STUDIA MATHEMATICA 103 (1) (1992)

Points fixes et théorèmes ergodiques dans les espaces $L^1(E)$

par

MOURAD BESBES (Paris)

Abstract. We prove that for each linear contraction $T: X \to X$ ($\|T\| \le 1$), the subspace $F = \{x \in X : Tx = x\}$ of fixed points is 1-complemented, where X is a suitable subspace of $L^1(E^*)$ and E^* is a separable dual space such that the weak and weak* topologies coincide on the unit sphere. We also prove some related fixed point results.

Introduction. Dans ce travail, on se propose de détailler et de généraliser les résultats de [Bes.1]. On montre en particulier que pour toute contraction linéaire T définie sur $L^1(E^*)$, l'ensemble des points fixes est 1-complémenté, où E^* est un dual séparable dont le prédual E est Hahn–Banach lisse. Le même résultat est vrai si on remplace $L^1(E^*)$ par un sous-espace "bien disposé" de $L^1(E^*)$ comme $H^1(E^*)$. On établit aussi des résultats d'existence de points fixes dans les espaces $L^1(E)$ en relation avec la propriété ci-dessus.

I. Rappels et notations. Soit X un espace de Banach. Considérons la propriété suivante :

(PM) Pour toute contraction linéaire $T : X \to X$ (avec $\|T\| \le 1$), l'ensemble des points fixes $F = \{x \in X : Tx = x\}$ est 1-complémenté.

Par un résultat classique de la théorie ergodique (cf. [Kre.1], p. 72), on sait que tout espace réflexif a la propriété (PM). Plus généralement, P. Mazet a démontré [Maz], en utilisant la méthode introduite dans [Bru], que tout dual E^* tel que les convexes ω^*-compacts de la sphère unité sont ω-compacts possède la propriété (PM). D'autres résultats reliés à cette propriété sont donnés dans [Bes.2].

Si $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ est un espace de probabilité, U. Krengel a démontré le résultat suivant : Si $T : L^1(\Omega, \mathcal{A}, m) \to L^1(\Omega, \mathcal{A}, m)$ est une contraction

1991 *Mathematics Subject Classification*: 47H10, 47A35, 47B38, 46G10, 28B05, 30D55.

linéaire alors pour tout $x \in L^1$, la suite $(x + Tx + \ldots + T^{n-1}x)/n$ converge pour la topologie L^0 de la convergence en probabilité. Si on pose $Px = L^0\text{-}\lim_{n\to\infty}(x + Tx + \ldots + T^{n-1}x)/n$, on peut démontrer que P est une projection contractante sur l'ensemble des points fixes de T. Dans [Bes.1], la propriété (PM) est étudiée dans les sous-espaces bien disposés dans L^1 (cf. [God]).

Dans la suite, on se propose d'étudier la propriété (PM) dans le cadre plus général des espaces $L^1(E^*)$ où E^* est un dual séparable. Les techniques utilisées sont celles de [Bes.1]. Elles s'appuient sur des extensions récentes du théorème de Komlos (cf. [Kom]). Rappelons rapidement ces résultats :

Théorème 1.1 (Komlos). *Soit (f_n) une suite bornée dans L^1. Il existe une fonction $f \in L^1$ et une suite (g_n) telle que*

$$\forall n, \quad g_n \in \operatorname{conv}\{f_k : k \geq n\} \quad \text{et} \quad g_n(\omega) \xrightarrow{p.s.} f(\omega).$$

Cette propriété a été étudiée aussi dans les espaces $L^1(E)$ et plus généralement dans les espaces d'Orlicz (cf. [Gar], [Gin], [Bal.1] et [Bal.2]). Si E est un espace de Banach réflexif, on a le

Théorème 1.2 [Gin]. *Soit (f_n) une suite bornée dans $L^1(E)$. Alors il existe $f \in L^1(E)$ et une suite (g_n) telles que*

$$\forall n, \quad g_n \in \operatorname{conv}\{f_k : k \geq n\} \quad \text{et} \quad g_n(\omega) \xrightarrow{p.s.} f(\omega) \text{ en norme dans } E.$$

Très récemment, E. Balder [Bal.3] a démontré la généralisation suivante :

Théorème 1.3. *Soit E^* un dual séparable. On note ω^* la topologie préfaible $\sigma(E^*, E)$. Soit (f_n) une suite bornée dans $L^1(E^*)$. Alors il existe $f \in L^1(E^*)$ et une suite (g_n) telles que*

$$\forall n, \quad g_n \in \operatorname{conv}\{f_k : k \geq n\} \quad \text{et} \quad g_n(\omega) \xrightarrow{\omega^*} f(\omega) \text{ p.s.}$$

II. Théorèmes ergodiques dans $L^1(E^*)$. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ un espace de probabilité et E^* un dual séparable. On note $L^1(E^*)$ l'espace $L^1(\Omega, \mathcal{A}, m, E^*)$ des fonctions fortement intégrables sur Ω et à valeurs dans E^*.

On suppose que $L^1(\Omega, \mathcal{A}, m, E^*)$ est séparable. On définit sur $L^1(E^*)$ la topologie $L^0_{\omega^*}$ par

$$(f_\alpha \xrightarrow{L^0_{\omega^*}} f) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \ \forall x \in E, \ m(\{|\langle f_\alpha - f, x\rangle| \geq \varepsilon\}) \to 0).$$

Comme E est séparable, la boule unité de $L^1(E^*)$ est métrisable séparable pour cette topologie.

Si X est un sous-espace de $L^1(E^*)$, on dira, en s'inspirant de [God], que X est *bien disposé* dans $L^1(E^*)$ si sa boule unité X_1 est $L^0_{\omega^*}$-fermée. Le lemme 2.1 ci-dessous montre que la boule unité de $L^1(E^*)$ est $L^0_{\omega^*}$-fermée.

Dans la section IV, on montre que $H^1(E^*)$ est bien disposé dans $L^1(E^*)$. Soit X un sous-espace bien disposé dans $L^1(E^*)$. On note $\mathcal{L}(X)$ l'ensemble des opérateurs linéaires de X dans X et on définit sur $\mathcal{L}(X)$ la topologie $\mathcal{L}^0_{\omega^*}$ par

$$(T_\alpha \xrightarrow{\mathcal{L}^0_{\omega^*}} T) \Leftrightarrow (\forall x \in X, \ T_\alpha x \xrightarrow{L^0_{\omega^*}} Tx).$$

Comme X est séparable, la boule unité de $\mathcal{L}(X)$ munie de la topologie $\mathcal{L}^0_{\omega^*}$ est métrisable séparable.

Le lemme suivant donne les propriétés fondamentales de la topologie $L^0_{\omega^*}$.

Lemme 2.1. *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite dans la boule unité de $L^1(E^*)$. Pour tout n, on choisit un relèvement dans la classe définie par f_n qu'on note aussi f_n. Soit $(u_k)_{k\geq 1}$ une suite dense dans E. Supposons que la suite (f_n) est $L^0_{\omega^*}$ de Cauchy, i.e., $\forall u \in E$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que*

$$(p \geq N, \ q \geq N) \ \Rightarrow \ (m(\{|\langle f_p - f_q, u\rangle| \geq \varepsilon\}) \leq \varepsilon).$$

Alors :

(i) $\exists \Omega_1 \subset \Omega$, $m(\Omega_1) = 1$, $\exists \varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *strictement croissante tels que $\forall \omega \in \Omega_1$, $\forall k \geq 1$ la suite $(\langle f_{\varphi_1(n)}(\omega), u_k\rangle)$ converge.*

(ii) $\exists \Omega_2 \subset \Omega_1$, $m(\Omega_2) = 1$, *tel que* $\forall \omega \in \Omega_2$, $\exists \varphi_\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *strictement croissante telle que pour tout $u \in E$ la suite $(\langle f_{\varphi_1\circ\varphi_\omega(n)}(\omega), u\rangle)$ soit convergente.*

(iii) *Si on pose pour tout $\omega \in \Omega_2$ et tout $u \in E$*

$$\langle f(\omega), u\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle f_{\varphi_1\circ\varphi_\omega(k)}(\omega), u\rangle$$

alors $f_n \xrightarrow{L^0_{\omega^*}} f$ et $\|f\| \leq 1$.

Démonstration. Le point (i) est obtenu à partir des propriétés de la topologie L^0 sur $L^1(\mathbb{R})$ par un procédé diagonal.

(ii) D'après le lemme de Fatou, nous avons $\int \liminf \|f_{\varphi_1(n)}(\omega)\| \leq \liminf \int \|f_{\varphi_1(n)}(\omega)\| \leq 1$. Donc, $\exists \Omega_2 \subset \Omega_1$, $m(\Omega_2) = 1$, tel que $\forall \omega \in \Omega_2$, $\liminf \|f_{\varphi_1(n)}(\omega)\| < \infty$. Soit $\omega \in \Omega_2$; considérons une sous-suite $(f_{\varphi_1\circ\varphi_\omega(n)})$ telle que

$$\|f_{\varphi_1\circ\varphi_\omega(n)}(\omega)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \liminf \|f_{\varphi_1(n)}(\omega)\|.$$

Comme la suite $(\langle f_{\varphi_1(n)}(\omega), u_p\rangle)$ converge pour tout p, la densité de la suite (u_p) permet de montrer que la suite $(\langle f_{\varphi_1\circ\varphi_\omega(n)}(\omega), u\rangle)$ converge pour tout $u \in E$.

(iii) Par hypothèse, $\forall u \in E$, la suite $(\langle f_n, u\rangle)$ est L^0-convergente; notons g_u sa limite. Soit $v \in E$. Alors $\exists \Omega_3 \subset \Omega_1$, $\exists \varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tels que $\forall \omega \in \Omega_3$, la suite $(\langle f_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}(\omega), v\rangle)$ converge et $\forall \omega \in \Omega_3$, $\forall p \geq 1$,

$$g_{u_p}(\omega) = \lim_{n\to\infty} \langle f_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}(\omega), u_p\rangle, \qquad g_v(\omega) = \lim_{n\to\infty} \langle f_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}(\omega), v\rangle.$$

Comme pour le point (ii), il existe $\Omega_4 \subset \Omega_3$, $m(\Omega_4) = 1$, tel que $\forall \omega \in \Omega_4$, il existe $\psi_\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall u \in E$ la suite $(\langle f_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \psi_\omega(n)}(\omega), u\rangle)$ converge.

Posons pour tout $\omega \in \Omega_4$ et tout $u \in E$

$$\langle g(\omega), u\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \psi_\omega(n)}(\omega), u\rangle .$$

Alors

$$\forall \omega \in \Omega_2 \cap \Omega_4 ,\ \forall p \geq 1 , \quad \langle g(\omega), u_p\rangle = \langle f(\omega), u_p\rangle .$$

Comme la suite (u_p) est dense dans E on obtient

$$\forall \omega \in \Omega_2 \cap \Omega_4 , \quad f(\omega) = g(\omega) .$$

Par ailleurs, nous avons

$$\forall \omega \in \Omega_3 , \quad g_v(\omega) = \lim_{n\to\infty} \langle f_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}(\omega), v\rangle$$

et donc $\forall \omega \in \Omega_4$, $\langle g(\omega), v\rangle = g_v(\omega)$. Il en résulte que $\forall \omega \in \Omega_2 \cap \Omega_4$, $g_v(\omega) = \langle f(\omega), v\rangle$.

En particulier, la fonction f est ω^*-mesurable. Comme E^* est séparable, le théorème de mesurabilité de Pettis (cf. [Die]) entraîne que f est fortement mesurable. De plus, comme $m(\Omega_2 \cap \Omega_4) = 1$, nous avons montré que

$$\langle f_n, v\rangle \xrightarrow{L^0} \langle f, v\rangle .$$

Reste à montrer que $\int \|f\| \leq 1$. En effet, par définition

$$\forall \omega \in \Omega_2 ,\ \forall u \in E, \quad \langle f(\omega), u\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle f_{\varphi_1 \circ \varphi_\omega(k)}(\omega), u\rangle ,$$

donc $\|f(\omega)\| \leq \liminf \|f_{\varphi_1 \circ \varphi_\omega(k)}(\omega)\| = \liminf \|f_{\varphi_1(n)}(\omega)\|$ et par suite, $\int \|f(\omega)\| \leq \liminf \int \|f_{\varphi_1(n)}(\omega)\| \leq 1$.

Notre résultat principal sera alors le suivant :

THÉORÈME 2.2. *Soient E^* un dual séparable tel que les topologies ω et ω^* coïncident sur la sphère unité et X un sous-espace bien disposé dans $L^1(E^*)$. Soit $T : X \to X$ une contraction linéaire. Il existe alors une projection contractante*

$$P : X \to F = \{x \in X : Tx = x\} .$$

Démonstration. La démonstration utilise les techniques de [Bru] et [Bes.1]. Considérons l'ensemble

$$\Gamma = \{S \in \mathcal{L}(X) : \|S\| \leq 1 \text{ et } S|_F = \mathrm{id}_F\} .$$

Γ est une partie non vide, convexe et $\mathcal{L}^0_{\omega^*}$-fermée dans $\mathcal{L}(X)$. En effet, si (S_n) est une suite dans Γ telle que $S_n \xrightarrow{\mathcal{L}^0_{\omega^*}} S$ alors $\forall x \in X$, $\|S_n x\| \leq \|x\|$ et $S_n x \xrightarrow{L^0_{\omega^*}} Sx$, et on a $\|Sx\| \leq \|x\|$. Le fait que $S|_F = \mathrm{id}_F$ est immédiat.

Considérons l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{\Gamma' \subset \Gamma,\ \Gamma' \text{ convexe non vide, } \mathcal{L}^0_{\omega^*}\text{-fermée :} \quad \forall \alpha \in \Gamma,\ \forall \beta \in \Gamma',\ \alpha\beta \in \Gamma'\} .$$

Nous allons montrer que $\mathcal{E}$ contient un élément Γ_0 minimal pour l'inclusion et que cet élément est un singleton.

Dans ce cas, soit P l'unique élément de Γ_0. P est une projection contractante sur l'ensemble des points fixes de T. En effet, par hypothèse $\Gamma_0 \in \mathcal{E}$, donc

(i) $\Gamma_0 \subset \Gamma$, ce qui entraîne que $\|P\| \leq 1$ et $P|_F = \mathrm{id}_F$.

(ii) $P \in \Gamma_0$, $T \in \Gamma$ et donc $TP \in \Gamma_0$, c'est-à-dire $TP = P$, ce qui montre que $\forall x \in X$, $Px \in F$.

Première étape : *Existence de Γ_0.* En vue d'utiliser le lemme de Zorn, on doit vérifier que pour toute chaîne $(\Gamma_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{E}$, décroissante pour l'inclusion, on a $\bigcap_{i\in I} \Gamma_i \neq \emptyset$.

Supposons que $\bigcap_{i\in I} \Gamma_i = \emptyset$. Alors d'après le lemme de Lindelöf, il existe $D \subset I$ dénombrable tel que $\bigcap_{i\in D} \Gamma_i = \emptyset$. En réindexant les éléments Γ_i, on peut supposer que

$$\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \ldots \quad \text{et} \quad \bigcap_{i\geq 1} \Gamma_i = \emptyset .$$

Considérons une suite $(T_i)_{i\geq 1}$ telle que $\forall i \geq 1$, $T_i \in \Gamma_i$. Le lemme suivant permettra de construire à partir de cette suite un élément $S \in \bigcap_{i\geq 1} \Gamma_i$, ce qui contredira l'hypothèse et permettra de conclure.

LEMME 2.3. *Soit $(T_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée dans $\mathcal{L}(X)$. Alors il existe $S \in \mathcal{L}(X)$ et une suite (S_n) telles que*

$$\forall n, \quad S_n \in \operatorname{conv}\{T_k : k \geq n\} \quad \text{et} \quad S_n \xrightarrow{\mathcal{L}^0_{\omega^*}} S .$$

Démonstration. Soit (x_n) une suite dense dans la boule unité de X (X est séparable). D'après le théorème 1.3,

$$\forall n,\ \exists T_n^{(1)} \in \operatorname{conv}\{T_n, T_{n+1}, \ldots\} \quad \text{tels que} \quad T_n^{(1)} x_1 \xrightarrow{\omega^*} y_1 \text{ p.s.}$$

On considère ensuite la suite $(T_n^{(1)} x_2)$ et on applique le théorème 1.3. Par un procédé diagonal, on construit une suite $S_n = T_n^{(n)} \in \operatorname{conv}\{T_n, T_{n+1}, \ldots\}$ telle que

$$\forall k \geq 1, \quad S_n x_k \xrightarrow[n\to\infty]{} y_k \quad \text{p.s.}$$

Montrons alors que $\forall x \in X_1$, la suite $(S_n x)$ converge pour la topologie $L^0_{\omega^*}$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $u \in E_1$. Pour tout $k \geq 1$ on a

$$|\langle S_p x - S_q x, u\rangle| \leq |\langle S_p x - S_p x_k, u\rangle| + |\langle S_p x_k - S_q x_k, u\rangle| + |\langle S_q x_k - S_q x, u\rangle|$$

et par suite

$$\begin{aligned}\{|\langle S_px - S_qx, u\rangle| \geq \varepsilon\} \subseteq \{|\langle S_px - S_px_k, u\rangle| \geq \varepsilon/3\}\\ \cup \{|\langle S_px_k - S_qx_k, u\rangle| \geq \varepsilon/3\}\\ \cup \{|\langle S_qx_k - S_qx, u\rangle| \geq \varepsilon/3\}.\end{aligned}$$

On choisit x_k tel que $\|x - x_k\| \leq \varepsilon^2/9$. Donc

$$m(\{|\langle S_px - S_px_k, u\rangle| \geq \varepsilon/3\}) \leq \frac{3}{\varepsilon}\|S_px - S_px_k\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

De même $m(\{|\langle S_qx - S_qx_k, u\rangle| \geq \varepsilon/3\}) \leq \varepsilon/3$. Finalement, x_k étant fixé, $\exists n_0$ tel que

$$\forall p \geq n_0,\ \forall q \geq n_0, \quad m(\{|\langle S_px_k - S_qx_k, u\rangle| \geq \varepsilon/3\}) \leq \varepsilon/3.$$

Il en résulte que

$$\forall p, q \geq n_0, \quad m(\{|\langle S_px - S_qx, u\rangle| \geq \varepsilon\}) \leq \varepsilon.$$

D'après le lemme 2.1, la suite (S_nx) converge pour $L^0_{\omega^*}$; notons Sx sa limite. Alors $S_n \xrightarrow{\mathcal{L}^0_{\omega^*}} S$.

Deuxième étape : *L'ensemble Γ_0 est un singleton.* Cette étape se base essentiellement sur les deux lemmes 2.4 et 2.5. Le premier permet de décrire, pour tout $x \in X$, l'ensemble Γ_0x. Le second montre que pour tout $x \in X$, l'ensemble Γ_0x contient un point fixe par T.

LEMME 2.4. *L'ensemble Γ_0 vérifie les propriétés suivantes :*

(a) $\forall \alpha, \beta \in \Gamma_0$, $\forall x \in X$ *on a* $\|\alpha(x)\| = \|\beta(x)\|$.

(b) *Soit $x \in X$; l'ensemble Γ_0x est un convexe $L^0_{\omega^*}$-fermé stable par T (i.e. $T(\Gamma_0x) \subset \Gamma_0x$) tel que s'il existe $a \in \Gamma_0x \cap F$, alors $\Gamma_0x = \{a\}$.*

Démonstration. (a) Soit $\beta \in \Gamma$. Soit $\Gamma_0\beta = \{\gamma\beta : \gamma \in \Gamma_0\}$. C'est une partie non vide, convexe de Γ_0 telle que $\forall \lambda \in \Gamma_0\beta$, $\forall \gamma \in \Gamma$, $\gamma\lambda \in \Gamma_0\beta$. De plus, $\Gamma_0\beta$ est $\mathcal{L}^0_{\omega^*}$-fermée.

En effet, soit $(T_n) \subseteq \Gamma_0\beta$. Posons $T_n = \gamma_n\beta$, $\gamma_n \in \Gamma_0$. Supposons que $T_n \xrightarrow{\mathcal{L}^0_{\omega^*}} T$ et montrons que $T \in \Gamma_0\beta$. Par hypothèse, $\forall x \in X$, $T_nx \xrightarrow{L^0_{\omega^*}} Tx$, i.e. $\gamma_n\beta x \xrightarrow{L^0_{\omega^*}} Tx$.

Soit $x \in L^1(E^*)$. D'après le lemme 2.1, $\exists \Omega_1 \subset \Omega$, $m(\Omega_1) = 1$, et une sous-suite $(T_{\varphi(n)})$ telle que,

$$\forall \omega \in \Omega_1, \forall k, \quad \langle T_{\varphi(n)}x(\omega), u_k\rangle \to \langle Tx(\omega), u_k\rangle.$$

Par le lemme 2.3 appliqué à la suite $(\gamma_{\varphi(n)})$, il existe $\gamma \in \Gamma_0$ et $\widetilde{\gamma}_{\varphi(n)} \in \operatorname{conv}\{\gamma_{\varphi(n)}, \gamma_{\varphi(n+1)}, \ldots\}$ tels que $\widetilde{\gamma}_{\varphi(n)}x \xrightarrow{L^0_{\omega^*}} \gamma x$, $\forall x \in X$, et donc en particulier $\widetilde{\gamma}_{\varphi(n)}\beta x \xrightarrow{L^0_{\omega^*}} \gamma\beta x$.

D'après le lemme 2.1, il existe $\Omega_2 \subset \Omega$, $m(\Omega_2) = 1$, et une sous-suite $(\widetilde{\gamma}_{\varphi\circ\psi(n)})$ tels que

$$\forall \omega \in \Omega_2,\ \forall k \geq 1, \quad \langle \widetilde{\gamma}_{\varphi\circ\psi(n)}\beta x(\omega), u_k\rangle \to \langle \gamma\beta x, u_k\rangle.$$

Maintenant,

$$\forall \omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2,\ \forall k \geq 1, \quad \langle Tx(\omega), u_k\rangle = \langle \gamma\beta x(\omega), u_k\rangle.$$

Par densité des (u_k) on a $\forall \omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, $Tx(\omega) = \gamma\beta x(\omega)$. Il en résulte que $\forall x \in X$, $Tx = \gamma\beta x$ et donc $T = \gamma\beta$. Ainsi $\Gamma_0\beta$ est $\mathcal{L}^0_{\omega^*}$-fermée.

Récapitulons : on vient de montrer que $\Gamma_0\beta \in \mathcal{E}$ et $\Gamma_0\beta \subset \Gamma_0$. Par minimalité de Γ_0 dans $\mathcal{E}$, on obtient $\Gamma_0\beta = \Gamma_0$ et donc $\forall \alpha \in \Gamma_0$, $\exists \gamma \in \Gamma_0$ tel que $\alpha = \gamma\beta$. On a

$$\forall x \in X,\ \forall \alpha, \beta \in \Gamma_0, \quad \|\alpha(x)\| = \|\gamma\beta(x)\| \leq \|\beta(x)\|.$$

En échangeant les rôles de α et β, on obtient (a).

(b) $\forall x \in X$, Γ_0x est un convexe stable par T. En effet, soit $y \in \Gamma_0x$. Alors $\exists \gamma \in \Gamma_0$ tel que $y = \gamma x$, donc $Ty = (T\gamma)x$; comme $T \in \Gamma$ et $\gamma \in \Gamma_0$, $T\gamma \in \Gamma_0$, ce qui montre que $Ty \in \Gamma_0x$.

Montrons que Γ_0x est $L^0_{\omega^*}$-fermé. Soit (y_n) une suite d'éléments de Γ_0x telle que $y_n \xrightarrow{L^0_{\omega^*}} y$. Posons $y_n = \gamma_nx$ avec $\gamma_n \in \Gamma_0$; alors $\forall u \in E$, $\langle \gamma_nx(\cdot), u\rangle \xrightarrow{L^0} \langle y(\cdot), u\rangle$.

D'après le lemme 2.1, il existe $\Omega_1 \subset \Omega$, $m(\Omega_1) = 1$, et une sous-suite $(\gamma_{\varphi(n)})$ tels que

$$\forall \omega \in \Omega_1,\ \forall k \geq 1, \quad \langle \gamma_{\varphi(n)}x(\omega), u_k\rangle \to \langle y(\omega), u_k\rangle.$$

Le lemme 2.3, appliqué à la suite $(\gamma_{\varphi(n)})$ assure l'existence d'une suite $\widetilde{\gamma}_{\varphi(n)} \in \operatorname{conv}\{\gamma_{\varphi(n)}, \gamma_{\varphi(n+1)}, \ldots\}$ telle que $\widetilde{\gamma}_{\varphi(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}^0_{\omega^*}} \gamma \in \Gamma_0$. Il vient alors $\widetilde{\gamma}_{\varphi(n)}x \xrightarrow{L^0_{\omega^*}} \gamma x$.

D'après le lemme 2.1, il existe $\Omega_2 \subset \Omega$, $m(\Omega_2) = 1$, et une suite $(\widetilde{\gamma}_{\varphi\circ\psi(n)})$ tels que

$$\forall \omega \in \Omega_2,\ \forall k \geq 1, \quad \langle \widetilde{\gamma}_{\varphi\circ\psi(n)}x(\omega), u_k\rangle \to \langle \gamma x, u_k\rangle.$$

Il en résulte alors que

$$\forall \omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2,\ \forall k \geq 1, \quad \langle \gamma x(\omega), u_k\rangle = \langle y(\omega), u_k\rangle.$$

Par densité de la suite (u_k), on obtient $\forall \Omega_1 \cap \Omega_2$, $\gamma x(\omega) = y(\omega)$, et donc $y = \gamma x \in \Gamma_0x$. Conclusion : Γ_0x est $L^0_{\omega^*}$-fermé.

Supposons qu'il existe $a \in \Gamma_0x \cap F$. Soit $\Gamma' = \{\gamma \in \Gamma_0 : \gamma x = a\}$. Il s'agit de montrer que $\Gamma' = \Gamma_0$, ce qui entraîne que $\Gamma_0x = \{a\}$. Pour cela, il suffit de vérifier que $\Gamma' \in \mathcal{E}$. En effet, Γ' est une partie convexe, non vide de Γ, clairement $\mathcal{L}^0_{\omega^*}$-fermée et pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $\gamma' \in \Gamma'$ on a

$\gamma\gamma'(x) = \gamma(a) = \mathrm{id}|_F(a) = a$, c'est-à-dire $\gamma\gamma' \in \Gamma'$. Il en résulte que $\Gamma' \in \mathcal{E}$ et par minimalité de Γ_0 on conclut que $\Gamma' = \Gamma_0$.

Pour pouvoir appliquer ce lemme, il faut assurer l'existence de points fixes de T dans $\Gamma_0 x$ pour tout $x \in X$. Ceci résultera du lemme suivant :

LEMME 2.5. *Soit E^* un dual séparable tel que les topologies faible et préfaible coïncident sur la sphère unité. Alors tout convexe $L^0_{\omega^*}$-fermé de $L^1(E^*)$ inclus dans la sphère unité est faiblement compact.*

La démonstration de ce lemme utilise la proposition 2.6 suivante dont l'idée se trouve dans [Hof].

PROPOSITION 2.6. *Soit E^* un dual séparable tel que les topologies faible et préfaible coïncident sur la sphère unité. Alors $L^1(E^*)$ vérifie la propriété suivante : si (f_n) est une suite dans $L^1(E^*)$ et f un élément de $L^1(E^*)$ tels que*

$$\|f_n\|_{L^1(E^*)} \to \|f\|_{L^1(E^*)} \quad et \quad f_n(\omega) \xrightarrow{\omega^*} f(\omega) \ p.s.,$$

alors $f_n \xrightarrow{\omega} f$ dans $L^1(E^*)$.

Démonstration de la proposition. Il s'agit de relever une propriété de E^* à $L^1(E^*)$. Pour cela, on utilisera le lemme élémentaire suivant :

SOUS-LEMME 2.7. *Soient (g_n) une suite d'éléments de $L^1(\mathbb{R})$ et g un élément de $L^1(\mathbb{R})$. Supposons que $\forall n$, $g_n \geq 0$, $g \geq 0$, $g \leq \liminf g_n$ p.s. et $\lim_{n\to\infty} \int g_n = \int g$. Alors*

(i) $\forall A \in \mathcal{A}$, $\lim_{n\to\infty} \int_A g_n = \int_A g$.

(ii) *$\exists (n_k)$ telle que $g_{n_k}(\omega) \to g(\omega)$ p.s.*

Remarque 2.8. Dans la conclusion du sous-lemme, il est nécessaire d'extraire une sous-suite pour avoir $\lim_{k\to\infty} g_{n_k}(\omega) = g(\omega)$ p.s., comme le montre l'exemple suivant : $\Omega = [0,1]$, m est la mesure de Lebesgue. Si $p \in \mathbb{N}$, $p = 2^k + j$ avec $0 \leq j \leq 2^k - 1$, on pose $g_p = \mathbf{1}_{[j/2^k,(j+1)/2^k]}$. Alors $\lim_{p\to\infty} \int g_p(\omega) = 0$ et $\liminf g_p(\omega) = 0$ mais $g_p(\omega) \not\to 0$ p.s.

Démonstration du sous-lemme 2.7. D'après le lemme de Fatou, on a

$$\int g(\omega) \leq \int \liminf g_n(\omega) \leq \liminf \int g_n(\omega) = \int g(\omega).$$

Il en résulte que $\liminf g_n(\omega) = g(\omega)$ p.s. Posons $h_n(\omega) = \inf_{k\geq n} g_k(\omega)$. D'après le théorème de Beppo Levi, on a

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \lim_{n\to\infty} \int_A h_n(\omega) = \int_A \lim_{n\to\infty} h_n(\omega) = \int_A g(\omega).$$

Il en résulte que $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega [g_n(\omega) - h_n(\omega)] = 0$ et pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\lim_{n\to\infty} \int_A [g_n(\omega) - h_n(\omega)] = 0$ car pour tout n, l'intégrand est une fonction positive; d'où (i).

D'après $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |g_n(\omega) - h_n(\omega)| = 0$, $\exists (n_k)$ telle que

$$g_{n_k}(\omega) - h_{n_k}(\omega) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \text{ p.s.}, \quad \text{i.e.} \quad g_{n_k}(\omega) \to g(\omega) \text{ p.s.}$$

Démonstration de la proposition 2.6. On applique le sous-lemme 2.7 à $g_n(\omega) = \|f_n(\omega)\|$ et $g(\omega) = \|f(\omega)\|$. Comme $f_n(\omega) \xrightarrow{\omega^*} f(\omega)$ p.s., on a $\|f(\omega)\| \leq \liminf \|f_n(\omega)\|$ p.s., la norme étant ω^*-s.c.i. On obtient donc

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \lim_{n\to\infty} \int_A \|f_n(\omega)\| = \int_A \|f(\omega)\|$$

et $\exists (n_k)$ telle que $\|f_{n_k}(\omega)\| \to \|f(\omega)\|$ p.s. Par hypothèse, on a $f_n(\omega) \xrightarrow{\omega^*} f(\omega)$ p.s. On obtient donc grâce à l'hypothèse prise sur E^*

$$f_{n_k}(\omega) \xrightarrow{\omega} f(\omega) \quad \text{p.s.}$$

Soit $y \in [L^1(E^*)]^*$. y peut être représentée par une fonction $\widetilde{y} : \Omega \to E^{**}$ ω^*-mesurable telle que

$$\forall f \in L^1(E^*), \quad \langle y, f\rangle = \int \widetilde{y}(\omega) f(\omega)\, dm(\omega).$$

Soient A et B deux parties mesurables disjointes de Ω telles que $A \cup B = \Omega$; alors $\langle y, f\rangle = \int_A \widetilde{y}(\omega)f(\omega) + \int_B \widetilde{y}(\omega)f(\omega)$.

Soit $\varepsilon > 0$; $\exists \eta > 0$ tel que

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad (m(A) < \eta) \Rightarrow (\|y\| \int_A \|f(\omega)\| < \varepsilon/4)$$

(car $\|f\|$ est équi-intégrable). De plus, $f_{n_k}(\omega) \xrightarrow{\omega} f(\omega)$. Il en résulte, d'après le théorème d'Egorov, qu'il existe A_ε et $B_\varepsilon = A_\varepsilon^c \subset \Omega$ tels que $m(A_\varepsilon) < \eta$ et $\widetilde{y}(\omega) f_{n_k}(\omega) \to \widetilde{y}(\omega) f(\omega)$ uniformément sur B_ε.

Maintenant,

$$\begin{aligned}
&\Big| \int f_{n_k}\widetilde{y} - \int f\widetilde{y}\Big| \\
&\quad \leq \Big|\int_{A_\varepsilon} f_{n_k}(\omega)\widetilde{y}(\omega)\Big| + \Big|\int_{B_\varepsilon} (f_{n_k}(\omega) - f(\omega))\widetilde{y}(\omega)\Big| + \Big|\int_{A_\varepsilon} f(\omega)\widetilde{y}(\omega)\Big| \\
&\quad \leq \Big(\int_{A_\varepsilon} \|f_{n_k}(\omega)\| + \int_{A_\varepsilon} \|f(\omega)\|\Big)\|y\| + \Big|\int_{B_\varepsilon} (f_{n_k}(\omega) - f(\omega))\widetilde{y}(\omega)\Big|.
\end{aligned}$$

Comme d'une part, $\int_{A_\varepsilon} \|f_{n_k}(\omega)\| \to \int_{A_\varepsilon} \|f(\omega)\|$, et $\|y\| \int_{A_\varepsilon} \|f(\omega)\| \leq \varepsilon/4$, et d'autre part, $f_{n_k}(\omega)\widetilde{y}(\omega) \to f(\omega)\widetilde{y}(\omega)$ uniformément sur B_ε, $\exists N$ tel que pour tout $k \geq N$ on a

$$\left| \int f_{n_k}(\omega)\tilde{y}(\omega) - \int f(\omega)\tilde{y}(\omega) \right| \leq \varepsilon .$$

Il en résulte que $f_{n_k} \xrightarrow{\omega} f$.

Remarquons que le raisonnement ci-dessus montre que toute sous-suite de (f_n) contient une sous-suite convergeant faiblement vers f, ce qui montre que la suite (f_n) converge faiblement vers f.

Remarque 2.9. La proposition 2.6, dont l'idée se trouve dans [Hof], peut avoir d'autres applications. Elle permet un "relèvement" de la propriété de E^* à $L^1(E^*)$. Dans [Hof], le relèvement de la propriété de KK* de E^* à $L^1(E^*)$ a permis de généraliser le théorème de Newman de $H^1(\mathbb{T})$ à $H^1(\mathbb{T}^n)$ et $H^1(B_n)$. On trouvera aussi dans [B-D-D-L] une version uniforme de cette proposition permettant de généraliser la propriété UKK* de $H^1(\mathbb{T})$ à $H^1(\mathbb{T}^n)$ et $H^1(B_n)$.

Démonstration du lemme 2.5. Soit C un convexe $L^0_{\omega^*}$-fermé de $L^1(E^*)$ et soit $\varphi \in [L^1(E^*)]^*$. En vue d'utiliser le théorème de James, montrons que φ atteint son sup sur C.

Soit (x_n) une suite dans C telle que $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \sup_C \varphi$. D'après le théorème 1.3, $\exists y \in C$ et $y_n \in \operatorname{conv}\{x_k : k \geq n\}$ tels que $y_n(\omega) \xrightarrow{\omega^*} y(\omega)$ p.s. ($y \in C$ car C est $L^0_{\omega^*}$-fermé). Comme C est inclus dans la sphère unité de $L^1(E^*)$, on a

$$\|y_n\|_{L^1(E^*)} = \|y\|_{L^1(E^*)} .$$

D'après la proposition 2.6, $y_n \xrightarrow{\omega} y$, donc $\lim_{n\to\infty} \varphi(y_n) = \varphi(y) = \sup_C \varphi$. D'après le théorème de James, C est ω-compact.

Fin de la démonstration du théorème 2.2. Pour tout $x \in X$, l'ensemble $\Gamma_0 x$ est un convexe $L^0_{\omega^*}$-fermé inclus dans une sphère de $L^1(E^*)$ (d'après le lemme 2.4(a)). D'après le lemme 2.5, il est ω-compact. Comme de plus il est stable par T (cf. lemme 2.4(b)), il contient un point fixe par T (car T est linéaire). En appliquant le lemme 2.4(b), on déduit que $\Gamma_0 x$ est un singleton.

Ainsi Γ_0 est un singleton, ce qui achève la démonstration. ■

Remarquons qu'en modifiant légèrement la démonstration ci-dessus on peut obtenir des énoncés plus généraux en considérant une famille de contractions linéaires. On a par exemple :

THÉORÈME 2.10. *Soit E^* un dual séparable tel que les topologies faible et préfaible coïncident sur la sphère unité. Soient X un sous-espace bien disposé dans $L^1(E^*)$ et $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille commutante de contractions linéaires de X dans X. Il existe alors une projection contractante $P : X \to F = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\{x \in X : T_\lambda x = x\}$.*

Avec les mêmes notations, on a aussi le résultat suivant :

THÉORÈME 2.11. *Soit (T_λ) une famille quelconque d'isométries linéaires de X dans X. Il existe alors une projection $P : X \to F = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\{x \in X : T_\lambda x = x\}$.*

Pour montrer que $\Gamma_0 x$ est un singleton, il faut montrer qu'il contient un point fixe a commun à tous les éléments de la famille (T_λ). Dans le premier cas ceci résulte du théorème classique de Markov–Kakutani et dans le deuxième du théorème de Ryll-Nardzewski (cf. [A-N] ou [Day]).

III. Un cas particulier important. On suppose, dans cette section, que E est un espace réflexif séparable.

Le théorème 2.2 entraîne que $L^1(E)$ possède la propriété (PM). Nous allons retrouver ce résultat d'une manière plus simple. On définit sur $L^1(E)$ la topologie $L^0_{\|\ \|}$ par

$$(f_\alpha \to f) \Leftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0,\ m(\{\|f_\alpha - f\| \geq \varepsilon\}) \to 0) .$$

Grâce au théorème 1.2, on peut reprendre le schéma de la démonstration précédente en travaillant avec la topologie $L^0_{\|\ \|}$. Il est clair que la boule unité B de $L^1(E)$ est fermée pour $L^0_{\|\ \|}$ et que $(B, L^0_{\|\ \|})$ est un espace métrisable séparable.

Plus généralement, on a le lemme suivant reliant les topologies $L^0_{\|\ \|}$ et L^0_ω (on note ici L^0_ω la topologie $L^0_{\omega^*}$ définie dans II car E est réflexif).

LEMME 3.1. *Soit C un convexe borné dans $L^1(E)$. Alors (C est $L^0_{\|\ \|}$-fermé) $\Leftrightarrow$ (C est L^0_ω-fermé).*

Démonstration. Il est clair que la topologie $L^0_{\|\ \|}$ est plus fine que la topologie L^0_ω. Réciproquement, supposons que C est $L^0_{\|\ \|}$-fermé. Soit (f_n) une suite d'éléments de C telle que $f_n \xrightarrow{L^0_\omega} f$. D'après le théorème 1.2, il existe une suite (g_n) telle que $g_n \in \operatorname{conv}\{f_n, f_{n+1}, \ldots\}$ et

$$(*) \qquad g_n \xrightarrow{L^0_{\|\ \|}} g .$$

Comme $g_n \in C$ et C est $L^0_{\|\ \|}$-fermé, $g \in C$. D'autre part, comme $g_n \in \operatorname{conv}\{f_n, f_{n+1}, \ldots\}$ et $f_n \xrightarrow{L^0_\omega} f$ on a $g_n \xrightarrow{L^0_\omega} f$, et d'après $(*)$, on obtient $g = f \in C$. Donc C est L^0_ω-fermé.

Ce lemme montre en particulier que la classe des sous-espaces bien disposés dans $L^1(E)$ définie dans II coïncide dans ce cas avec la classe des sous-espaces X de $L^1(E)$ dont la boule unité X_1 est $L^0_{\|\ \|}$-fermée. Cette propriété est plus simple à vérifier. Comme dans la partie II, on peut définir la topologie $\mathcal{L}^0_{\|\ \|}$ sur l'espace $\mathcal{L}(X)$ où X est un sous-espace bien disposé dans $L^1(E)$ et on a alors le lemme suivant :

LEMME 3.2. *Soit X un sous-espace bien disposé dans $L^1(E)$. Soit (T_n) une suite bornée dans $\mathcal{L}(X)$. Alors il existe $S \in \mathcal{L}(X)$ et une suite (S_n) tels que $S_n \in \operatorname{conv}\{T_n, T_{n+1}, \ldots\}$ et $S_n \xrightarrow{\mathcal{L}^0_{\|\ \|}} S$.*

Le reste de la démonstration peut être fait comme dans la section II. Notons que la démonstration du lemme 2.5 est particulièrement simple dans ce cas.

La topologie $L^0_{\|\ \|}$ permet en plus d'obtenir une version plus précise du résultat. Pour cela nous allons utiliser le lemme élémentaire suivant qui sera utilisé aussi dans la suite pour d'autres applications.

LEMME 3.3. *Soit E un espace de Banach quelconque (non nécessairement réflexif). Soient (f_n) une suite d'éléments de $L^1(E)$ et f un élément de $L^1(E)$. Supposons que $f_n \xrightarrow{L^0_{\|\ \|}} f$; alors pour tout $g \in L^1(E)$, on a* $\liminf \|f_n - f\| + \|f - g\| = \liminf \|f_n - g\|$.

Démonstration. Quitte à extraire une sous-suite de (f_n) on peut supposer que
$$\liminf \|f_n - f\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| .$$
Notons a cette limite; il s'agit de montrer que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - g\| = \|f-g\| + a$.

Soit $\varepsilon > 0$; la fonction $f - g$ étant intégrable, il existe $\eta \in]0, \varepsilon/6[$ tel que $(m(A) < \eta) \Rightarrow (\int_A \|f - g\|_E) < \varepsilon/6)$; comme $f_n \xrightarrow{L^0_{\|\ \|}} f$, $\exists n_0$ tel que
$$(n \ge n_0) \Rightarrow (m(\{\|f_n - f\|_E > \eta\}) < \eta) .$$
Posons $A_n = \{\|f_n - f\|_E \ge \eta\}$. On a
$$\begin{aligned}\int \|f_n - g\|_E &= \int_{A_n} \|f_n - g\|_E + \int_{A_n^c} \|f_n - g\|_E \\ &\ge \int_{A_n} \|f_n - f\|_E - \int_{A_n} \|f - g\|_E + \int_{A_n^c} \|f - g\|_E - \int_{A_n^c} \|f_n - f\|_E \\ &= \int \|f_n - f\|_E + \int \|f - g\|_E - 2\int_{A_n} \|f - g\|_E - 2\int_{A_n^c} \|f_n - f\|_E .\end{aligned}$$
Comme $\|f_n - f\| \to a$, $\exists n_1$ tel que $(n \ge n_1) \Rightarrow (|\|f_n - f\| - a| < \varepsilon/3)$. Soit $N = \max(n_0, n_1)$ et soit $n \ge N$. On a, d'une part,
$$\|f_n - g\| - \|f - g\| - a \le \|f_n - f\| - a < \varepsilon/3 .$$

et d'autre part,
$$\begin{aligned}\|f_n - g\| - \|f - g\| - a &\ge \|f_n - f\| - a - 2\int_{A_n} \|f - g\| - 2\int_{A_n^c} \|f_n - f\| \\ &\ge -\frac{\varepsilon}{3} - 2\frac{\varepsilon}{6} - 2\eta > -\varepsilon .\end{aligned}$$
Il en résulte que $\|f_n - g\| \to \|f - g\| + a$. ∎

D'après le lemme 3.2 appliqué à la suite (T_n) définie par
$$T_n = \frac{I + T + \ldots + T^{n-1}}{n},$$
il existe $S \in \mathcal{L}(X)$ et $S_n \in \operatorname{conv}\{T_n, T_{n+1}, \ldots\}$ tels que $S_n \xrightarrow{\mathcal{L}^0_{\|\ \|}} S$, et donc pour tout $x \in X$, $S_n x \xrightarrow{L^0_{\|\ \|}} Sx$. Il est alors facile de montrer, grâce au lemme 3.3, que S est une projection contractante sur l'ensemble F des points fixes de T.

En effet, le seul point non trivial à vérifier est que $TS = S$. Pour cela, soit $x \in X$. On a
$$\begin{aligned}\|S_n x - TSx\| &\le \|S_n x - TS_n x\| + \|TS_n x - TSx\| \\ &\le \|S_n x - TS_n x\| + \|S_n x - Sx\| .\end{aligned}$$
Comme $\lim_{n\to\infty}(S_n x - TS_n x) = 0$, on obtient
$$(*) \qquad \liminf \|S_n x - TSx\| \le \liminf \|S_n x - Sx\|$$
En appliquant le lemme 3.3 à la suite $(S_n x)$, on obtient
$$(**) \qquad \liminf \|S_n x - TSx\| = \|Sx - TSx\| + \liminf \|S_n x - Sx\| .$$
Finalement, en regroupant $(*)$ et $(**)$, on obtient $Sx = TSx$.

Ainsi nous retrouvons dans le cas réflexif le théorème 2.2. Plus précisément, nous avons démontré que
$$P \in \bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{\operatorname{conv}\{T^k, T^{k+1}, \ldots\}}^{\mathcal{L}^0_{\|\ \|}} .$$

Dans le cas de $L^1(\mathbb{R})$, cette approche montre que P est une projection positive si T est un opérateur positif.

Remarque. Avec les notations du lemme 3.3, on a pour tout $g \neq f$, $\liminf \|f_n - f\| < \liminf \|f_n - g\|$. Cette propriété est analogue à la propriété d'Opial (cf. [Opi]) qui a été utilisée dans [Bes.2] pour obtenir un théorème ergodique.

Une conséquence de cette propriété est la suivante : Si T est une contraction définie sur un convexe L^0-fermé et borné de $L^1(E)$ et si (x_n) est une suite quasi-fixe pour T qui converge vers x pour la topologie $L^0_{\|\ \|}$ alors

$Tx = x$. Cette propriété peut être vue comme une propriété de continuité de T pour la topologie $L^0_{\|\ \|}$ au voisinage d'un point fixe.

Nous allons démontrer dans la suite, en utilisant les mêmes techniques, un théorème analogue au théorème de Markov–Kakutani (cf. [Mar], [Kak]) pour les contractions affines définies sur un convexe $L^0_{\|\ \|}$-fermé.

Plus précisément, on a le

THÉORÈME 3.4. *Soit C un convexe, borné, non vide et $L^0_{\|\ \|}$-fermé de $L^1(E)$ où E est un espace de Banach réflexif. Soit $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille commutante de contractions affines de C dans C. Alors il existe un point fixe commun x_0 à tous les éléments de la famille $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.*

Démonstration. Montrons d'abord que toute contraction affine T définie sur C possède un point fixe dans C. Pour cela considérons une suite (x_n) d'éléments de C quasi-fixe pour T (i.e. $Tx_n - x_n \to 0$). En appliquant le théorème 1.2 à (x_n), on déduit l'existence d'une suite quasi-fixe (y_n) dans C et un élément y de C tels que $y_n \xrightarrow{L^0_{\|\ \|}} y$. Comme dans la démonstration précédente, on montre, en utilisant le lemme 3.3, que $Ty = y$.

En raisonnant par récurrence sur n, on montre que toute famille commutante finie $(T_k)_{k=1}^n$ de contractions affines de C dans C possède un point fixe commun. En effet, supposons que le résultat est vrai pour toutes les familles de n éléments et considérons une famille de $n+1$ éléments $(T_k)_{k=1}^{n+1}$.

Soit $C_n = \{x \in C : T_i(x) = x,\ \forall i \in \{1,\ldots,n\}\}$. C_n est un convexe, non vide par hypothèse et $L^0_{\|\ \|}$-fermé dans $L^1(E)$ car si (x_k) est une suite d'éléments de C_n telle que $x_k \xrightarrow{L^0_{\|\ \|}} x$ alors $T_i(x) = x$ pour tout $i = 1,\ldots,n$. ($\forall i \in \{1,\ldots,n\}$, la suite (x_k) est fixe, donc en particulier quasi-fixe pour T_i). De plus, C_n est stable par T_{n+1} car T_{n+1} commute avec les T_i, $i \in \{1,\ldots,n\}$. Il en résulte que T_{n+1} possède un point fixe $x_0 \in C_n$. Donc x_0 est un point fixe commun à toute la famille $(T_k)_{k=1}^{n+1}$.

Soit (T_λ) une famille commutante quelconque de contractions affines. Il s'agit de montrer que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\{x \in C : T_\lambda x = x\} \neq \emptyset$. En effet, par un raisonnement analogue à celui fait dans la première étape de la démonstration du théorème 2.2 et utilisant le théorème 1.2, on a la conséquence suivante : Toute famille (C_λ) de convexes, non vides, bornés et $L^0_{\|\ \|}$-fermés de $L^1(E)$ (où E est un espace de Banach réflexif séparable) a la propriété d'intersection finie-infinie. Il en résulte que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\{x \in C : T_\lambda x = x\} \neq \emptyset$.

IV. Exemples de sous-espaces bien disposés. Dans cette section, E^* est à nouveau un dual séparable. On se propose de donner quelques exemples de sous-espaces bien disposés dans $L^1(E^*)$ au sens de la section II.

Le premier exemple est l'espace E^* (on identifie les éléments de E^* aux fonctions constantes sur Ω).

Supposons maintenant que l'espace de probabilité considéré dans la définition de l'espace L^1 soit l'espace $([0,2\pi], d\theta/(2\pi))$. On définit l'espace

$$H^1(E^*) = \Big\{ f : D \to E^* : f \text{ analytique},\ \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \|f(re^{i\theta})\| \frac{d\theta}{2\pi} < \infty \Big\}$$

où $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, et on note

$$\|f\|_{H^1(E^*)} = \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \|f(re^{i\theta})\| \frac{d\theta}{2\pi}.$$

L'espace $H^1(E^*)$ s'identifie alors à un sous-espace de $L^1(E^*)$. On se propose de montrer que $H^1(E^*)$ est bien disposé dans $L^1(E^*)$, ce qui nous permettra d'appliquer les résultats de la section II.

On définit sur $H^1(E^*)$ la topologie τ par

$$(f_n \xrightarrow{\tau} f) \Leftrightarrow (\forall 0 < r < 1,\ \forall u \in E,\ \langle f_n(\cdot), u\rangle \to \langle f(\cdot), u\rangle \text{ uniformément sur } \overline{D}_r)$$

où $\overline{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$. On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 4.1. *La boule unité de $H^1(E^*)$ est τ-compacte.*

On sait aussi que $H^1(E^*)$ s'identifie dans ce cas (car E^* est séparable) au dual de $C(E)/A_0(E)$ où $C(E)$ est l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{T}$ dans E et $A_0(E)$ est l'ensemble des fonctions analytiques sur D, continues sur $\overline{D}$, à valeurs dans E et qui s'annulent en 0. De plus, la topologie préfaible associée à cette dualité coïncide sur la boule unité de $H^1(E^*)$ avec la topologie τ.

Nous sommes maintenant prêts pour montrer que $H^1(E^*)$ est bien disposé dans $L^1(E^*)$. La démonstration ci-dessous est l'adaptation de la preuve de [God] faite dans le cas où $E = \mathbb{R}$. Soit (f_n) une suite d'éléments de la boule unité de $H^1(E^*)$ telle que $f_n \xrightarrow{L^0_{\omega^*}} f$. Comme la boule unité de $H^1(E^*)$ est τ-compacte, il existe une sous-suite (f_{n_k}) et un élément f' tels que $f_{n_k} \xrightarrow{\tau} f'$.

Nous allons montrer que $f = f'$. Quitte à faire une translation, on peut supposer que $f' = 0$. Soient $\varepsilon > 0$ et $u \in E$. Comme $f_n \xrightarrow{L^0_{\omega^*}} f$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p \ge N, \quad m(\{|\langle f_{n_p}(e^{i\theta}), u\rangle - \langle f(e^{i\theta}), u\rangle| \ge \varepsilon/2\}) \le \varepsilon/2$$

et donc

$$\forall p, q \ge N, \quad m(\{|\langle f_{n_p}(e^{i\theta}), u\rangle - \langle f_{n_q}(e^{i\theta}), u\rangle| \ge \varepsilon\}) \le \varepsilon.$$

Ainsi

$$\int_0^{2\pi} |\langle (f_{n_p}-f_{n_q})(e^{i\theta}),u\rangle|^{1/2}\,\frac{d\theta}{2\pi}$$
$$\le \int_{\{|\langle (f_{n_p}-f_{n_q})(e^{i\theta}),u\rangle|<\varepsilon\}} |\ldots|^{1/2} + \int_{\{|\langle (f_{n_p}-f_{n_q})(e^{i\theta}),u\rangle|\ge\varepsilon\}} |\ldots|^{1/2}.$$

Le premier terme est majoré par $\varepsilon^{1/2}$. Pour le second, en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on obtient

$$\int_{\{|\langle (f_{n_p}-f_{n_q})(e^{i\theta}),u\rangle|\ge\varepsilon\}} |\ldots|^{1/2}$$
$$\le \|u\|^{1/2}(m\{|\langle (f_{n_p}-f_{n_q})(e^{i\theta}),u\rangle|\ge\varepsilon\})^{1/2}(\|f_{n_p}\|+\|f_{n_q}\|)^{1/2},$$

ce qui permet d'obtenir

$$(*)\qquad \int_0^{2\pi} |\langle f_{n_p}(e^{i\theta})-f_{n_q}(e^{i\theta}),u\rangle|^{1/2}\,\frac{d\theta}{2\pi} \le \varepsilon^{1/2}(1+\sqrt{2}\|u\|^{1/2})$$

et par sous-harmonicité

$$\forall p,q\ge N,\ \forall r\in]0,1[,$$
$$\int_0^{2\pi} |\langle (f_{n_p}-f_{n_q})(re^{i\theta}),u\rangle|^{1/2}\,\frac{d\theta}{2\pi} \le \varepsilon^{1/2}(1+\sqrt{2}\|u\|^{1/2}).$$

Or par hypothèse, $f_{n_q}\xrightarrow{\tau}0$; donc en faisant tendre q vers ∞, on obtient

$$\forall p\ge N,\ \forall r\in]0,1[,\qquad \int_0^{2\pi} |\langle f_{n_p}(re^{i\theta}),u\rangle|^{1/2}\,\frac{d\theta}{2\pi} \le \varepsilon^{1/2}(1+\sqrt{2}\|u\|^{1/2}).$$

En faisant tendre r vers 1, on obtient

$$\int_0^{2\pi} |\langle f_{n_p}(e^{i\theta}),u\rangle|^{1/2}\,\frac{d\theta}{2\pi} \le \varepsilon^{1/2}(1+\sqrt{2}\|u\|^{1/2}).$$

Comme, de plus,

$$\int_0^{2\pi} |\langle f(e^{i\theta}),u\rangle|^{1/2}\,\frac{d\theta}{2\pi}$$
$$\le \int_0^{2\pi} |\langle f_{n_p}(e^{i\theta}),u\rangle|^{1/2}\,\frac{d\theta}{2\pi} + \int_0^{2\pi} |\langle (f-f_{n_p})(e^{i\theta}),u\rangle|^{1/2}\,\frac{d\theta}{2\pi}$$
$$\le \varepsilon^{1/2}(1+\sqrt{2}\|u\|^{1/2}) + (\varepsilon/2)^{1/2}(1+\sqrt{2}\|u\|^{1/2})$$

(pour majorer le second terme, on procède comme pour obtenir $(*)$ ci-

dessus), on obtient

$$\forall u\in E,\qquad \int_0^{2\pi} |\langle f(e^{i\theta}),u\rangle|^{1/2}\,\frac{d\theta}{2\pi}=0.$$

Considérons une suite $(u_p)_{p\ge1}$ dense dans E. Il existe alors $A\subset[0,2\pi]$, $m(A)=1$, tel que $\forall\theta\in A$, $\forall p\ge1$, $\langle f(e^{i\theta}),u_p\rangle=0$. Il en résulte par densité de la suite $(u_p)_{p\ge1}$ que $\forall\theta\in A$, $f(e^{i\theta})=0$, et donc $f=0$.

Remarquons qu'au cours de l'étude précédente, nous avons établi que la topologie $L^0_{\omega^*}$ est plus fine que la topologie ω^* sur la boule unité de $H^1(E^*)$. Une conséquence de ce fait, dans le cas où E est Hahn–Banach lisse (HBS) (i.e. si les topologies faible et préfaible coïncident sur la sphère unité de E^*), est donnée ci-dessous.

LEMME 4.2. *Soit E^* un dual séparable HBS. Alors tout convexe ω^*-compact de la sphère unité de $H^1(E^*)$ est ω-compact.*

Démonstration. Si C est un convexe ω^*-compact, inclus dans la sphère unité de $H^1(E^*)$, alors C est $L^0_{\omega^*}$-fermé. D'après le lemme 2.5, C est ω-compact.

Grâce au lemme 4.2 ci-dessus, les résultats de la section II, appliqués aux contractions linéaires définies sur $H^1(E^*)$, peuvent donc être vus aussi comme conséquences du résultat de Mazet rappelé dans l'introduction.

Remarque 4.3. Les résultats ci-dessus s'appliquent par exemple aux espace de Banach réflexifs séparables, à ℓ^1 et à C_1. Plus généralement, ils s'appliquent aussi aux duaux de M-idéaux (cf. [Beh]).

Comme dans [B-D-D-L] on montre que l'espace $H^1(\ell^p)$ $(1\le p<\infty)$ a la propriété de Kadec–Klee uniforme (UKK*) (cf. [Huf]) pour la topologie préfaible usuelle, ce qui entraîne en particulier le résultat du lemme 4.2 dans le cas où $E^*=\ell^p$.

V. Etude des contractions non linéaires. On se propose d'abord de généraliser le théorème 8 de [Bes.1] (voir aussi [Len]).

THÉORÈME 5.1. *Soit E un espace de Banach. Soit C un convexe $L^0_{\|\ \|}$-compact de $L^1(E)$, non vide et non réduit à un point. Alors C contient un point non diamétral. En particulier, toute contraction de C dans C possède un point fixe.*

Démonstration. L'idée de la démonstration est classique (cf. [Lim]). Elle utilise la relation métrique établie dans le lemme 3.3.

Comme dans [K-T], on peut montrer que tout convexe $L^0_{\|\ \|}$-compact est borné en norme dans $L^1(E)$.

Supposons qu'il existe un convexe C $L^0_{\|\ \|}$-compact dans $L^1(E)$ non vide et non réduit à un point où tout point est diamétral. Il existe alors une suite(x_n) d'éléments de C telle que

$$\inf_{n\neq m} \|x_n - x_m\| \geq \delta/2 \quad (\text{où } \delta = \operatorname{diam} C).$$

Quitte à en extraire une sous-suite, on peut supposer que $x_n \xrightarrow{L^0_{\|\ \|}} x$. Comme $\liminf \|x_n - x\| > 0$, le lemme 3.3 montre alors que $\sup_{y\in C} \|x - y\| < \delta$. Il en résulte que x est non diamétral. Cette contradiction achève la démonstration.

On se propose maintenant d'étudier l'analogue non linéaire du problème considéré dans la section II. Nous avons le

THÉORÈME 5.2. *Soit E^* un dual séparable. Soit C un convexe, borné, non vide et $L^0_{\omega^*}$-fermé de $L^1(E^*)$. Soit $T : C \to C$ une contraction. Notons $F = \{x \in C : Tx = x\}$ l'ensemble des points fixes de T. Si pour tout convexe K inclus dans C, non vide, $L^0_{\omega^*}$-fermé et stable par T, $F \cap K \neq \emptyset$, alors il existe une contraction $P : C \to F$ telle que $Px = x$ pour tout $x \in F$.*

A quelques modifications près, la démonstration de ce résultat est analogue à celle du théorème 2.2. Remarquons que l'hypothèse d'existence de points fixes dans les sous-convexes de C faite dans le théorème précédent est nécessaire; sinon, même dans le cas de l'espace $L^1(\mathbb{R})$, l'ensemble F peut être vide (cf. [Als]). Cette hypothèse est toujours satisfaite si C est $L^0_{\|\ \|}$-compact d'après le théorème 5.1.

Sous les hypothèses du théorème 5.2, on peut montrer comme dans [Bes.2] que l'ensemble F est métriquement convexe. i.e. $\forall x, y \in F$, $\forall t \in [0,1]$ $\exists z_t \in F$ tel que

$$\|x - z_t\| = t\|x - y\| \quad \text{et} \quad \|y - z_t\| = (1-t)\|x - y\|.$$

Remerciements. L'auteur remercie G. Godefroy pour plusieurs indications ainsi que pour ses remarques et ses encouragements durant la préparation de ce travail.

Références

[Als] D. Alspach, *A fixed point free nonexpansive map*, Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1981), 423–424.

[A-N] E. Asplund and I. Namioka, *A geometric proof of Ryll-Nardzewski's fixed point theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 443–445.

[Bal.1] E. J. Balder, *Infinite-dimensional extension of a theorem of Komlós*, Probab. Theory Related Fields 81 (1989), 185–188.

[Bal.2] —, *On uniformly bounded sequences in Orlicz spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. 41 (1990), 495–502.

[Bal.3] —, *New sequential compactness results for spaces of scalarly integrable functions*, J. Math. Anal. Appl. 151 (1990), 1–16.

[Beh] E. Behrends, *M-Structure and the Banach–Stone Theorem*, Lecture Notes in Math. 736, Springer, Berlin 1979.

[Bes.1] M. Besbes, *Points fixes des contractions définies sur un convexe L^0-fermé de L^1*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 311 (1990), 243-246.

[Bes.2] —, *Complémentation de l'ensemble des points fixes d'une contraction*, preprint, 1990.

[B-D-D-L] M. Besbes, S. Dilworth, P. Dowling and C. Lennard, *New convexity and fixed point properties in Hardy and Lebesgue–Bochner spaces*, preprint.

[Bru] R. Bruck, *Properties of fixed-point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 179 (1973), 251–262.

[Day] M. M. Day, *Normed Linear Spaces*, Springer, Berlin 1973.

[Die] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer, Berlin 1984.

[Gar] D. J. H. Garling, *Subsequence principles for vector-valued random variables*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 86 (1979), 301–311.

[Gin] E. Giner, *Espaces intégraux de type Orlicz*, thèse, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Perpignan 1977.

[God] G. Godefroy, *Sous-espaces bien disposés de L^1. Applications*, Trans. Amer. Math. Soc. 286 (1984), 227–249.

[Hof] L. D. Hoffmann, *Pseudo-uniform convexity of H^1 in several variables*, Proc. Amer. Math. Soc. 26 (1970), 609–614.

[Huf] R. Huff, *Banach spaces which are nearly uniformly convex*, Rocky Mountain J. Math. 10 (1980), 743–749.

[Kak] S. Kakutani, *Two fixed point theorems concerning bicompact convex sets*, Proc. Imperial Acad. Tokyo 14 (1938), 242–245.

[K-T] M. A. Khamsi and P. Turpin, *Fixed points of nonexpansive mappings in Banach lattices*, Proc. Amer. Math. Soc. 105 (1) (1989), 102–110.

[Kom] J. Komlós, *A generalization of a problem of Steinhaus*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 18 (1967), 217–229.

[Kre.1] U. Krengel, *Ergodic Theorems*, Walter de Gruyter, Berlin 1985.

[Kre.2] —, *On the global limit behaviour of Markov chains and of general nonsingular Markov processes*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 6 (1966), 302–316.

[Len] C. Lennard, *A new convexity property that implies a fixed point property for L_1*, Studia Math. 100 (1991), 95–108.

[Lim] T.-C. Lim, *Asymptotic centers and nonexpansive mappings in conjugate Banach spaces*, Pacific J. Math. 90 (1980), 135–143.

[Mar] A. Markov, *Quelques théorèmes sur les ensembles abéliens*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 10 (1936), 311–313.

[Maz] P. Mazet, manuscrit non publié.

[Opi] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 591–597.

EQUIPE D'ANALYSE
UNIVERSITÉ PARIS VI
BOÎTE 186
4, PLACE JUSSIEU
F-75252 PARIS CEDEX 05, FRANCE

Received September 24, 1991 (2842)