties de E, on a*

$$\bigcap(\operatorname{Ker} R + P(K_n)) = \operatorname{Ker} R + P\Big(\bigcap K_n\Big).$$

Preuve. Posons $A_n = \operatorname{Ker} R + P(K_n)$ et $B = \operatorname{Ker} R + P(\bigcap K_n)$.

On a $P(\bigcap K_n) = \bigcap P(K_n)$ car P est injectif; d'où $B = \operatorname{Ker} R = \bigcap P(K_n)$, c'est-à-dire $B \subset A_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $B \subset \bigcap A_n$.

D'autre part, soit $e \in \bigcap A_n$; pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, on a $e = r_n + k_n = r_m + k_m$ avec $r_n, r_m \in \operatorname{Ker} R$ et $k_n, k_m \in K_m$. Ainsi $Re = k_n = k_m$; d'où il existe $K \in \bigcap K_n$ et donc $r \in \operatorname{Ker} R$ tels que $e = r + k$; d'où $\bigcap A_n \subset B$.

On se donne à présent un élément v de V et une suite (K_n) de parties de V avec $K = \bigcap K_n = \{\theta_V\}$ tels que pour tout n de $\mathbb{N}$, le T_f-prolongement de v relativement à K_n (resp. à K), noté $v_\Omega^{K_n}$ (resp. v_Ω^K), existe et soit unique. On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 3.2. *Si la suite $(v_\Omega^{K_n})$ converge faiblement (resp. fortement) vers v_Ω^K, alors la suite des restrictions $(R(v_\Omega^{K_n}))$ converge faiblement (resp. fortement) vers v dans V.*

Preuve. D'après la proposition 3.1, on a $v_\Omega^{K_n} = Pv + r_n + Pk_n$ avec $r_n \in \operatorname{Ker} R$, $k_n \in K_n$ et $v_\Omega^K = Pv + r$ avec $r \in \operatorname{Ker} R$ ($K = \{\theta_V\}$). R étant continu (faiblement et fortement), la suite $(R(v_\Omega^{K_n}))$ converge faiblement (resp. fortement) vers $R(v_\Omega^K) = R(Pv + r) = v$.

Références

[1] M. Attéia, *Convergence interne et externe des fonctions spline d'interpolation*, Séminaire d'Analyse Numérique de Toulouse, 1975.

[2] P. G. Ciarlet, *Élasticité tridimensionnelle*, Masson, Paris 1986.

[3] J. Deny et J. L. Lions, *Les espaces du type de Beppo Levi*, Ann. Inst. Fourier 5 (1954), 305–370.

[4] J. Duchon, *Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in Sobolev spaces*, in: Lecture Notes in Math. 571, Springer, 1977, 85–100.

[5] I. Ekeland et R. Temam, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod, Paris 1974.

[6] P. J. Laurent et Pham-Dinh-Tuan, *Global approximation of a compact set by elements of a convex set in a normed space*, Numer. Math. 15 (1970), 137–150.

[7] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Hermann, Paris 1972.

[8] D. V. Pai, *On nonlinear minimization problems and Lf-splines, I*, J. Approx. Theory 39 (1983), 228–235.

LABORATOIRE ANALYSE NUMÉRIQUE
UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
118, ROUTE DE NARBONNE
31062 TOULOUSE CEDEX, FRANCE

Received June 30, 1992 (2961)