Contents of Volume 106, Number 2

STUDIA MATHEMATICA

Executive Editors: **Z. Ciesielski, A. Pełczyński, W. Żelazko**

The journal publishes original papers in English, French, German and Russian, mainly in functional analysis, abstract methods of mathematical analysis and probability theory. Usually 3 issues constitute a volume.

Detailed information for authors is given on the inside back cover. Manuscripts and correspondence concerning editorial work should be addressed to

STUDIA MATHEMATICA

Śniadeckich 8, P.O. Box 137, 00-950 Warszawa, Poland, fax 48-22-293997

Correspondence concerning subscription, exchange and back numbers should be addressed to

INSTITUTE OF MATHEMATICS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES
Publications Department

Śniadeckich 8, P.O. Box 137, 00-950 Warszawa, Poland, fax 48-22-293997

Published by the Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences
Typeset in TEX at the Institute
Printed and bound by
drukarnia
herman & herman
02-240 WARSZAWA, ul. Jakobinów 23

PRINTED IN POLAND

ISBN 83-85116-90-7 ISSN 0039-3223

Champs d'algèbres duales et algèbres duales uniformes d'opérateurs sur l'espace de Hilbert

par

GILLES CASSIER (Paris)

Abstract. In the first part of this work, we establish some general properties of dual algebras and of direct integral dual algebras. In the second part, we give a complete description of singly generated uniform dual algebras of operators.

Une *algèbre duale* sur l'espace de Hilbert est une sous-algèbre de l'algèbre $L(H)$ des opérateurs bornés sur H qui est fermée pour la topologie ultrafaible définie par dualité avec l'espace $L^1(H)$ des opérateurs à traces. Si $T \in L(H)$, on note $\mathcal{A}_T$ l'algèbre duale engendrée par T, c'est-à-dire la plus petite algèbre duale contenant T, et on désigne par Q_T le quotient de $L^1(H)$ par le prépolaire de $\mathcal{A}_T$, qui s'identifie au prédual de $\mathcal{A}_T$. Pour obtenir plus de détails sur ces algèbres, on pourra consulter [1, 2].

On dit qu'une algèbre duale $\mathcal{A}$ est *uniforme* lorsque la transformation de Gelfand est une isométrie, ce qui sera noté en abrégé sous la forme : «$\mathcal{A}$ est une A.D.U.». C'est en particulier le cas pour $\mathcal{A}_T$, lorsque T est un opérateur sous-normal ou lorsque T est une contraction pour laquelle le calcul fonctionnel de Nagy–Foiaş est isométrique.

Dans la première partie de ce travail, on établit quelques propriétés générales des algèbres duales et des champs d'algèbres duales.

Dans la seconde partie, on va obtenir dans le cas général la décomposition de l'algèbre $\mathcal{A}_T$, donnée dans [3] dans un cas particulier, et on la complètera.

I. Quelques propriétés générales. Pour un opérateur $T \in L(H)$, on introduit le spectre faible $\sigma^*(T)$ de T qui est trés lié à la structure de l'algèbre duale $\mathcal{A}_T$, et que nous avons déja utilisé dans [3, 4].

DÉFINITION. On appelle *spectre faible* d'un opérateur T sur H l'ensemble des nombres complexes α tels que l'idéal ultrafaiblement fermé engendré par $T - \alpha I$ soit un idéal propre de $\mathcal{A}_T$.

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 47D27.

On rappelle (cf. théorème 1 de [3]) que l'intérieur U_T du spectre faible de T est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et que, si $\alpha \in \sigma^*(T)$, on peut trouver un opérateur à trace positif J_α (non unique en général) tel que

$$1 = \operatorname{Tr}(J_\alpha) = \|J_\alpha\|_1 \quad \text{et} \quad \operatorname{Tr}(J_\alpha S(T - \alpha I)) = 0 \quad \text{pour tout } S \text{ de } \mathcal{A}_T .$$

Le spectre faible $\sigma^*(T)$ n'est pas fermé en général, mais l'ensemble

$$\{[J_\alpha] : \alpha \in \sigma^*(T)\}$$

est faiblement fermé dans Q_T, en particulier il est fermé pour la norme, ce qui permet de définir une structure d'espace métrique complet sur $\sigma^*(T)$ naturelle vis-à-vis de l'opérateur T et de l'algèbre $\mathcal{A}_T$. Il peut être vide, mais cela correspond à un type particulier d'algèbres duales pour $\mathcal{A}_T$. En effet, pour tout nombre complexe α l'opérateur $T - \alpha I$ possède alors des quasi-inverses approchés dans $\mathbb{C}[T]$ pour la topologie ultrafaible (nous verrons déjà au cours du paragraphe II que cette situation est très restrictive dans le cas où $\mathcal{A}_T$ est uniforme). Pour S appartenant à $\mathcal{A}_T$, on définit la fonction $\widetilde{S}$ sur $\sigma^*(T)$ par $\widetilde{S}(\alpha) = \operatorname{Tr}(J_\alpha S)$. Rappelons que $\widetilde{S}$ est une fonction holomorphe bornée sur U_T (cf. théorème 1 de [3]).

On notera $\partial\sigma^*(T)$ la frontière de $\sigma^*(T)$ et $\Gamma(T)$ le spectre périphérique de T ($\Gamma(T) = \{z \in \sigma(T) : |z| = \|T\|\}$).

On peut ajouter certaines propriétés utiles de $\sigma^*(T)$ dont la liste est donnée par la proposition suivante :

PROPOSITION. (i) *Si α et β sont deux points de $\sigma^*(T)$ pour lesquels $\|[J_\alpha] - [J_\beta]\| = 2$, on peut décomposer H et T sous la forme $T = T_1 \oplus T_2$ et $H = H_1 \oplus H_2$ où $T_1 \oplus 0$, $0 \oplus T_2 \in \mathcal{A}_T$ et*

$$\alpha \in \sigma^*_{H_1}(T_1), \qquad \alpha \notin \sigma^*_{H_2}(T_2),$$
$$\beta \in \sigma^*_{H_2}(T_2), \qquad \beta \notin \sigma^*_{H_1}(T_1).$$

(ii) *Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \sigma^*(T)$. Si $\|[J_\alpha] - [J_\beta]\| < 2$ et $\|[J_\beta] - [J_\gamma]\| < 2$, on a obligatoirement $\|[J_\alpha] - [J_\gamma]\| < 2$. Dans l'ensemble $\{[J_\alpha] : \alpha \in \sigma^*(T)\}$ muni de la topologie induite par Q_T les boules ouvertes de rayon 2 sont aussi fermées.*

(iii) *Si $\alpha \notin \sigma^*(T)$, ou bien α appartient au spectre essentiel à gauche de T et au spectre essentiel à droite de T, ou bien α appartient au résolvant de T et l'opérateur $(T - \alpha I)^{-1}$ se trouve dans $\mathcal{A}_T$.*

(iv) *$\sigma^*(T) \cap \Gamma(T) \subseteq \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ et $\partial\sigma^*(T) \subseteq \sigma(T)$.*

Preuve. (i) On choisit un opérateur S de norme un dans $\mathcal{A}_T$ pour lequel $2 = \operatorname{Tr}(J_\alpha S) - \operatorname{Tr}(J_\beta S)$. Posons $u = \operatorname{Tr}(J_\alpha S)$ et considérons la suite de contractions

$$S_n = \frac{I + \overline{u}S + \ldots + \overline{u}^n S^n}{n+1}.$$

D'après le théorème ergodique de F. Riesz et B. Sz.-Nagy la suite $(S_n)_{n\ge0}$ converge fortement [8, p. 397–399], a fortiori ultrafaiblement, vers une projection orthogonale P vérifiant $\operatorname{Tr}(J_\alpha P) = 1$ et $\operatorname{Tr}(J_\beta P) = 0$. Il suffit alors de prendre pour T_1 et T_2 les opérateurs PTP et $(I-P)T(I-P)$ car $P \in \mathcal{A}_T$.

(ii) Supposons que $\|[J_\alpha] - [J_\gamma]\| = 2$. On a vu précédemment qu'il existe alors une projection orthogonale $P \in \mathcal{A}_T$ telle que $\operatorname{Tr}(J_\alpha P) = 1$ et $\operatorname{Tr}(J_\gamma P) = 0$. Comme $\beta \in \sigma^*(T)$, on a nécessairement $\operatorname{Tr}(J_\beta P) = 0$ ou $\operatorname{Tr}(J_\beta P) = 1$. Lorsque $\operatorname{Tr}(J_\beta P) = 0$ (resp. $\operatorname{Tr}(J_\beta P) = 1$) l'opérateur $S = I - 2P$ (resp. $I + 2P$) vérifie $\|S\| = 1$ et $\operatorname{Tr}((J_\beta - J_\alpha)S) = 2$ (resp. $\operatorname{Tr}((J_\beta - J_\gamma)S) = 2$), d'où $\|J_\beta - J_\alpha\| = 2$ (resp. $\|J_\beta - J_\gamma\| = 2$) et on aboutit à une contradiction. La seconde assertion découle de cette propriété.

(iii) Si $\alpha \notin \sigma^*(T)$, il existe une suite généralisée $((T - \alpha I)P_i(T))_{i\in I}$ qui converge ultrafaiblement vers l'identité. D'autre part, $\operatorname{Ker}(T - \alpha I) = 0$ et $\operatorname{Ker}(T^* - \overline{\alpha}I) = 0$, sinon α se trouverait dans $\sigma^*(T)$. Si α n'appartient pas au spectre essentiel à gauche de T ou si α n'appartient pas au spectre essentiel à droite de T, $T - \alpha I$ est alors inversible et

$$(T - \alpha I)^{-1} = \lim\nolimits^{w^*} P_i(T) \in \mathcal{A}_T .$$

(iv) Soit $\alpha \in \sigma^*(T) \cap \Gamma(T)$. On se ramène au cas où $\|T\| = 1$. D'après le théorème ergodique de F. Riesz et B. Sz.-Nagy, la suite de contractions

$$R_n = \frac{I + \overline{\alpha}T + \ldots + \overline{\alpha}^n T^n}{n+1}$$

converge fortement, a fortiori ultrafaiblement, vers une projection orthogonale Q. Cette projection est non nulle. En effet, si J_α est un opérateur à trace positif associé à α (cf. le début de ce paragraphe), on a $\operatorname{Tr}(J_\alpha R_n) = 1$ pour tout $n \ge 0$ et par suite $\operatorname{Tr}(J_\alpha Q) = 1$. Tout vecteur non nul, appartenant à l'image de Q, est un vecteur propre de T pour la valeur propre α.

Soit $\alpha \in \partial\sigma^*(T)$. Supposons $\alpha \in \varrho(T)$; en approchant α par une suite contenue dans le complémentaire de $\sigma^*(T)$ et en utilisant (iii), on montre que $(T - \alpha I)^{-1}$ se trouve dans $\mathcal{A}_T$. Considérons une suite $(\alpha_n)_{n\ge0}$ dans $\sigma^*(T)$ qui converge vers α. Comme $(T - \alpha I)^{-1} \in \mathcal{A}_T$, il vient

$$\frac{1}{|\alpha - \alpha_n|} = |\operatorname{Tr}(J_{\alpha_n}(T - \alpha I)^{-1})| \le \|(T - \alpha I)^{-1}\| ,$$

ce qui est impossible pour n assez grand; par conséquent, $\alpha \in \sigma(T)$.

Nous allons maintenant considérer des champs hilbertiens d'opérateurs et des champs d'algèbres d'opérateurs. Nous conseillons au lecteur de consulter [5] pour les définitions et les propriétés de ces champs, que nous utiliserons par la suite. La fin de cette première partie est donc consacrée à dégager quelques propriétés générales des champs d'algèbres duales. Elles nous seront utiles pour décrire les algèbres duales uniformes d'opérateurs au cours de la seconde partie.

On étudie donc le cas où $H = \int^{\oplus} H(t)\,d\mu(t)$, où μ est une probabilité sur un espace K localement compact, métrisable et séparable, et où $H(t)$ est un espace de Hilbert séparable. L'espace H sera donc séparable. On note $\mathcal{A}$ une algèbre duale sur H, formée d'opérateurs décomposables et contenant l'ensemble des projecteurs de la forme $t \to 1_{\Omega}(t)I_{H(t)}$ ($I_{H(t)}$ désigne ici l'identité de $H(t)$ et Ω est un borélien de K). Si $(T_n)_{n\geq 0}$ est une suite ultrafaiblement dense dans $\mathcal{A}$ et $t \in K$, on note $\mathcal{A}_t$ l'algèbre duale contenue dans $L(H(t))$, engendrée par la suite d'opérateurs $(T_n(t))_{n\geq 0}$. On désigne par Q_t le quotient de $L^1(H(t))$ par le prépolaire de $\mathcal{A}_t$, qui s'identifie au prédual de $\mathcal{A}_t$.

Nous allons définir le champ d'espaces de Banach construit avec les préduaux Q_t. Pour cela, nous introduisons le sous-espace Q_0 du produit cartésien $\prod_{t\in K} Q_t$, constitué par les éléments $x = ([L_t])_{t\in K}$ qui vérifient les deux propriétés suivantes :

- L'application $t \to \|[L_t]\|$ appartient à l'espace $L^1(\mu)$.
- Pour tout opérateur S appartenant à $\mathcal{A}$ l'application $t \to \mathrm{Tr}(S(t)L_t)$ est mesurable.

Sur Q_0, on définit la semi-norme n par

$$n(x) = \int \|[L_t]\|_{Q_t}\,d\mu(t),$$

et on appelle N_0 le sous-espace formé des éléments pour lesquels $n(x) = 0$. On désigne par Q l'espace quotient de Q_0 par N_0. On notera aussi le champ d'espaces de Banach Q sous la forme

$$Q = \int^{\oplus} Q_t\,d\mu(t).$$

THÉORÈME 1. *L'algèbre $\mathcal{A}$ vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *Le prédual de $\mathcal{A}$ s'identifie au champ d'espaces de Banach construit à partir des préduaux Q_t :*

$$Q = \int^{\oplus} Q_t\,d\mu(t).$$

La forme bilinéaire définissant la dualité est donnée par la formule

$$\langle([L_t])_{t\in K}, S\rangle = \int \mathrm{Tr}(S(t)L_t)\,d\mu(t).$$

(ii) *$\mathcal{A}$ coïncide avec le champ d'algèbres duales défini par les algèbres duales $\mathcal{A}_t$:*

$$\mathcal{A} = \int \mathcal{A}_t\,d\mu(t).$$

(iii) *$\mathcal{A}$ est une A.D.U. si et seulement si $\mathcal{A}_t$ est une A.D.U. pour presque tout t.*

Remarques. (1) Si F désigne la partie dénombrable de K associée à la partie discrète de μ, $\mu_{\mathrm{d}} = \sum_{t\in F} \alpha_t\delta_t$, l'algèbre $\mathcal{A}$ contient le projecteur

$t \to 1_F(t)I_{H(t)}$. Ceci permet de décomposer $\mathcal{A}$ en somme directe de la compression de $\mathcal{A}$ sur le sous-espace $\int_{F^c}^{\oplus} H(t)\,d\mu(t)$ correspondant à la partie diffuse de μ, et de l'algèbre duale $\mathcal{A}_{\mathrm{d}}$ qui est la compression de $\mathcal{A}$ sur le sous-espace $H_{\mathrm{d}} = \int_F^{\oplus} H(t)\,d\mu(t)$. Le prédual de $\mathcal{A}$ s'identifie à la somme directe des deux préduaux associés aux algèbres considérées ci-dessus, lorsque l'on prend pour norme la somme des normes des deux composantes. Notons que H_{d} s'identifie à la somme directe des espaces $(H(t))_{t\in F}$ munie du produit scalaire

$$\langle x \mid y\rangle = \sum_{t\in F} \alpha_t\langle x(t) \mid y(t)\rangle.$$

L'algèbre $\mathcal{A}_{\mathrm{d}}$ se décompose sous la forme

$$\mathcal{A}_{\mathrm{d}} = \bigoplus_{t\in F} \mathcal{A}_t.$$

Le prédual Q_{d} s'identifie à la somme directe des préduaux

$$Q_{\mathrm{d}} = \bigoplus_{t\in F} Q_t$$

munie de la norme $\|([L_t])_{t\in F}\| = \sum_{t\in F} \alpha_t\|[L_t]\|$.

(2) On prendra garde qu'un champ mesurable d'opérateurs $(L_t)_{t\in K}$, où L_t est un opérateur à trace sur $H(t)$ et où $\int_{\Omega} \|L_t\|_1\,d\mu(t)$ est finie, ne définit pas en général un opérateur à trace sur H (sauf dans le cas où μ est discrète). De même, la formule de dualité dans (ii) ne correspond pas à la trace usuelle (sauf dans le cas où μ est discrète), mais plutôt à une trace associée à l'algèbre duale $\mathcal{A}$.

Preuve du théorème 1. L'utilisation d'un champ de bases orthonormales (cf. [5], prop. 1, p. 143) permet de construire une partition d'ensembles mesurables sur chacun desquels la dimension de $H(t)$ est constante. Puisque $\mathcal{A}$ contient les projecteurs de la forme $t \to 1_{\Omega}(t)I_{H(t)}$, on voit, en utilisant les décompositions en somme directe de H et de $\mathcal{A}$ et la régularité intérieure de μ par rapport aux fermés, que l'on peut se ramener au cas où la dimension de $H(t)$ est constante sur K. On construit alors, à l'aide d'un champ de bases orthonormales, un opérateur U décomposable allant de H dans un espace de Hilbert défini par un champ constant, et tel que $U(t)$ soit un opérateur unitaire pour tout t de K. $\mathcal{A}$ est donc conjuguée par U à une algèbre duale sur un champ constant d'espaces de Hilbert. Par conséquent, pour prouver les propriétés du théorème, il suffira de le faire dans le cas où H est de la forme $L^2(d\mu, E)$, où E est un espace de Hilbert.

(i) Nous introduisons l'opérateur Δ qui fait correspondre à chaque opérateur S de $\mathcal{A}$ la forme linéaire continue l_S agissant sur Q de la manière suivante :

$$l_S(x) = \int \operatorname{Tr}(S(t)L_t)\, d\mu(t)\,.$$

Tout revient à démontrer que Δ est une isométrie surjective de $\mathcal{A}$ sur Q', et que Δ est continue lorsqu'on munit $\mathcal{A}$ de la topologie ultrafaible et Q' de la topologie faible $\sigma(Q', Q)$ (c.à.d. Δ est w^*-continue). En effet, Δ est alors un homéomorphisme isométrique de $\mathcal{A}$ sur Q' pour les topologies faibles précitées.

Nous avons déjà par construction $\|\Delta(S)\| \le \|S\|$. Soit r un réel strictement positif et plus petit que $\|S\|$; le borélien $W = \{t \in K : \|S(t)\| > r\}$ est alors de mesure positive. Pour un réel ε appartenant à l'intervalle $]0,1[$, l'ensemble

$$B = \{(t, X) \in K \times L^1(E) : |\operatorname{Tr}(S(t)X)| \ge (1-\varepsilon)\|S(t)\| \text{ et } \|X\|_1 \le 1+\varepsilon\}$$

est un borélien de $K \times L^1(E)$. Le théorème de la sélection mesurable [5, p. 342–343] s'applique; il montre l'existence d'une application mesurable $t \to X_t$ définie sur K et telle que (t, X_t) appartienne à B.

Posons

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \operatorname{Tr}(S(t)X_t) = 0,\\ \dfrac{\operatorname{Tr}(S(t)X_t)}{|\operatorname{Tr}(S(t)X_t)|} & \text{si } \operatorname{Tr}(S(t)X_t) \ne 0, \end{cases}$$

puis

$$Y_t = f(t)\frac{1_W(t)}{\mu(W)} X_t\,.$$

On définit un élément y de Q par $y = ([Y_t])$ pour lequel on a

$$\|y\| = \frac{1}{\mu(W)} \int_W \|[X_t]\|\, d\mu(t) \le 1+\varepsilon\,,$$

et

$$\begin{aligned} l_S(y) &= \frac{1}{\mu(W)} \int_W \operatorname{Tr}(X_t S(t))\, d\mu(t)\\ &\ge \frac{1}{\mu(W)} \int_W (1-\varepsilon)\|S(t)\|\, d\mu(t) \ge (1-\varepsilon)r\,. \end{aligned}$$

Ceci entraîne

$$\|l_S\| \ge \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} r\,.$$

En faisant tendre ε vers zéro et r vers $\|S\|$, on obtient $\|l_S\| \ge \|S\|$, et il en résulte finalement que Δ est une isométrie.

Pour montrer que Δ est w^*-continue, il suffit de prouver que $l_{S_n} \xrightarrow{w^*} 0$ lorsque $S_n \xrightarrow{w^*} 0$. Soit $x = ([L_t])_{t\in K}$ un élément de Q tel que chaque classe $[L_t]$ admette un représentant autoadjoint (il suffit de faire la preuve dans ce cas); l'ensemble

$$B_1 = \{(t, X) \in K \times L^1(E) : X = X^*,\ [X] = [L_t] \text{ et } \|X\|_1 \le \|L_t\| + 1\}$$

est borélien. Ceci permet de construire un champ mesurable d'opérateurs à trace autoadjoints qui appartient à $L^1(\mu, L^1(E))$. Pour tout $t \in K$, on peut écrire X_t sous la forme

$$X_t = \sum_k \lambda_k(t)\varepsilon_k(t) \otimes \varepsilon_k(t)\,,$$

où les fonctions positives $t \to \lambda_k(t)$ sont mesurables et où les applications $t \to \varepsilon_k(t)$ définissent un champ mesurable de bases orthonormales. On introduit ensuite les champs mesurables de vecteurs

$$t \to u_k(t) = \sqrt{\lambda_k(t)}\varepsilon_k(t)\,,$$

qui vérifient

$$\sum_k \|u_k\|^2 = \int \|X_t\|\, d\mu(t) < \infty\,.$$

L'opérateur $A = \sum_k u_k \otimes u_k$ est donc un opérateur à trace sur $L^2(\mu, E)$, qui ne coïncide pas en général avec le champ mesurable d'opérateurs $t \to X_t$. Comme $S_n \xrightarrow{w^*} 0$, il vient

$$0 = \lim \operatorname{Tr}(S_n A) = \lim \int \operatorname{Tr}(S_n(t)X_t)\, d\mu(t) = \lim l_{S_n}(x)\,.$$

Ainsi $l_{S_n} \xrightarrow{w^*} 0$, et il en résulte que Δ est w^*-continue.

Il nous reste à montrer que Δ est surjective. Or l'image de Δ est w^*-fermée puisque Δ est une isométrie w^*-continue. Supposons que Δ ne soit pas surjective; il existe alors un élément $x = ([L_t])_{t\in K}$ non nul de Q tel que $l_S(x) = 0$ pour tout S de $\mathcal{A}$. Pour un borélien Ω arbitraire de K et un élément quelconque S de $\mathcal{A}$, on considère le champ mesurable d'opérateurs $t \to 1_\Omega(t)S(t)$ qui appartient à $\mathcal{A}$. Il vient

$$\int_\Omega \operatorname{Tr}(S(t)L_t)\, d\mu(t) = 0\,.$$

Ceci implique que l'on a $\operatorname{Tr}(X(t)T_n(t)) = 0$, pour tout entier positif n, sur un ensemble Ω_0 de mesure égale à un. Il en découle que $[X_t] = 0$ dans Q_t si $t \in \Omega_0$. Par conséquent, x est nul et on aboutit à une contradiction. L'algèbre $\mathcal{A}$ est donc le dual de Q.

(ii) On introduit l'algèbre $\mathcal{B}$ des opérateurs décomposables S pour lesquels $S(t)$ appartient à $\mathcal{A}_t$ pour presque tout t. Nous allons d'abord montrer que $\mathcal{B}$ est une algèbre duale; elle contiendra alors l'algèbre $\mathcal{A}$ puisque la suite $(T_n)_{n\ge 0}$ se trouve déjà dans $\mathcal{B}$. Il est clair que $\mathcal{B}$ est une algèbre et, en vertu du théorème de Krein–Shmul'yan, il suffit de prouver que si S est la limite ultrafaible d'une suite $(S_n)_{n\geq 0}$ d'opérateurs de $\mathcal{B}$, S appartient encore à $\mathcal{B}$.

Si (ε_n) est une base orthonormée de E et si Ω désigne un borélien de K, on obtient pour deux entiers k et l,

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} \langle S(t)\varepsilon_k \mid \varepsilon_l\rangle \, d\mu(t) &= \mathrm{Tr}(((1_\Omega \varepsilon_k)\otimes\varepsilon_l)S)\\ &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{Tr}(((1_\Omega\varepsilon_k)\otimes\varepsilon_l)S_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} \langle S_n(t)\varepsilon_k \mid \varepsilon_l\rangle \, d\mu(t)\,.\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour un borélien arbitraire de K, on en déduit que la suite de fonctions $f_n : t \to \langle S_n(t)\varepsilon_k \mid \varepsilon_l\rangle$ converge faiblement vers la fonction $f : t \to \langle S(t)\varepsilon_k \mid \varepsilon_l\rangle$ dans $L^2(\mu)$. Les sommes de Cesàro d'une suite extraite de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ convergent alors en norme vers f dans $L^2(\mu)$. En prenant au besoin une sous-suite de ces sommes de Cesàro, on aura une convergence μ-presque partout vers f. En utilisant le procédé diagonal et en remplaçant au besoin la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ par une autre suite d'opérateurs de $\mathcal{B}$, on voit qu'il existe un borélien Ω_1 de masse totale égale à un et tel que pour tout t de Ω_1, on ait :

- $S_n(t) \in \mathcal{A}_t$ pour tout entier positif n,
- $\langle S(t)\varepsilon_k \mid \varepsilon_l\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle S_n(t)\varepsilon_k \mid \varepsilon_l\rangle$ pour tout couple d'entiers k et l,
- $\sup\{\|S_n(t)\| : n\geq 0\} \leq \sup\{\|S_n\| : n \geq 0\} < \infty$.

La suite $(S_n(t))$ converge donc ultrafaiblement vers $S(t)$, pour tout t de Ω_1. Comme $S_n(t)$ appartient à $\mathcal{A}_t$, on en déduit que $S(t)$ se trouve dans $\mathcal{A}_t$. On voit donc que S est élément de $\mathcal{B}$, et par suite que $\mathcal{B}$ est une algèbre duale.

L'algèbre $\mathcal{B}$ est contenue dans l'algèbre duale $\mathcal{D}$ des opérateurs décomposables. Si $\mathcal{B}$ est différente de $\mathcal{A}$, d'après le point (i) appliqué à $\mathcal{D}$, il existe un opérateur R dans $\mathcal{B}$ et un élément X de $L^1(\mu, L^1(E))$ tels que

$$\int \mathrm{Tr}(X(t)R(t))\, d\mu(t) \neq 0$$

et

$$\int \mathrm{Tr}(X(t)S(t))\, d\mu(t) = 0 \quad \text{pour tout opérateur } S \text{ de } \mathcal{A}\,.$$

Soit Ω un borélien arbitraire de K et n est entier positif; il vient

$$0 = \langle X, 1_\Omega T_n\rangle = \int\limits_{\Omega} \mathrm{Tr}(X(t)T_n(t))\, d\mu(t)\,.$$

Il existe donc un borélien Ω_2 tel que $\mu(\Omega_2) = 1$ et $0 = \mathrm{Tr}(X(t)T_n(t))$ pour tout entier n et pour tout t de Ω_2. Comme $R(t)$ se trouve dans $\mathcal{A}_t$ pour presque tout t, il résulte de ce qui précède que

$$0 = \int\limits_{\Omega} \mathrm{Tr}(X(t)R(t))\, d\mu(t)\,.$$

On aboutit à une contradiction, ce qui termine la preuve de (ii).

(iii) Supposons que l'ensemble Ω des points de K pour lesquels $\mathcal{A}_t$ n'est pas une A.D.U. soit de mesure strictement positive. Pour chaque t se trouvant dans Ω, l'ensemble G_t des opérateurs R qui ont une norme strictement supérieure à leur rayon spectral $r(R)$, est donc non vide. On voit, en utilisant une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ contenue dans $L^1(\mu, L^1(E))$ et telle que $(X_n(t))_{n\geq 0}$ soit dense dans $L^1(E)$ pour presque tout t, que l'ensemble

$$G = \{(t,R) : t \in K, R \in \mathcal{A}_t \text{ et } 1 = \|R\| > r(R)\}$$

est borélien. Ceci permet d'assurer l'existence d'une application mesurable $t \to S(t)$ telle que $(t, S(t)) \in \Gamma$ pour tout t appartenant à Ω.

Si n et p sont deux entiers strictement positifs, on introduit l'ensemble $\Omega_{n,p} = \{t \in K : \|S(t)^n\| \leq (1-1/p)^n\}$. Les ensembles $\Omega_{n,p}$ sont mesurables car E est séparable. La mesure de Ω est strictement positive, et on a l'égalité

$$\Omega = \bigcup_{n,p>0} \Omega_{n,p}\,;$$

il existe donc deux entiers strictement positifs m et q tels que $\mu(\Omega_{m,q}) > 0$.

Considérons l'opérateur

$$R = \int^{\oplus} 1_{\Omega_{m,q}}(t)S(t)\, d\mu(t)\,.$$

C'est un opérateur de norme un qui appartient à $\mathcal{A}$. On a

$$\|R(t)^m\| = \|1_{\Omega_{m,q}}(t)S(t)^m\| \leq (1-1/q)^m\,.$$

D'où $\|R^m\|^{1/m} \leq 1 - 1/q$, et par suite on a $r(R) \leq 1-1/q < 1 = \|R\|$. Ceci contredit le fait que $\mathcal{A}$ est une A.D.U. Par conséquent, $\mathcal{A}_t$ est une A.D.U. pour presque tout t.

La réciproque s'obtient par le calcul direct du rayon spectral d'un élément S de $\mathcal{A}$. En effet, l'hypothèse «$\mathcal{A}_t$ est une A.D.U. pour presque tout t» entraîne

$$\|S^n\| = \|\,\|S(\cdot)^n\|\,\|_\infty = \|\,\|S(\cdot)\|^n\|_\infty = (\|\,\|S(\cdot)\|\,\|_\infty)^n = \|S\|^n\,.$$

Ceci termine la preuve du théorème 1.

II. Algèbres duales uniformes d'opérateurs sur H. Nous considérons désormais une algèbre duale $\mathcal{A}_T$ uniforme engendrée par un opérateur T sur H. On obtient la décomposition de l'algèbre $\mathcal{A}_T$ donnée dans [3] sans aucune restriction et on la complète. On note

$$K = \{\chi(T) : \chi \in \mathrm{sp}(\mathcal{A}_T)\}\,.$$

THÉORÈME 2. *L'algèbre $\mathcal{A}_T$ se décompose de la manière suivante :*

$$\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_{T_0} \oplus \mathcal{A}_{T_0'} \oplus \Big(\bigoplus_{i\in I} \mathcal{A}_{T_i}\Big)$$

où $I \subseteq \mathbb{N}^*$ et :

• *$\mathcal{A}_{T_0}$ est une C^*-algèbre qui ne contient pas de projections orthogonales minimales non nulles et $\mathcal{A}_{T_0} \neq \mathbb{C}I$ (T_0 est complètement normal).*

• *T_0' est diagonalisable et complètement normal ($\mathcal{A}_{T_0'}$ est une C^*-algèbre).*

• *Chaque $\mathcal{A}_{T_i}$ est isométrique à l'espace $H^\infty_{\operatorname{int}\sigma^*(T_i)}$ des fonctions analytiques et bornées sur l'intérieur de $\sigma^*(T_i)$ avec l'application qui à S dans $\mathcal{A}_{T_i}$ fait correspondre $\widetilde{S}$.*

Remarque. Il est facile de voir que l'intérieur de $\sigma^*(T_i)$ est une composante connexe de l'intérieur de $\sigma^*(T)$ qui coïncide avec l'intérieur de K (cf. [3]). Le théorème précédent permet donc de construire un calcul fonctionnel surjectif pour $\mathcal{A}_T$.

Preuve du théorème 2. On considère l'ensemble $\mathcal{P}$ des projecteurs de $\mathcal{A}_T$, qui sont nécessairement orthogonaux, et que l'on ordonne par l'inclusion des images. Les éléments minimaux de $\mathcal{P}$ forment donc un ensemble $(P_n)_{n\in I}$ ($I \subseteq \mathbb{N}^*$) au plus dénombrable qui permet de décomposer H en une somme directe orthogonale, de telle sorte que :

• Si $(P_n)_{n\in I_1}$ désigne l'ensemble des éléments minimaux pour lesquels la transformée de Gelfand de l'opérateur P_nTP_n est constante, la compression T_0' de T sur l'espace $H_0 = \sum_{n\in I_1} P_n(H)$ est de la forme $T_0' = \bigoplus_{n\in I_1} a_nP_n$, où les a_n sont des nombres complexes.

L'algèbre $\mathcal{A}_{T_0'}$ est donc constituée d'opérateurs diagonaux et complètement normaux (c'est une C^*-algèbre).

• Pour $n \in I\setminus I_1$, la compression de $\mathcal{A}_T$ sur $P_n(H)$ est une A.D.U. qui ne contient pas de projecteurs non triviaux. De plus, la transformée de Gelfand de l'opérateur $T_n = P_nTP_n$ n'est pas constante.

• Enfin, si on note T_0 la compression de T sur l'orthogonal du sous-espace $\sum_{n\in I} P_n(H)$, $\mathcal{A}_{T_0}$ est une A.D.U. qui ne contient pas de projections orthogonales minimales non nulles et qui contient des projections non triviales.

Pour prouver le théorème 2, il suffit donc d'examiner le cas où $\mathcal{A}_T$ est une A.D.U. qui ne contient pas de projecteurs non triviaux et le cas où $\mathcal{A}_T$ est une A.D.U. qui ne contient pas de projections orthogonales minimales non nulles.

Premier cas: $\mathcal{A}_T$ est une A.D.U. qui ne contient pas de projecteurs non triviaux et $\mathcal{A}_T \neq \mathbb{C}I$.

Si F est un compact de $\mathbb{C}$, on note $C(F)$ l'algèbre des fonctions continues à valeurs complexes et $R(F)$ l'algèbre constituée par la fermeture dans $C(F)$ de l'espace vectoriel $\mathrm{Rat}(K)$ des fractions rationnelles dont les pôles sont hors de F. Nous allons montrer que $R(K)$ est une algèbre de Dirichlet. On introduit l'ensemble $\mathcal{F}$ des compacts F, obtenus en réunissant K avec une famille de composantes connexes de $\mathbb{C}\setminus K$, pour lesquels $R(F)$ est une algèbre de Dirichlet. On rappelle brièvement la construction faite dans [3]. On ordonne $\mathcal{F}$ par l'inclusion, il est non vide car il contient l'enveloppe polynomialement convexe de K d'après le théorème de Walsh, et est inductif décroissant. Il possède donc un élément minimal F. Nous allons prouver que $F = K$. Notons que l'intérieur de F est non vide (cf. [3, (i), p. 25]). On introduit le sous-espace de $\mathcal{A}_T$

$$\mathcal{L} = \{X \in \mathcal{A}_T : \exists (f_n)_{n\geq 0} \subseteq R(F),\ \sup \|f_n\|_F < \infty \text{ et } f_n(T) \xrightarrow{w^*} X\}.$$

LEMME 1. *Soit (f_n) une suite de $R(F)$ uniformément bornée qui converge simplement vers 0 et telle que $f_n(T)$ converge ultrafaiblement vers un opérateur S. Pour tout $\alpha \in (\partial F)^c$, il existe un unique opérateur S_α appartenant à $\mathcal{L}$ tel que $S = (\alpha I - T)S_\alpha$ et l'application $\alpha \to S_\alpha$ est continue. De plus, il existe une unique application γ sesquilinéaire continue de $H\times H$ dans l'espace des mesures complexes sur ∂F telle que si x, y sont deux points de H et f une fraction rationnelle dont les pôles ne se trouvent pas dans ∂F, on a pour tout contour Γ contenu dans le domaine d'analyticité de f,*

$$\text{(i)} \qquad \int f(u)\, d\gamma_{x,y}(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(u)\langle S_u x \mid y\rangle\, du.$$

Preuve. L'existence de S_α et la continuité de l'application $\alpha \to S_\alpha$ ont été établies dans [3, p. 26–27]. On peut donc construire, pour une fonction analytique f au voisinage de ∂F, l'opérateur $f_S(T)$ de $\mathcal{A}_T$ avec la formule

$$f_S(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(u) S_u\, du$$

où Γ est un contour quelconque de ∂F contenu dans le domaine d'analyticité de f.

Considérons une suite de contours $(\Gamma_n)_{n\geq 0}$ de ∂F telle que $d(\partial F, \operatorname{int}\Gamma_n)$ décroisse vers 0 lorsque $n\to\infty$, où $\operatorname{int}\Gamma_n$ désigne l'ensemble

$$\Big\{z\in\mathbb{C} : \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} \frac{1}{u-z}\, du = 1\Big\}.$$

Pour $x, y \in H$, on construit la mesure $\gamma_{x,y}$ sur ∂F de la manière suivante :

On prend pour $n \geq 0$ un prolongement $\gamma^n_{x,y}$ conservant la norme de la fonctionnelle définie sur $R(\overline{\operatorname{int}\Gamma_n})$ par

$$f \to \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} f(u)\langle S_u x \mid y\rangle\, du.$$

On vérifie par compacité que $\gamma^n_{x,y}$ converge vers une mesure complexe sur ∂F que nous noterons $\gamma_{x,y}$. Par construction, on a $|\gamma_{x,y}| \le \|S\|\,\|x\|\,\|y\|$, ce qui prouve la continuité de l'application $(x,y) \to \gamma_{x,y}$. L'inégalité (i) provient du fait que pour n assez grand, on a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} f(u)\langle S_u x \mid y\rangle\,du = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(u)\langle S_u x \mid y\rangle\,du\,.$$

L'unicité de γ résulte de la densité de $\operatorname{Rat}(\partial F)$ dans $C(\partial F)$ (car $R(F)$ est de Dirichlet).

LEMME 2. *Soit μ une mesure complexe portée par ∂F et orthogonale à $R(F)$. Alors pour toute suite (f_n) de $R(F)$, uniformément bornée et qui converge simplement vers* 0, *on a*

$$\lim_{n\to\infty}\int \overline{f_n(u)}\,d\mu(u) = 0\,.$$

Preuve. Comme μ est orthogonale à $R(F)$, il existe (cf. [6, Chap. II, 8.6]) une famille de points de F, $(z_i)_{i\in I}$ (I est une partie de $\mathbb{N}$), des mesures positives m_i portées par la frontière de F représentant les points z_i et des fonctions $h_i \in L^1(dm_i)$, telles que les mesures $h_i\,dm_i$ soient orthogonales à $R(F)$ et telles que

$$\mu = \sum_{i\in I} h_i\,dm_i\,.$$

Lorsque I est infinie, la série converge pour la norme de la variation. Les points z_i appartiennent nécessairement à l'intérieur de F car les mesures $h_i\,dm_i$ sont orthogonales à $R(F)$, qui est une algèbre de Dirichlet. Considérons une fraction rationnelle r dont les pôles se trouvent hors de $\partial F \cup \{z_i : i \in I\}$. La suite $(f_n)_{n\ge 0}$ converge simplement vers 0 à l'intérieur de F et est uniformément bornée dans $R(F)$; la décomposition de r en éléments simples et la formule de Taylor appliquée aux fonctions f_n permettent donc d'établir que

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n(u)r(u)\,dm_i(u) = 0\,.$$

L'ensemble des fractions rationnelles dont les pôles se trouvent hors de $\partial F \cup \{z_i : i \in I\}$ est dense dans $C(\partial F)$ (c'est une conséquence immédiate du théorème de T. Gamelin et J. Garnett [7], puisque $R(F)$ est de Dirichlet); il est a fortiori dense dans l'espace $L^1(dm_i)$. Le théorème de Banach–Steinhaus, appliqué aux formes linéaires associées à la suite $(f_n)_{n\ge 0}$ et agissant sur l'espace $L^1(dm_i)$, nous donne alors

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n(u)h(u)\,dm_i(u) = 0 \quad \text{pour toute fonction } h \in L^1(dm_i)\,.$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{n\to\infty}\int \overline{f_n(u)}h_i(u)\,dm_i(u) = 0$$

et finalement

$$\lim_{n\to\infty}\int \overline{f_n(u)}\,d\mu(u) = 0\,,$$

ce qui termine la preuve du lemme 2.

LEMME 3. *Soit (f_n) une suite de $R(F)$ uniformément bornée qui converge simplement vers* 0 *et telle que $f_n(T)$ converge ultrafaiblement vers un opérateur S. Alors il existe un opérateur X appartenant à $\mathcal{A}_T$ tel que $S^*X = (S^*)^2S$.*

Preuve. Si f appartient à $R(F)$ et x est élément de H, on a $\langle f_S(T)x \mid x\rangle = \langle f(T)Sx \mid x\rangle$, d'où

$$\Big|\int f\,d\gamma_{x,Sx}\Big| \le \|f\|_F\|Sx\|^2 \quad \text{et} \quad \gamma_{x,Sx}(\partial F) = \|Sx\|^2\,.$$

Notons $\gamma'_{x,Sx}$ un prolongement de norme $\|Sx\|^2$ de la forme linéaire définie sur $R(F)$ par

$$f \to \int f\,d\gamma_{x,Sx}\,.$$

On remarque que $\gamma'_{x,Sx}$ est une mesure obligatoirement positive, ce qui permet de décomposer $\gamma_{x,Sx}$ sous la forme $\gamma_{x,Sx} = \gamma'_{x,Sx} + \gamma''_{x,Sx}$ avec $\gamma'_{x,Sx}$ positive et

$$\int f\,d\gamma''_{x,Sx} = 0 \quad \text{pour toute fonction } f \text{ de } R(F)\,.$$

Désignons par φ_n la fonction conjuguée de f_n, c'est-à-dire $\varphi_n(u) = \overline{f_n(u)}$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite des $(\varphi_n)_S(T)$ converge ultrafaiblement vers un opérateur X de $\mathcal{A}_T$.

D'après le lemme 2, on a

$$\lim_{n\to\infty}\int \varphi_n\,d\gamma''_{x,Sx} = 0\,.$$

Il s'ensuit les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\langle Xx \mid Sx\rangle &= \lim_{n\to\infty}\int \varphi_n\,d\gamma_{x,Sx} = \overline{\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\gamma'_{x,Sx}}\\ &= \overline{\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\gamma_{x,Sx}} = \langle (S^*)^2Sx \mid x\rangle\,.\end{aligned}$$

On aboutit donc à l'égalité $S^*X = (S^*)^2S$, ce qui termine la preuve du lemme 3.

Remarque. Il existe peut-être une preuve plus simple du lemme suivant basée sur des méthodes d'algèbres de fonctions. Nous donnons ici une approche directement liée aux opérateurs de l'algèbre duale et comportant certaines techniques qui peuvent être utiles dans un cadre plus général.

LEMME 4. *Si $(f_n)_{n\ge 0}$ est une suite de $R(F)$ uniformément bornée qui converge simplement vers zéro, la suite $(f_n(T))_{n\ge 0}$ converge ultrafaiblement vers zéro.*

Preuve. Remarquons d'abord que $f_n(T) \in \mathcal{A}_T$ (cf. la proposition 1 de [3]). En niant le lemme, on se ramène au cas où $f_n(T)$ converge ultrafaiblement vers un opérateur S non nul de $\mathcal{A}_T$. On peut supposer que la suite $(f_n)_{n\ge 0}$ est uniformément bornée par un; par conséquent, on a $\|S\| \le 1$. Il existe, d'après le lemme 3, un opérateur X de $\mathcal{A}_T$ tel que $S^*X = (S^*)^2 S$.

Si $\operatorname{Ker} S^* = \{0\}$, on a $X = S^*S$, X est donc un opérateur positif. Or $X \neq 0$ et $\mathcal{A}_T$ ne contient pas de projecteurs non triviaux; il en résulte que $X = I$. Pour α appartenant à l'intérieur de F, l'égalité

$$I = S^*S = (\overline{\alpha}I - T^*)S_\alpha^* S_\alpha(\alpha I - T)$$

montre que l'opérateur $(\overline{\alpha}I - T^*)$ est surjectif. Cet opérateur est aussi injectif. En effet, dans le cas contraire, il existe un vecteur x non nul tel que $T^*x = \overline{\alpha}x$, ce qui entraîne

$$S^*x = \lim_{n\to\infty}{}^{w^*} f_n(T)^*x = \lim_{n\to\infty} \overline{f_n(\alpha)}x = 0$$

et contredit l'injectivité de S^*. On peut donc considérer l'opérateur $f(T)$ pour toute fraction rationnelle dont les pôles se trouvent en dehors de ∂F. On vérifie que $f_S(T) = Sf(T)$ en utilisant les formules

$$u_S(T)v_S(T) = S(uv)_S(T) \quad \text{et} \quad h_S(T) = Sh(T),$$

valables pour $h \in R(F)$.

On déduit, en tenant compte de [3, p. 27], les formules suivantes :

$$\|f(T)\| = \|S^*Sf(T)\| = \|S^*f_S(T)\| \le \|S\|\,\|f_S(T)\| \le \|S\|^2\|f\|_F \le \|f\|_F.$$

Il en résulte que ∂F est un ensemble spectral pour T. De plus, on a $R(\partial F) = C(\partial F)$, puisque F est de Dirichlet. Un théorème de J. von Neumann [9] assure alors que T est un opérateur normal. Si p est un entier positif et α est un point intérieur à F, il vient $S_\alpha(T^*)^p = \psi_S(T)$ avec $\psi(z) = (\alpha - z)^{-1}\overline{z}^p$, ce qui prouve que l'opérateur $S_\alpha(T^*)^p$ appartient à $\mathcal{A}_T$. D'autre part, on a

$$S_\alpha^* = \lim_{n\to\infty}{}^{w^*} g_n(T)^* \qquad \text{avec } g_n \in R(F),$$

et comme $g_n(T)^*$ est limite uniforme de polynômes en T^*, il en résulte que l'opérateur

$$S_\alpha S_\alpha^* = (\alpha I - T)^{-1}(\overline{\alpha}I - T^*)^{-1}$$

appartient à $\mathcal{A}_T$. Or, cet opérateur est positif, et l'hypothèse faite sur $\mathcal{A}_T$ impose qu'il soit un multiple scalaire de l'identité. Il s'ensuit que pour tout α appartenant à l'intérieur de F, l'opérateur $T - \alpha I$ est un multiple scalaire d'un opérateur unitaire, ce qui est absurde.

Lorsque $\operatorname{Ker} S^* \neq \{0\}$, on décompose un élément x de H sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec x_1 dans $\overline{\operatorname{Im} S}$ et x_2 dans $\operatorname{Ker} S^*$. Pour p assez grand et $y \in H$, on a

$$\begin{aligned}\langle(\varphi_n)_S(T)y \mid x_2\rangle &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} \overline{f_n(u)}\langle S_u y \mid x\rangle\,du \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} \overline{f_n(u)}\langle y \mid S_{\overline{u}}^* x\rangle\,du = 0,\end{aligned}$$

car $Sx_2 = 0$ entraîne $S_v x_2 = 0$ si $v \in (\partial F)^c$.

Par conséquent, X^* coïncide avec S^*S sur $\overline{\operatorname{Im} S}$. On en déduit que le spectre de X est contenu dans $\mathbb{R}^+$. Or, $\mathcal{A}_X$ est une algèbre duale uniforme, ce qui impose à X d'être positif. X est différent de l'identité et $\mathcal{A}_T$ ne contient pas de projecteurs non triviaux, X doit donc être nul et par suite $S^*S^2 = 0$, ce qui est encore absurde. Ceci achève la preuve du lemme 4.

LEMME 5. *L'algèbre $\mathcal{A}_T$ est isométrique à l'espace des fonctions analytiques et bornées sur l'intérieur de $\sigma^*(T)$ avec l'application qui à S dans $\mathcal{A}_T$ fait correspondre $\widetilde{S}$.*

Preuve. Si f appartient à $H^\infty_{\mathring{F}}$, il existe d'après un théorème de Gamelin et Garnett [6, 7] une suite $(f_n)_{n\ge 0}$ dans $R(F)$ qui converge simplement vers f à l'intérieur de F et telle que

$$\|f_n\|_F \le \|f\|_{\mathring{F}}.$$

En utilisant le lemme 4 et des arguments de compacité, on montre que la suite $(f_n(T))_{n\ge 0}$ converge vers un opérateur S se trouvant dans $\mathcal{A}_T$ et vérifiant $\|S\| \le \|f\|_{\mathring{F}}$. Si $(g_n)_{n\ge 0}$ est une autre suite uniformément bornée qui converge simplement vers f, on voit, en appliquant à nouveau le lemme 4, qu'elle converge aussi ultrafaiblement vers S. Ceci permet de définir, pour toute fonction f de $H^\infty_{\mathring{F}}$, l'opérateur $f(T)$ dans $\mathcal{A}_T$ qui vérifie

$$\|f(T)\| \le \|f\|_{\mathring{F}}.$$

Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathring{F}$ tel que $|f(\alpha)| > \|f(T)\|$. Alors α n'appartient pas à K; en effet, dans le cas contraire il existe un caractère χ sur $\mathcal{A}_T$ tel que $\chi(T) = \alpha$, mais $f(T) = f(\alpha)I + (T - \alpha I)g(T)$ avec $g \in H^\infty_{\mathring{F}}$. Il s'ensuit que $|f(\alpha)| = |\chi(f(T))| \le \|f(T)\|$, ce qui est contradictoire. Il existe donc une composante connexe bornée C de $\mathbb{C} \setminus K$ qui contient α. L'intersection de $\overline{C}$ et de ∂F est non vide d'après le principe du maximum, et par suite $R(F \cap C^c)$ est de Dirichlet [7], on aboutit donc à une contradiction avec la minimalité de F dans $\mathcal{F}$.

Finalement, on a obtenu une sous-algèbre de $\mathcal{A}_T$ contenant T et isométrique à $H^\infty_{\mathring{F}}$; elle est ultrafaiblement fermée d'après le théorème de Krein–Shmul'yan, c'est donc l'algèbre $\mathcal{A}_T$ toute entière. Il en découle que $K = F$, et que $\mathcal{A}_T$ est isométrique à $H^\infty_{\operatorname{int}\sigma^*(T)}$. Comme l'intérieur de K coïncide avec l'intérieur du spectre faible, on en déduit que l'isométrie $S \to \widetilde{S}$ est w^*-continue, c'est donc un w^*-homéomorphisme isométrique. Ceci achève la preuve du lemme 5 et l'étude du premier cas.

Deuxième cas: L'algèbre duale $\mathcal{A}_T$ est une A.D.U. qui ne contient pas de projections orthogonales minimales non nulles, et qui contient des projections non triviales.

LEMME 6. *Soit T un opérateur qui n'est pas un multiple de l'identité et qui engendre une algèbre duale uniforme qui contient des projections non triviales. Alors l'algèbre $\mathcal{A}_T$ ne contient pas de projections orthogonales minimales non nulles si et seulement si $\sigma^*(T) = \emptyset$.*

Preuve. D'après l'étude du premier cas il suffit de montrer que si $\sigma^*(T) \neq \emptyset$, il existe dans $\mathcal{A}_T$ une projection minimale non nulle. Supposons donc que $\sigma^*(T) \neq \emptyset$ et choisissons un point α dans $\sigma^*(T)$. Il existe un opérateur à trace positif J_α tel que

$$1 = \operatorname{Tr}(J_\alpha) = \|J_\alpha\|_1 \quad \text{et} \quad \operatorname{Tr}(J_\alpha S(T-\alpha I)) = 0 \quad \text{pour tout } S \text{ de } \mathcal{A}_T .$$

Ecrivons la décomposition de J_α sur une base orthonormée $(u_l)_{l\in L}$ de son image ($L \subseteq \mathbb{N}$) :

$$J_\alpha = \sum_{l\in L} a_l u_l \otimes u_l \qquad \text{avec } a_l > 0 \text{ et } \sum_{l\in L} a_l = 1 .$$

Le noyau de J_α n'est pas réduit à 0. En effet, si c'était le cas, $(u_l)_{l\in L}$ serait une base orthonormée de H, et on aurait pour une projection non nulle P de H,

$$1 = \operatorname{Tr}(J_\alpha) = \sum_{l\in L} a_l \langle Pu_l \mid u_l\rangle = \sum_{l\in L} a_l \|Pu_l\|^2 .$$

Ceci entraînerait que $Pu_l = u_l$ pour tout l de L, et par suite que $P = I$, ce qui contredirait le fait que $\mathcal{A}_T$ contient des projections non triviales.

On considère l'ensemble $\mathcal{P}_\alpha$ des projecteurs appartenant à $\mathcal{A}_T$ dont l'image est contenue dans le noyau de J_α. On ordonne $\mathcal{P}_\alpha$ par l'inclusion des images des projecteurs. $\mathcal{P}_\alpha$ est non vide ($0 \in \mathcal{P}_\alpha$) et est inductif, il admet donc un élément maximal P. Montrons que P est la projection orthogonale sur $\operatorname{Ker} J_\alpha$. Si ce n'est pas le cas, les hypothèses faites sur $\mathcal{A}_T$ impliquent que $Q = I - P = Q_1 \oplus Q_2$ avec $Q_1, Q_2 \in \mathcal{A}_T \setminus \{0\}$. Mais on a $1 = \operatorname{Tr}(J_\alpha Q) = \operatorname{Tr}(J_\alpha Q_1) + \operatorname{Tr}(J_\alpha Q_2)$, il existe donc $i \in \{1,2\}$ tel que $\operatorname{Tr}(J_\alpha Q_i) = 0$. L'égalité $0 = \operatorname{Tr}(J_\alpha Q_i) = \sum_{l\in L} a_l \langle Q_i u_l \mid u_l\rangle$ entraîne $Q_i u_l = 0$ pour tout $l \in L$. Le projecteur $P \oplus Q_i$ se trouve donc dans $\mathcal{P}_\alpha$ et majore strictement P, ce qui est absurde.

Maintenant si R est un projecteur de $\mathcal{A}_T$ dont l'image contient strictement $P(H) = \operatorname{Ker} J_\alpha$, on a nécessairement $1 = \operatorname{Tr}(J_\alpha R) = \sum_{l\in L} a_l \langle Ru_l \mid u_l\rangle$, ce qui impose $Ru_l = u_l$ et par suite $R = I$. Il en résulte que le projecteur orthogonal $I - P$ sur la fermeture de l'image de J_α est un projecteur minimal non trivial de $\mathcal{A}_T$, ce qui est impossible. Ceci termine la preuve du lemme 6.

LEMME 7. *L'algèbre $\mathcal{A}_T$ est une C^*-algèbre qui ne contient pas de projections orthogonales minimales non nulles.*

Preuve. On peut à l'aide du théorème sur le commutant d'un opérateur normal décomposer H en une somme directe dénombrable d'espaces du type $L^2(d\mu_n, E_n)$, où μ_n est une probabilité sur $[0,1]$, et E_n un espace de Hilbert. Les projections orthogonales sur chacun des espaces E_n appartiennent à $\mathcal{A}_T$ et il suffit donc d'étudier le cas où $H = L^2(d\mu, E)$ (μ est une probabilité sur $[0,1]$), E un espace de Hilbert et les projecteurs P de $\mathcal{A}_T$ sont de la forme $t \to 1_{\Omega(t)} I$ (I désigne ici l'identité de E et Ω est un borélien de $[0,1]$). L'opérateur T devient l'application $t \to T(t) \in L(E)$. Sa norme devient celle de l'application $t \to \|T(t)\|$ dans l'espace $L^\infty(d\mu)$. On voit avec le théorème 1 que l'algèbre duale $\mathcal{A}_{T(s)}$ est μ-presque partout une A.D.U. Nous pouvons donc nous placer pour la suite dans le cas où cette propriété est vraie partout.

Pour presque tout t de $[0,1]$, les projecteurs appartenant à $\mathcal{A}_{T(s)}$ sont triviaux, car ceux de $\mathcal{A}_T$ sont nécessairement de la forme $t \to 1_{\Omega(t)} I$. Ceci entraîne, d'après l'étude du premier cas appliquée ici à l'algèbre $\mathcal{A}_{T(s)}$, que nous sommes dans l'une des deux situations suivantes :

(I) $\mathcal{A}_{T(s)} = \mathbb{C}I$

ou

(II) $\mathcal{A}_{T(s)}$ est isométrique à $H^\infty(U_s)$ avec $U_s = \operatorname{int} \sigma^*(T(s))$.

Notons Ω l'ensemble des éléments de I pour lesquels nous sommes dans le cas (II) et supposons $\mu(\Omega) > 0$. L'ensemble

$$G = \{(t,z) : t \in \Omega,\ z \in \sigma^*(T(t))\}$$

est mesurable et on a

$$\mu \otimes m(G) = \int_\Omega m(G_{t,\cdot})\, d\mu(t) = \int \mu(G_{\cdot,z})\, dm(z) ,$$

où m désigne la mesure de Lebesgue sur le disque $D(0, \|T\|)$. La première intégrale montre que $\mu \otimes m(G)$ est strictement positif, car le borélien $G_{t,\cdot}$ contient l'ouvert non vide U_t. La seconde intégrale nous permet alors de considérer un nombre complexe α pour lequel l'ensemble $L = \{t \in \Omega : \alpha \in \sigma^*(T(t))\}$ est de mesure strictement positive.

Pour $t \in L$, il existe un opérateur à trace positif J_t de norme 1 et agissant sur E tel que $\operatorname{Tr}(J_t S(T(t) - \alpha I)) = 0$ pour tout S de $\mathcal{A}_{T(t)}$. On construit $[J]$ dans Q_T, qui s'identifie d'après le théorème 1 à l'espace $\int^\oplus Q_{T(t)}\, d\mu(t)$, par les formules

$$[J](t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu(L)}[J_t] & \text{si } t \in L, \\ 0 & \text{si } t \notin L. \end{cases}$$

Pour montrer que l'on définit bien un élément de Q_T, le seul point délicat est de vérifier la mesurabilité des applications $t \to \mathrm{Tr}(J_t S(T))$ pour tout S de $\mathcal{A}_T$. Ceci se prouve par récurrence transfinie, au moyen du théorème de Banach décrivant la w^*-adhérence d'un sous-espace du dual d'un espace de Banach séparable.

Il vient pour tout entier positif n,

$$\langle [J], T^n \rangle = \frac{1}{\mu(L)} \int_L \mathrm{Tr}(J_t T(t)^n)\, d\mu(t) = \alpha^n .$$

Il en résulte que α appartient à $\sigma^*(T)$. Or, ceci contredit le lemme 6, par conséquent la mesure de Ω est nulle et on est μ-presque partout dans le cas (I). Il s'ensuit immédiatement que $\mathcal{A}_T$ est une C^*-algèbre qui ne contient pas de projections orthogonales minimales non nulles, ce qui achève l'examen du second cas et la preuve du théorème 2.

Remarque. Remplaçons $\mathcal{A}_T$ par une A.D.U. (notée $\mathcal{A}$) engendrée par un nombre quelconque d'opérateurs ($\mathcal{A}$ est nécessairement commutative). On considère l'ensemble $\mathcal{P}$ des projecteurs de $\mathcal{A}$, qui sont nécessairement orthogonaux, et que l'on ordonne par l'inclusion des images. Les éléments minimaux de $\mathcal{P}$ forment donc un ensemble $(P_n)_{n\in I}$ au plus dénombrable qui permet de décomposer H en une somme directe orthogonale, de telle sorte que :

• Si $(P_n)_{n\in I_1}$ désigne l'ensemble des éléments minimaux de rang un, la compression de $\mathcal{A}$ sur l'espace $H_0 = \sum_{n\in I_1} P_n(H)$ soit constituée d'opérateurs diagonaux et complètement normaux (c'est une C^*-algèbre).

• Pour $n \in I \setminus I_1$, la compression de $\mathcal{A}$ sur $P_n(H)$ est une A.D.U. qui ne contient pas de projecteurs non triviaux, et qu'il faudra traiter en prenant l'objet adéquat qui généralise le spectre faible d'un opérateur.

• Enfin, pour la compression de $\mathcal{A}$ sur l'orthogonal du sous-espace $\sum_{n\in I} P_n(H)$, on peut reprendre intégralement le raisonnement de la dernière partie de la démonstration du théorème 2, et prouver qu'il s'agit en fait d'une C^*-algèbre qui ne contient pas de projections orthogonales minimales non nulles.

Bibliographie

[1] B. Beauzamy, *Introduction to Operator Theory and Invariant Subspaces*, North-Holland Math. Library, 1988.

[2] H. Bercovici, C. Foiaş and C. Pearcy, *Dual Algebras with Applications to Invariant Subspaces and Dilation Theory*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. 56, Amer. Math. Soc., 1985.

[3] G. Cassier, *Algèbres duales uniformes d'opérateurs sur l'espace de Hilbert*, Studia Math. 95 (1989), 17–32.

[4] —, *Sur la structure d'algèbres duales uniformes d'opérateurs sur l'espace de Hilbert*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 309 (1989), 479–482.

[5] J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Gauthier-Villars, 1957.

[6] T. Gamelin, *Uniform Algebras*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.

[7] T. Gamelin and J. Garnett, *Pointwise bounded approximation and Dirichlet algebras*, J. Funct. Anal. 8 (1971), 360–404.

[8] F. Riesz et B. Sz.-Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, 1968.

[9] J. von Neumann, *Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes*, Math. Nachr. 4 (1951), 258–281.

EQUIPE D'ANALYSE
UNITÉ ASSOCIÉE AU C.N.R.S. N° 754
UNIVERSITÉ DE PARIS-VI
4, PLACE JUSSIEU
75230 PARIS CEDEX 05, FRANCE

Received March 4, 1991
Revised version September 30, 1992 (2786)