Contents of Volume 101, Number 1

STUDIA MATHEMATICA

The journal publishes original papers in English, French, German and Russian, mainly in functional analysis, abstract methods of mathematical analysis and probability theory. Usually 3 issues constitute a volume.

Detailed information for authors is given on the inside back cover. Manuscripts and correspondence concerning editorial work should be addressed to

STUDIA MATHEMATICA

Śniadeckich 8, P.O. Box 137, 00-950 Warszawa, Poland, telex 816112 panim pl

---

Correspondence concerning subscriptions, exchange and back fascicles should be addressed to

INSTITUTE OF MATHEMATICS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES
Publications Department

Śniadeckich 8, P.O. Box 137, 00-950 Warszawa, Poland, telex 816112 panim pl

---

Published by the Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences
Typeset in TEX at the Institute
Printed and bound by
drukarnia
herman & herman
02-240 WARSZAWA, ul. Jakobinów 23

PRINTED IN POLAND

ISBN 83-85116-26-5 ISSN 0039-3223

STUDIA MATHEMATICA 101 (1) (1991)

Sur un principe géométrique en analyse convexe

par

ANDRZEJ GRANAS (Montréal) et MARC LASSONDE (Aubière)

Dédié à Ky Fan

Abstract. In this note we present we present a new elementary approach in the theory of minimax inequalities. The proof of the main result (called the geometric principle) uses only some simple properties of convex functions. The geometric principle (which is equivalent to the well-known lemma of Klee [13]) is shown to have numerous applications in different areas of mathematics.

Il est bien connu que le Principe KKM, formulé par Ky Fan [8] à partir du résultat classique de Knaster–Kuratowski–Mazurkiewicz [14], joue un rôle fondamental en analyse non linéaire (voir par exemple [10, 5, 17]).

Dans cette Note, nous nous intéressons à un cas particulier du Principe KKM, appelé ici principe géométrique. Dans une première partie, nous montrons que ce principe géométrique admet une démonstration directe élémentaire, sans référence aux méthodes combinatoires ou algébriques. Dans une deuxième partie, nous montrons que, comme le Principe KKM, le principe géométrique possède un champ d'applications remarquable : par exemple, il permet d'obtenir, de façon simple et claire, les résultats de base sur les systèmes d'inégalités, les égalités de minimax, les inéquations variationnelles, les opérateurs multivoques maximaux monotones, ainsi que les théorèmes classiques de Markov–Kakutani, Mazur–Orlicz et Hahn–Banach.

Notre approche se distingue nettement des méthodes usuelles basées sur des arguments de point fixe, de connexité, de séparation ou de minimax. Aucun de ces arguments n'est utilisé ici : le rôle essentiel est joué par la structure même de convexité.

I. Le principe géométrique et sa forme analytique. Dans la suite, tous les espaces vectoriels (*e.v.*) sont supposés réels et tous les espaces vectoriels topologiques (*e.v.t.*) sont supposés séparés.

Étant donné un e.v. E et $A \subset E$, on utilise l'abréviation $[A]$ pour désigner l'enveloppe convexe de A; lorsque $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$, on note

$[x_1, \ldots, x_n] = [A]$ et $[\widehat{x}_i] = [A \setminus \{x_i\}]$. Pour tout entier n, on pose $[n] = \{i \in \mathbf{N} \mid 1 \le i \le n\}$ et on dénote par Λ^{n-1} le simplexe standard de $\mathbf{R}^n$:

$$\Lambda^{n-1} = \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n \mid \lambda_i \ge 0 \text{ pour tout } i \in [n] \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Si $F : D \to E$ est une application multivoque, on appelle *valeurs* de F les ensembles $F(x)$, $x \in D$, et *cofibres* de F les ensembles $D \setminus F^{-1}(y) = \{x \in D \mid y \notin F(x)\}$, $y \in E$.

1.1. *Un lemme géométrique*

LEMME. *Soient E un espace euclidien et $D = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset E$. Soit $F : D \to E$ une application multivoque à valeurs convexes fermées telle que :*

(i) $[\widehat{x}_i] \subset F(x_i)$ *pour tout* $i \in [n]$,
(ii) $[D] \subset \bigcup\{F(x_i) \mid i \in [n]\}$.

Alors, $\bigcap\{F(x_i) \mid i \in [n]\} \ne \emptyset$.

Démonstration. Pour $x \in E$ et $A \subset E$, notons $d(x, A) = \inf\{\|x - a\| \mid a \in A\}$ la distance de x à A. La fonction continue

$$f : x \mapsto \max\{d(x, F(x_i)) \mid i \in [n]\}$$

atteint son minimum sur $[D]$ en un point $\widehat{x}$. Il est clair que pour établir le lemme il suffit de montrer que $f(\widehat{x}) = 0$. Supposons au contraire que $f(\widehat{x}) = \varepsilon > 0$ et montrons que ceci conduit à une contradiction.

D'après (ii), on peut supposer que $\widehat{x} \in F(x_n)$, et donc que $d(\widehat{x}, F(x_n)) = 0$. Comme $x \mapsto d(x, F(x_n))$ est continue, il existe $0 \le t < 1$ et $x_t = t\widehat{x} + (1-t)x_n \in [D]$ tels que $d(x_t, F(x_n)) < \varepsilon$. D'un autre côté, il résulte de (i) que $x_n \in \bigcap\{F(x_i) \mid i \in [n-1]\}$, c'est-à-dire que $d(x_n, F(x_i)) = 0$ pour tout $i \in [n-1]$; en utilisant la convexité des fonctions $x \mapsto d(x, F(x_i))$, on voit donc que $d(x_t, F(x_i)) \le t d(\widehat{x}, F(x_i)) \le t\varepsilon < \varepsilon$ pour tout $i \in [n-1]$. Ainsi, le point $x_t \in [D]$ vérifierait $f(x_t) < \varepsilon = \min\{f(x) \mid x \in [D]\}$, ce qui est absurde. ∎

1.2. *Applications KKM et principe géométrique.* Soient E un e.v. et $D \subset E$ un sous-ensemble non vide quelconque. Une application multivoque $G : D \to E$ est dite de Knaster–Kuratowski–Mazurkiewicz, ou simplement *application KKM*, si elle vérifie la condition

$$[x_1, \ldots, x_n] \subset \bigcup\{G(x_i) \mid i \in [n]\}$$

pour tout sous-ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset D$.

Remarque 1. Lorsque D est convexe, une condition *suffisante* pour que $G : D \to E$ soit KKM est que :

(a) $x \in G(x)$ pour tout $x \in D$, et

(b) $G([x_1, x_2]) \subset G(x_1) \cup G(x_2)$ pour tout $x_1, x_2 \in D$.

La propriété (b) exprime simplement que G est à cofibres convexes.

THÉORÈME 1 (Principe Géométrique). *Soient D un sous-ensemble non vide quelconque d'un e.v.t. E et $G : D \to E$ une application KKM à valeurs convexes fermées. Alors, la famille $\{G(x) \mid x \in D\}$ a la propriété de l'intersection finie.*

Démonstration. Soit A une partie finie de D. Montrons, par récurrence sur le nombre n d'éléments de A, que l'intersection des ensembles $G(x) \cap [A]$, $x \in A$, est non vide. C'est vrai si $n = 1$, car $x \in G(x)$ pour tout $x \in D$. Si $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$, l'hypothèse de récurrence entraîne que, pour chaque $i \in [n]$, l'ensemble

$$\bigcap\{G(x_j) \cap [\widehat{x}_i] \mid j \in [n],\ j \ne i\}$$

contient un point $y_i \in [A]$. Considérons l'application multivoque $F : y_i \mapsto G(x_i) \cap [A]$ de $B = \{y_1, \ldots, y_n\}$ dans l'espace euclidien engendré par A. Pour tout $i \in [n]$, $F(y_i)$ est convexe fermé et contient les points y_j tels que $j \ne i$, donc $F(y_i)$ contient $[\widehat{y}_i]$. Par ailleurs, comme G est KKM, on a $[B] \subset [A] \subset \bigcup\{F(y_i) \mid i \in [n]\}$. Il résulte du lemme géométrique que $\bigcap\{F(y_i) \mid i \in [n]\}$ est non vide. Par suite, $\bigcap\{G(x) \cap [A] \mid x \in A\}$ est non vide quel que soit le nombre d'éléments de A. ∎

COROLLAIRE 1.1. *Soient C un ensemble convexe compact non vide dans un e.v.t. et $F, G : C \to C$ deux applications multivoques vérifiant :*

(i) $F(x) \subset G(x)$ *pour tout* $x \in C$,
(ii) G *est à valeurs convexes fermées*,
(iii) F *est à cofibres convexes*.

Si $x \in F(x)$ pour tout $x \in C$, alors $\bigcap\{G(x) \mid x \in C\} \ne \emptyset$.

Démonstration. Si $x \in F(x)$ pour tout $x \in C$, d'après la remarque ci-dessus, F est KKM, donc G l'est aussi à cause de (i). La conclusion découle aussitôt du théorème. ∎

1.3. *Forme analytique du principe géométrique.* Soit Y un espace topologique. Rappelons qu'une fonction $f : Y \to \mathbf{R}$ est dite *semi-continue inférieurement* (s.c.i.) si les ensembles $F_\lambda = \{y \in Y \mid f(y) \le \lambda\}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, sont fermés dans Y; lorsque Y est convexe, f est dite *quasi-convexe* si les ensembles F_λ sont convexes, et *quasi-concave* si $-f$ est quasi-convexe.

Le corollaire précédent peut s'exprimer sous forme analytique :

THÉORÈME 2 (Forme analytique). *Soient C un ensemble convexe compact non vide dans un e.v.t. et $f, g : C \times C \to \mathbf{R}$ deux fonctions numériques vérifiant:*

(i) $g(x,y) \leq f(x,y)$ *pour tout* $x, y \in C$,
(ii) g *est quasi-convexe s.c.i. par rapport à* y,
(iii) f *est quasi-concave par rapport à* x.

Alors, l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :

(a) *il existe* $y_0 \in C$ *tel que* $g(x, y_0) \leq 0$ *pour tout* $x \in C$;
(b) *il existe* $x_0 \in C$ *tel que* $f(x_0, x_0) > 0$.

Démonstration. Considérons les applications $F : x \mapsto \{y \in C \mid f(x,y) \leq 0\}$ et $G : x \mapsto \{y \in C \mid g(x,y) \leq 0\}$ de C dans C. Vu les hypothèses, toutes les conditions du Corollaire 1.1 sont satisfaites. Donc, si $x \in F(x)$ pour tout $x \in C$, il existe $y_0 \in C$ tel que $y_0 \in G(x)$ pour tout $x \in C$, c'est-à-dire que (a) est vérifiée; sinon, il existe $x_0 \in C$ tel que $x_0 \notin F(x_0)$, auquel cas (b) est vérifiée. ■

1.4. *Commentaires.* (1) Le principe géométrique apparaît dans Valentine [22, p. 76], où cependant aucune application n'est présentée, et dans Asakawa [1, Lemma 3.1], où il est utilisé pour démontrer une extension du théorème de minimax de von Neumann.

(2) Le lemme géométrique est une reformulation du lemme de Klee [13] (voir aussi Valentine, *loc. cit.*, et Berge [2, p. 172]; la démonstration donnée ici reprend les principaux arguments de la démonstration du principe géométrique dans Asakawa, *loc. cit.*

(3) Tous les résultats énoncés dans cette partie sont "équivalents", dans le sens que l'on peut passer de l'un à l'autre de façon directe :

Théorème 2 ⇒ *Corollaire* 1.1 : on prend pour f et g les fonctions indicatrices des graphes de F et G respectivement;

Corollaire 1.1 ⇒ *Théorème* 1 : si $G : D \to E$ est KKM et si A est une partie finie de D, en posant $G(x) = E$ si $x \in [A] \setminus D$, on peut construire $F : [A] \to [A]$ à cofibres convexes vérifiant $x \in F(x) \subset G(x)$ pour tout $x \in [A]$;

Théorème 1 ⇒ *Lemme* : si F vérifie les conditions du lemme, alors $G : x_i \mapsto G(x_i) = F(x_{i+1})$ (avec la convention $n+1=1$) est KKM de D dans E.

(4) Lemme et principe géométriques se généralisent (de façon non élémentaire) aux applications à valeurs non nécessairement convexes (Théorème de Sperner [21] et Principe KKM [8], respectivement); la forme analytique correspondant à ces généralisations est l'inégalité de minimax de Ky Fan [10].

II. Applications. Tous les résultats présentés ci-dessous, pour la plupart bien connus, sont démontrés à l'aide du principe géométrique. Certains de ces résultats admettent des généralisations significatives dans le cadre non-linéaire : celles-ci peuvent s'obtenir, souvent de la même façon, en utilisant le Principe KKM.

2.1. *Systèmes d'inégalités.* Dans toute cette section, Y désigne un ensemble non vide (éventuellement sans structure linéaire) et $\Phi \subset \mathbf{R}^Y$ une famille non vide de fonctions définies sur Y. Nous étudions la *consistance* sur Y des systèmes d'inégalités strictes et larges associées à Φ, à savoir :

$$\exists y \in Y \ \forall \varphi \in \Phi \quad \varphi(y) < 0\,, \tag{1}$$

et

$$\exists y \in Y \ \forall \varphi \in \Phi \quad \varphi(y) \leq 0\,. \tag{2}$$

Il est clair que si une propriété comme (1) ou (2) est vérifiée, alors la propriété obtenue en remplaçant Φ par son enveloppe convexe $[\Phi]$ dans $\mathbf{R}^Y$ est aussi vérifiée. Il s'ensuit que les conditions

$$\forall \varphi \in [\Phi] \ \exists y \in Y \quad \varphi(y) < 0\,, \tag{1'}$$

et

$$\forall \varphi \in [\Phi] \ \exists y \in Y \quad \varphi(y) \leq 0\,, \tag{2'}$$

sont *nécessaires* à la consistance de (1) et (2), respectivement.

Nous allons montrer que ces conditions sont aussi *suffisantes* lorsque Y et Φ sont liés par une propriété très simple que nous introduisons maintenant.

Définition 1. L'ensemble Y est dit *Φ-convexe* si, quels que soient $y_1, y_2 \in Y$, il existe $y_0 \in Y$ tel que

$$\varphi(y_0) \leq \tfrac{1}{2}(\varphi(y_1) + \varphi(y_2)) \quad \text{pour tout } \varphi \in \Phi\,.$$

Exemple. Si Y est un sous-ensemble convexe d'un e.v. et si Φ est une famille de fonctions convexes, alors Y est Φ-convexe.

Remarque 2. Si Y est Φ-convexe, alors quels que soient le rationnel dyadique $d \in [0,1]$ et $y_1, y_2 \in Y$ il existe $y_0 \in Y$ tel que

$$\varphi(y_0) \leq d\varphi(y_1) + (1-d)\varphi(y_2) \quad \text{pour tout } \varphi \in \Phi\,.$$

Proposition 1. *Si Y est Φ-convexe et si Φ est finie, alors, quels que soient $\varepsilon > 0$, $\{y_1, \ldots, y_m\} \subset Y$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda^{m-1}$, il existe $y_0 \in Y$ tel que*

$$\varphi(y_0) \leq \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi(y_j) + \varepsilon \quad \textit{pour tout } \varphi \in \Phi\,.$$

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour $m = 2$, le cas général s'obtenant alors facilement par récurrence. Soient donc $\varepsilon > 0$, $y_1, y_2 \in Y$ et $\lambda \in [0,1]$ fixés. Comme les fonctions $t \mapsto t\varphi(y_1) + (1-t)\varphi(y_2)$,

$\varphi \in \Phi$, sont continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, il existe un rationnel dyadique $d \in [0,1]$ tel que

$$d\varphi(y_1) + (1-d)\varphi(y_2) \le \lambda\varphi(y_1) + (1-\lambda)\varphi(y_2) + \varepsilon \quad \text{pour tout } \varphi \in \Phi.$$

Compte tenu de la remarque précédente, on en déduit qu'il existe $y_0 \in Y$ tel que

$$\varphi(y_0) \le \lambda\varphi(y_1) + (1-\lambda)\varphi(y_2) + \varepsilon \quad \text{pour tout } \varphi \in \Phi. \ \blacksquare$$

Le premier théorème, purement algébrique, concerne les systèmes d'inégalités strictes :

THÉORÈME 3 (Neumann [18]). *Supposons que Φ est une famille finie et que Y est Φ-convexe. Alors,* (1) *est consistant si et seulement si* (1′) *est vérifiée.*

Démonstration. Dans $\mathbf{R}^Y$ muni de la topologie produit, considérons l'ensemble convexe compact $K = [\Phi]$. Si (1′) est vérifiée, les ensembles compacts $\{\varphi \in K \mid \varphi(y) \ge 0\}$, pour $y \in Y$, ont une intersection vide, donc un nombre fini d'entre eux ont déjà une intersection vide. Par suite, on peut trouver une partie finie $A = \{y_1, \ldots, y_m\} \subset Y$ vérifiant

$$\text{pour tout } \varphi \in K \text{ il existe } y_j \in A \text{ tel que } \varphi(y_j) < 0.$$

Pour $y_j \in A$, notons $\widetilde{y}_j$ la fonction évaluation $\varphi \mapsto \varphi(y_j)$ de K dans $\mathbf{R}$, et considérons, dans $\mathbf{R}^K$ muni de la topologie produit, l'ensemble convexe compact $L = [\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_m]$. En appliquant le principe géométrique à $G : K \times L \to K \times L$ définie par

$$(\varphi, \delta) \mapsto \{(\psi, \gamma) \in K \times L \mid \gamma(\varphi) \le \delta(\psi)\},$$

on trouve qu'il existe $(\psi_0, \gamma_0) \in K \times L$ tel que $\gamma_0(\varphi) \le \delta(\psi_0)$ pour tout $(\varphi, \delta) \in K \times L$. Le couple (ψ_0, γ_0) de $K \times L$ vérifie donc en particulier

$$\gamma_0(\varphi) \le \widetilde{y}_j(\psi_0) = \psi_0(y_j) \quad \text{pour tout } (\varphi, y_j) \in \Phi \times A.$$

Or, d'après le paragraphe précédent, il existe $y_j \in A$ vérifiant $\psi_0(y_j) < 0$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma_0(\varphi) + \varepsilon < 0$ pour tout $\varphi \in \Phi$. D'autre part, comme $\gamma_0 \in L = [\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_m]$, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda^{m-1}$ tel que $\gamma_0(\varphi) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi(y_j)$ pour tout $\varphi \in \Phi$, donc, d'après la Proposition 1, il existe $y_0 \in Y$ tel que $\varphi(y_0) \le \gamma_0(\varphi) + \varepsilon < 0$ pour tout $\varphi \in \Phi$. Ceci démontre que (1) est consistant. ■

COROLLAIRE 3.1 (Fan–Glicksberg–Hoffman [11]). *Supposons que Y est un ensemble convexe dans un e.v. et que Φ est une famille finie de fonctions convexes définies sur Y. Alors, ou bien* (1) *est consistant, ou bien il existe $\varphi \in [\Phi]$ vérifiant $\varphi(y) \ge 0$ pour tout $y \in Y$.*

Démonstration. Résulte aussitôt du Théorème 3 et de l'exemple ci-dessus. ■

Le théorème sur les systèmes d'inégalités larges, analogue du précédent, nécessite des hypothèses topologiques, même lorsque la famille Φ est finie (voir [7, p. 209]). Ce théorème contient le résultat de Fan [*loc. cit.*, p. 210] comme cas particulier.

THÉORÈME 4. *Supposons que Y est un espace compact, que Φ est une famille de fonctions s.c.i. définies sur Y, et que Y est Φ-convexe. Alors,* (2) *est consistant si et seulement si* (2′) *est vérifiée.*

Démonstration. Pour $\varphi \in \Phi$ et $\varepsilon > 0$, posons $S(\varphi, \varepsilon) = \{y \in Y \mid \varphi(y) \le \varepsilon\}$. Il est clair que (2) est consistant si et seulement si l'intersection de la famille $\{S(\varphi, \varepsilon) \mid \varphi \in \Phi, \varepsilon > 0\}$ est non vide, ou encore, puisque ces ensembles sont fermés dans le compact Y, si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, la famille $\{S(\varphi, \varepsilon) \mid \varphi \in \Phi\}$ a la propriété de l'intersection finie.

Fixons donc $\varepsilon > 0$, et considérons une sous-famille finie $\Phi' \subset \Phi$. Si (2′) est vérifiée, alors, pour tout $\varphi \in [\Phi']$, l'inégalité $\varphi(y) - \varepsilon < 0$ admet une solution dans Y. En vertu du Théorème 3 appliqué à la famille finie de fonctions $\{y \mapsto \varphi(y) - \varepsilon \mid \varphi \in \Phi'\}$, le système d'inégalités

$$\varphi(y) \le \varepsilon, \quad \varphi \in \Phi',$$

admet une solution dans Y, ce qu'il fallait démontrer. ■

Le corollaire ci-dessous est une conséquence immédiate du Théorème 4. Nous en donnons cependant une autre démonstration, directement à partir du principe géométrique.

COROLLAIRE 4.1 (Bohnenblust–Karlin–Shapley [3], Fan [7]). *Supposons que Y est un ensemble convexe compact dans un e.v.t. et que Φ est une famille de fonctions convexes s.c.i. définies sur Y. Alors,* (2) *est consistant si et seulement si* (2′) *est vérifiée.*

Démonstration directe. Par le même argument de compacité que ci-dessus, on se ramène au cas où $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ est une famille finie. Considérons l'application $G : \Lambda^{n-1} \times Y \to \Lambda^{n-1} \times Y$ définie par

$$(\lambda, x) \mapsto \Big\{(\mu, y) \in \Lambda^{n-1} \times Y \;\Big|\; \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(y) \le \sum_{i=1}^n \mu_i \varphi_i(x)\Big\}.$$

Il résulte aussitôt des hypothèses que G est à valeurs convexes fermées et à cofibres convexes. Comme de plus $(\lambda, x) \in G(\lambda, x)$ pour tout $(\lambda, x) \in \Lambda^{n-1} \times Y$, G est KKM et les conditions du principe géométrique sont donc satisfaites. On en déduit qu'il existe $\psi_0 = \sum_{i=1}^n \mu_i \varphi_i \in [\Phi]$ et $y_0 \in Y$ tels que $\varphi(y_0) \le \psi_0(x)$ pour tout $(\varphi, x) \in [\Phi] \times Y$. Or, d'après (2′), il existe $\widehat{x} \in Y$ vérifiant $\psi_0(\widehat{x}) \le 0$, d'où $\varphi(y_0) \le 0$ pour tout $\varphi \in \Phi$. ■

Commentaire. L'étude des systèmes d'inégalités et des égalités de minimax dans un cadre non vectoriel a été commencée par Fan [6, 7]; les notions d'ensemble Φ-convexe de famille Y-concave (voir la section suivante) sont utilisées en particulier dans König [16] et Neumann [18].

2.2. *Égalités de minimax.* La notion suivante, duale de celle d'ensemble Φ-convexe, nous permettra de formuler des théorèmes de minimax avec des conditions algébriques symétriques :

DÉFINITION 2. Soit Y un ensemble. On dit qu'une famille $\Phi \subset \mathbf{R}^Y$ de fonctions définies sur Y est Y*-concave* si quels que soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ il existe $\varphi_0 \in \Phi$ tel que

$$\tfrac{1}{2}(\varphi_1(y) + \varphi_2(y)) \leq \varphi_0(y) \quad \text{pour tout } y \in Y.$$

Remarque 3. Si $\Phi \subset \mathbf{R}^Y$ est Y-concave, alors quels que soient le rationnel dyadique $d \in [0,1]$ et $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ il existe $\varphi_0 \in \Phi$ tel que

$$d\varphi_1(y) + (1-d)\varphi_2(y) \leq \varphi_0(y) \quad \text{pour tout } y \in Y.$$

PROPOSITION 2. *Si Y est un espace compact et si Φ est une famille Y-concave constituée de fonctions s.c.i., alors*

$$\sup_{\varphi \in [\Phi]} \min_{y \in Y} \varphi(y) = \sup_{\varphi \in \Phi} \min_{y \in Y} \varphi(y).$$

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $\varphi \in [\Phi]$ et tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\min_{y \in Y} \varphi(y) \leq \sup_{\varphi \in \Phi} \min_{y \in Y} \varphi(y) + \varepsilon = \beta + \varepsilon.$$

Considérons le cas où $\varphi \in [\Phi]$ est de la forme $\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2$, avec $\lambda \in [0,1]$ et $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, le cas général se déduisant facilement de ce cas particulier.

Pour $t \in [0,1]$, posons $f(t) = \min\{t\varphi_1(y) + (1-t)\varphi_2(y) \mid y \in Y\}$, et montrons que $f(\lambda) \leq \beta + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Il résulte des hypothèses que la fonction concave $f : t \mapsto f(t)$ est à valeurs finies : elle est donc continue de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$. Par suite, il existe un rationnel dyadique $d \in [0,1]$ tel que

$$f(\lambda) \leq f(d) + \varepsilon.$$

D'un autre côté, d'après la remarque précédente, il existe $\varphi_0 \in \Phi$ tel que

$$d\varphi_1(y) + (1-d)\varphi_2(y) \leq \varphi_0(y) \quad \text{pour tout } y \in Y,$$

d'où l'on déduit que $f(d) \leq \beta$, et finalement $f(\lambda) \leq \beta + \varepsilon$. ■

THÉORÈME 5 (König [16]). *Soient Y un espace compact et Φ une famille de fonctions s.c.i. définies sur Y tels que Y est Φ-convexe et Φ est Y-concave. Alors,*

$$\min_{y \in Y} \sup_{\varphi \in \Phi} \varphi(y) = \sup_{\varphi \in \Phi} \min_{y \in Y} \varphi(y).$$

Démonstration. D'après la Proposition ci-dessus, il suffit de montrer que

$$\alpha = \min_{y \in Y} \sup_{\varphi \in \Phi} \varphi(y) \leq \sup_{\varphi \in [\Phi]} \min_{y \in Y} \varphi(y) = \beta.$$

Par définition de β (que l'on peut supposer fini), pour tout $\varphi \in [\Phi]$ il existe $y \in Y$ tel que $\varphi(y) - \beta \leq 0$. On déduit alors du Théorème 4 appliqué à la famille de fonctions $\{y \mapsto \varphi(y) - \beta \mid \varphi \in \Phi\}$ qu'il existe $y \in Y$ tel que $\varphi(y) - \beta \leq 0$ pour tout $\varphi \in \Phi$, c'est-à-dire $\alpha \leq \beta$. ■

Le théorème suivant est une reformulation du Théorème 5; il améliore quelque peu le théorème de minimax de Fan [6].

THÉORÈME 6. *Soient X un ensemble quelconque, Y un espace compact et $f : X \times Y \to \mathbf{R}$ une fonction vérifiant*

(i) *$y \mapsto f(x,y)$ est s.c.i. sur Y pour tout $x \in X$,*
(ii) *quels que soient $y_1, y_2 \in Y$ il existe $y_0 \in Y$ tel que*

$$f(x, y_0) \leq \tfrac{1}{2}(f(x,y_1) + f(x,y_2)) \quad \textit{pour tout } x \in X,$$

(iii) *quels que soient $x_1, x_2 \in X$ il existe $x_0 \in X$ tel que*

$$\tfrac{1}{2}(f(x_1,y) + f(x_2,y)) \leq f(x_0,y) \quad \textit{pour tout } y \in Y.$$

Alors,

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x,y) = \sup_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x,y).$$

Démonstration. Posons $\Phi = \{y \mapsto f(x,y) \mid x \in X\}$. Les hypothèses se traduisent par : (i) Φ est une famille de fonctions s.c.i. définies sur Y, (ii) Y est Φ-convexe, (iii) Φ est Y-concave. Le résultat découle donc du théorème précédent. ■

Le corollaire ci-dessous est un cas particulier évident du Théorème 6, mais on peut aussi l'obtenir directement à partir du Corollaire 4.1 :

COROLLAIRE 6.1 (Kneser [15], Fan [6]). *Soient X un ensemble convexe dans un e.v., Y un ensemble convexe compact dans un e.v.t., et $f : X \times Y \to \mathbf{R}$ une fonction convexe s.c.i. par rapport à y et concave par rapport à x. Alors,*

$$\alpha = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x,y) = \sup_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x,y) = \beta.$$

Démonstration directe. Montrons $\alpha \leq \beta$, l'inégalité inverse étant évidente. On peut naturellement supposer β fini. Considérons la famille de fonctions convexes s.c.i. $\Phi = \{y \mapsto f(x,y) - \beta \mid x \in X\}$. Dire que $\alpha \leq \beta$, c'est dire que le système d'inégalités

$$\varphi(y) \leq 0, \quad \varphi \in \Phi,$$

est consistant sur Y. D'après le Corollaire 4.1, il suffit donc de vérifier que pour tout $\varphi \in [\Phi]$ il existe $y_0 \in Y$ tel que $\varphi(y_0) \leq 0$. Or, si $\varphi \in [\Phi]$, il existe $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda^{n-1}$ tels que $\varphi(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i, y) - \beta$ pour tout $y \in Y$. Comme f est concave par rapport à x, on a donc $\varphi(y) \leq f(x_0, y) - \beta$ pour tout $y \in Y$, où $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in X$. On conclut en remarquant que, par définition de β, il existe $y_0 \in Y$ tel que $\varphi(y_0) \leq f(x_0, y_0) - \beta \leq 0$. ∎

Commentaire. Les théorèmes de minimax pour fonctions quasi-convexes/quasi-concaves (Nikaidô [19], Sion [20]) peuvent également s'obtenir à partir du principe géométrique : le lecteur attentif remarquera en effet que Sion, dans sa démonstration, n'utilise qu'un cas particulier du Principe KKM, à savoir le lemme de Klee, équivalent au lemme géométrique ci-dessus (voir aussi Berge [2, p. 220]).

2.3. *Théorème de Markov–Kakutani.* Lorsque E est un e.v.t., on note E' son dual topologique et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit de dualité sur $E' \times E$.

Dans toute cette section, E désigne un e.v.t. ayant suffisamment de fonctionnelles linéaires continues (c'est-à-dire tel que pour tout $x \neq 0$ dans E, il existe x' dans E' vérifiant $\langle x', x\rangle \neq 0$), et Y désigne un sous-ensemble convexe compact non vide de E.

THÉORÈME 7. *Soit $u : Y \to E$ une application affine continue. Supposons que pour tout $y \in Y$ il existe un nombre réel $t > 0$ tel que $tu(y) + (1-t)y \in Y$. Alors u a un point fixe.*

Démonstration. Il est clair que u a un point fixe si et seulement si le système d'inégalités

$$\langle x', u(y) - y\rangle \leq 0\,, \qquad x' \in E'\,,$$

admet une solution dans Y. D'après le Corollaire 4.1, appliqué à la famille *convexe* de fonctions affines continues $\Phi = \{y \mapsto \langle x', u(y) - y\rangle \mid x' \in E'\}$, il suffit donc de montrer que chacune des inégalités ci-dessus admet une solution dans Y.

Soit $x' \in E'$ fixé. En raison de la compacité de Y, la fonction continue $y \mapsto \langle x', y\rangle$ atteint son maximum sur Y en un point y_0. Par hypothèse, il existe $t > 0$ tel que le point $y_t = tu(y_0) + (1-t)y_0$ appartient à Y. Donc, en particulier, $\langle x', y_t\rangle \leq \langle x', y_0\rangle$, ce qui implique aussitôt $\langle x', u(y_0) - y_0\rangle \leq 0$. ∎

Du Théorème 7, on déduit facilement un résultat de base de l'analyse fonctionnelle linéaire :

THÉORÈME 8 (Markov–Kakutani). *Soit $\mathcal{U}$ une famille d'applications affines continues de Y dans lui-même, deux à deux permutables. Alors, il existe un point $y_0 \in Y$ tel que $u(y_0) = y_0$ pour tout $u \in \mathcal{U}$.*

Démonstration. Pour $u \in \mathcal{U}$, notons $\mathrm{Fix}(u)$ l'ensemble des points fixes de u. Nous devons montrer que les ensembles $\mathrm{Fix}(u)$, $u \in \mathcal{U}$, ont une intersection non vide. Comme ces ensembles sont compacts, il suffit de vérifier que, quelle que soit la famille finie $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$, l'intersection des ensembles $\mathrm{Fix}(u)$, $u \in \mathcal{F}$, est non vide. Procédons par récurrence sur le nombre m d'éléments de $\mathcal{F}$. D'après le Théorème 7, l'assertion est vraie lorsque $m = 1$. Supposons-la vraie pour tout $m \leq n$, et considérons une famille quelconque $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ à $n+1$ éléments $u_1, \ldots, u_{n+1}$. L'hypothèse de récurrence entraîne que l'ensemble convexe compact $K = \bigcap\{\mathrm{Fix}(u_i) \mid i \in [n]\}$ est non vide. En outre, comme u_{n+1} commute avec chacune des applications u_i, $i \in [n]$, on a $u_{n+1}(K) \subset K$. Il résulte du Théorème 7 que u_{n+1} possède un point fixe dans K, ce qui signifie que $\bigcap\{\mathrm{Fix}(u_i) \mid i \in [n+1]\}$ est non vide. ∎

Commentaires. (1) La démonstration du Théorème 7 s'adapte sans difficulté au cas où u est une application *multivoque* à graphe convexe compact dans $Y \times E$.

(2) Le Théorème 7 est vrai même si l'application u n'est pas supposée affine (Halpern–Bergman [12], Fan [9]).

2.4. *Théorèmes de Mazur–Orlicz et de Hahn–Banach.* Avant de poursuivre notre série de conséquences directes du principe géométrique, nous présentons deux applications originales (essentiellement dues à F. C. Liu) des résultats des sections précédentes.

La première est le théorème de Banach (version de base du théorème de Hahn–Banach) qui est démontré simplement à l'aide du Théorème 8 (Markov–Kakutani), suivant en cela une idée qui remonte à Kakutani. La seconde est le théorème de Mazur–Orlicz qui est obtenu rapidement par utilisation conjointe du théorème de Banach et du Corollaire 4.1 (Bohnenblust–Karlin–Shapley–Fan).

Dans toute cette section, E désigne un e.v. et E^* son dual algébrique. Rappelons qu'une fonctionnelle $p : E \to \mathbf{R}$ est dite *sous-linéaire* si elle vérifie

(a) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ pour tout $x, y \in E$, et
(b) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pour tout $x \in E$ et $\lambda \geq 0$.

Notons que, puisque $0 = p(0) = p(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x)$, nous avons aussi

(c) $-p(-x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.

LEMME 1 (Banach). *Si $p : E \to \mathbf{R}$ est sous-linéaire, alors il existe $f \in E^*$ telle que $f(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration. Munissons $\mathbf{R}^E$ de la topologie produit, ce qui en fait un e.v.t. avec suffisamment de fonctionnelles linéaires continues (les projections $f \mapsto f(x)$, $x \in E$, sont en effet linéaires continues de $\mathbf{R}^E$ dans $\mathbf{R}$). Dans $\mathbf{R}^E$, le sous-ensemble

$$G_0 = \prod_{x \in E} [-p(-x), p(x)]$$

est bien défini (d'après (c)), non vide ($p \in G_0$), convexe, et compact en vertu du théorème de Tikhonov. On vérifie aisément qu'il en est de même de l'ensemble

$$G_1 = \{g \in G_0 \mid -p(-x) \le g(x+y) - g(y) \le p(x) \text{ pour tout } x, y \in E\}.$$

Définissons une famille $\{u_y \mid y \in E\}$ d'applications de G_1 dans lui-même en posant

$$u_y(g)(x) = g(x+y) - g(y) \quad \text{pour } g \in G_1 \text{ et } \ x, y \in E.$$

Il est clair que ces applications sont affines, continues, et deux à deux permutables. D'après le théorème de Markov–Kakutani (Théorème 8), il existe donc $f \in G_1$ tel que $u_y(f) = f$ pour tout $y \in E$, c'est-à-dire, il existe $f \in G_1$ vérifiant

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{pour tout } x, y \in E.$$

Montrons que f est homogène. Remarquons d'abord que l'additivité de f entraîne que $f(\delta x) = \delta f(x)$ pour tout $x \in E$ et tout rationnel δ. Soient $x \in E$, $\lambda \in \mathbf{R}$, et $\{\delta_n\}$ une suite de rationnels $\delta_n < \lambda$ convergeant vers λ. Comme f appartient à G_1, on a

$$-(\lambda - \delta_n)p(-x) \le f(\lambda x) - f(\delta_n x) \le (\lambda - \delta_n)p(x),$$

d'où l'on déduit que $\lim_{n\to\infty} f(\delta_n x) = f(\lambda x)$. Mais comme on a aussi $\lim_{n\to\infty} f(\delta_n x) = \lim_{n\to\infty} \delta_n f(x) = \lambda f(x)$, il s'ensuit que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Ainsi, $f \in E^*$ et vérifie $f(x) \le p(x)$ pour tout $x \in E$: le lemme est démontré. ∎

LEMME 2. *Si $p : E \to \mathbf{R}$ est sous-linéaire, alors, quel que soit $x_0 \in E$, il existe $f \in E^*$ telle que $f(x) \le p(x)$ pour tout $x \in E$ et $f(x_0) = p(x_0)$.*

Démonstration. On vérifie facilement que la fonctionnelle $\widetilde{p} : E \to \mathbf{R}$, définie par

$$\widetilde{p}(x) = \inf\{p(x + \lambda x_0) - \lambda p(x_0) \mid \lambda \ge 0\} \quad \text{pour } x \in E,$$

est sous-linéaire. En appliquant le lemme précédent à $\widetilde{p}$, on trouve qu'il existe $f \in E^*$ telle que $f(x) \le \widetilde{p}(x) \le p(x)$ pour tout $x \in E$. En particulier, on a $-f(x_0) = f(-x_0) \le \widetilde{p}(-x_0) \le p(-x_0 + \lambda x_0) - \lambda p(x_0)$ pour tout $\lambda \ge 0$, ce qui entraîne $-f(x_0) \le -p(x_0)$, d'où en fait $f(x_0) = p(x_0)$. ∎

THÉORÈME 9 (Mazur–Orlicz). *Soient $p : E \to \mathbf{R}$ une fonctionnelle sous-linéaire, T un ensemble abstrait, et $x : T \to E$ et $\beta : T \to \mathbf{R}$ deux applications. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(A) *il existe $f \in E^*$ telle que $f(x) \le p(x)$ pour tout $x \in E$, et $\beta(t) \le f(x(t))$ pour tout $t \in T$,*

(B) *quels que soient $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda^{n-1}$, on a*

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \beta(t_i) \le p\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i x(t_i)\Big).$$

Démonstration. Posons $Y = \{f \in E^* \mid f(x) \le p(x) \text{ pour tout } x \in E\}$. D'après le Lemme 2, quels que soient $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda^{n-1}$, il existe $f \in Y$ telle que $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x(t_i)) = p(\sum_{i=1}^n \lambda_i x(t_i))$. La propriété (B) est donc équivalente à

(B′) quels que soient $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda^{n-1}$ il existe $f \in Y$ tel que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \beta(t_i) \le f\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i x(t_i)\Big).$$

Posons $\Phi = \{\varphi : f \mapsto \beta(t) - f(x(t)) \mid t \in T\} \subset \mathbf{R}^Y$. Les propriétés (A) et (B′) se traduisent respectivement par

$$(2) \qquad \exists f \in Y \ \forall \varphi \in \Phi \quad \varphi(f) \le 0,$$

et

$$(2') \qquad \forall \varphi \in [\Phi] \ \exists f \in Y \quad \varphi(f) \le 0.$$

En vue d'une application du Corollaire 4.1, on vérifie que Y est convexe et fermé dans $\mathbf{R}^E$ muni de la topologie produit; comme il est contenu dans $\prod_{x\in E}[-p(-x), p(x)]$, il est compact. D'un autre côté, Φ est une famille de fonctions affines continues sur Y. Il résulte du Corollaire 4.1 que les propriétés (2) et (2′) sont équivalentes, donc aussi (A) et (B). ∎

COROLLAIRE 9.1. *Soient $p : E \to \mathbf{R}$ une fonctionnelle sous-linéaire, $C \subset E$ un ensemble convexe et $g : C \to \mathbf{R}$ une fonction concave tels que $g(y) \le p(y)$ pour tout $y \in C$. Alors il existe $f \in E^*$ telle que $f(x) \le p(x)$ pour tout $x \in E$ et $f(y) \ge g(y)$ pour tout $y \in C$.*

Démonstration. Appliquer le Théorème 9 avec $T = C$, $\beta : t \mapsto g(t)$ et $x : t \mapsto t$. ∎

La version suivante du théorème de Hahn–Banach est un cas particulier évident du Corollaire 9.1:

THÉORÈME 10 (Hahn-Banach). *Soient $p : E \to \mathbf{R}$ une fonctionnelle sous-linéaire, $F \subset E$ un sous-espace vectoriel et $g : F \to \mathbf{R}$ une fonctionnelle linéaire tels que $g(y) \le p(y)$ pour tout $y \in F$. Alors il existe $f \in E^*$ telle que $f(x) \le p(x)$ pour tout $x \in E$ et $f(y) = g(y)$ pour tout $y \in F$.*

2.5. *Problèmes variationnels.* Nous présentons ici des résultats classiques dont la démonstration à partir du principe géométrique, ou de sa forme analytique, est particulièrement simple.

THÉORÈME 11 (Mazur–Schauder). *Soient Y un ensemble convexe fermé non vide dans un espace de Banach réflexif E et $\varphi : Y \to \mathbf{R}$ une fonction quasi-convexe s.c.i. telle que $\varphi(y) \to +\infty$ lorsque $\|y\| \to +\infty$, $y \in Y$. Alors φ atteint son minimum sur Y.*

Démonstration. Soit $G : Y \to Y$ l'application multivoque qui à tout $x \in Y$ associe l'ensemble $G(x) = \{y \in Y \mid \varphi(y) \le \varphi(x)\}$. Il résulte aussitôt des hypothèses que les ensembles $G(x)$ sont convexes, fermés et bornés, donc compacts dans E muni de la topologie faible. On vérifie aussi aisément que G est KKM. D'après le principe géométrique, l'intersection des $G(x)$, $x \in Y$, est non vide, d'où le théorème. ■

THÉORÈME 12 (Stampacchia). *Soient Y un ensemble convexe fermé non vide dans un espace de Hilbert H et $a : H \times H \to \mathbf{R}$ une forme bilinéaire continue et coercitive (i.e. $a(y,y)/\|y\| \to +\infty$ lorsque $\|y\| \to +\infty$). Alors, quel que soit $x' \in H'$, il existe un unique point $y_0 \in Y$ tel que*

$$a(y_0, y_0 - x) \le \langle x', y_0 - x\rangle \qquad \textit{pour tout } x \in Y\,.$$

Démonstration. La coercitivité de a entraîne que $a(y,y) > 0$ pour tout $y \ne 0$ dans H : l'unicité est donc évidente. Pour établir l'existence, nous devons montrer que l'intersection des ensembles $G(x) = \{y \in Y \mid a(y, y-x) \le \langle x', y-x\rangle\}$, $x \in Y$, n'est pas vide. On vérifie facilement que l'application $x \mapsto G(x)$ de Y dans Y est KKM. Par ailleurs, comme la fonction $y \mapsto a(y,y)$ est convexe (car $a(y,y) \ge 0$ pour tout y) et s.c.i., les ensembles $G(x)$ sont convexes et fermés; comme a est coercitive, ils sont bornés. Les ensembles $G(x)$ sont donc convexes compacts dans H muni de la topologie faible. La conclusion découle du principe géométrique. ■

Soit Y un sous-ensemble d'un espace de Banach E. Rappelons qu'un opérateur $A : Y \to E'$ est dit *monotone* si pour tout $x, y \in Y$ on a $\langle A(y) - A(x), y - x\rangle \ge 0$.

Le théorème de Stampacchia se généralise comme suit :

THÉORÈME 13 (Hartman–Stampacchia). *Soient E un espace de Banach réflexif et Y un sous-ensemble convexe fermé de E avec $0 \in Y$. Soit $A : Y \to E'$ un opérateur monotone, hémicontinu (i.e. la restriction de A à tout segment de Y est continue) et coercitif (i.e. $\langle A(y), y\rangle/\|y\| \to +\infty$ lorsque $\|y\| \to +\infty$, $y \in Y$). Alors, il existe $y_0 \in Y$ tel que*

$$\langle A(y_0), y_0 - x\rangle \le 0 \quad \textit{pour tout } x \in Y\,.$$

Démonstration. Comme A est coercitif, il existe $r_0 > 0$ tel que $\langle A(y), y\rangle > 0$ dès que $\|y\| > r_0$. Pour $r > r_0$, posons $Y_r = \{y \in Y \mid \|y\| \le r\}$.

Alors, Y_r est convexe compact dans E muni de la topologie faible, et les fonctions $f, g : Y_r \times Y_r \to \mathbf{R}$, définies par

$$f(x,y) = \langle A(y), y - x\rangle, \qquad g(x,y) = \langle A(x), y - x\rangle$$

pour $(x,y) \in Y_r \times Y_r$, satisfont les conditions du Théorème 2 (forme analytique du principe géométrique). On en déduit qu'il existe $y_0 \in Y_r$ vérifiant

$$(*) \qquad \langle A(x), y_0 - x\rangle \le 0 \quad \text{pour tout } x \in Y_r\,.$$

Soient z quelconque dans Y_r et $0 < t \le 1$. En faisant $x = y_0 + t(z - y_0)$ dans $(*)$, on trouve $\langle A(y_0 + t(z - y_0)), y_0 - z\rangle \le 0$. Cette inégalité reste vraie lorsque t tend vers 0, car A est hémicontinu. Par suite,

$$(**) \qquad \langle A(y_0), y_0 - z\rangle \le 0 \quad \text{pour tout } z \in Y_r\,.$$

En particulier, puisque $z = 0 \in Y_r$, on a $\langle A(y_0), y_0\rangle \le 0$, donc, nécessairement, $\|y_0\| \le r_0$.

Soit enfin x quelconque dans Y. Comme $\|y_0\| \le r_0 < r$, il existe $0 < t \le 1$ tel que $z = y_0 + t(x - y_0) \in Y_r$. En portant cette valeur dans $(**)$, on voit que $\langle A(y_0), y_0 - x\rangle \le 0$, d'où le résultat. ■

COROLLAIRE 13.1 (Browder–Minty). *Soit E un espace de Banach réflexif. Tout opérateur monotone, hémicontinu et coercitif de E dans E' est surjectif.*

COROLLAIRE 13.2 (Browder–Goehde–Kirk). *Soient Y un ensemble convexe fermé borné non vide dans un espace de Hilbert H et $f : Y \to H$ une application continue non-expansive (i.e. $\|f(x) - f(y)\| \le \|x - y\|$ pour tout $x, y \in Y$). Supposons que pour tout $y \in Y$ il existe un nombre réel $t > 0$ tel que $tf(y) + (1-t)y \in Y$. Alors f a un point fixe.*

Démonstration. Quitte à effectuer une translation, on peut toujours supposer $0 \in Y$. Identifions H à son dual H', et le produit scalaire sur $H \times H$ au produit de dualité sur $H' \times H$. On vérifie aisément que l'opérateur $A : y \mapsto y - f(y)$ de Y dans $H \equiv H'$ est monotone hémicontinu. Donc, d'après le Théorème 13, il existe $y_0 \in Y$ tel que $\langle y_0 - f(y_0), y_0 - x\rangle \le 0$ pour tout $x \in Y$. Or, par hypothèse, il existe $t > 0$ tel que $tf(y_0) + (1-t)y_0$ appartient à Y. En portant cette valeur dans l'inégalité ci-dessus, on trouve $\langle y_0 - f(y_0), f(y_0) - y_0\rangle \le 0$, ce qui montre que y_0 est point fixe de f. ■

Commentaire. Le Théorème 13 n'est en fait qu'un cas particulier du théorème de Hartman–Stampacchia : dans celui-ci, l'opérateur A est somme de deux opérateurs, l'un monotone hémicontinu, l'autre (éventuellement non linéaire) continu de E faible dans E' fort.

2.6. *Opérateurs multivoques maximaux monotones.* Soient E un espace de Banach et $A : E \to E'$ un opérateur multivoque. Rappelons que A est dit *monotone* si $\langle y' - x', y - x\rangle \ge 0$ dès que $x' \in A(x)$ et $y' \in A(y)$, et *maximal monotone* si, en plus, il est maximal (pour l'inclusion) dans l'ensemble des opérateurs multivoques monotones de E dans E'. On note $D(A) = \{y \in E \mid A(y) \neq \emptyset\}$.

THÉORÈME 14. *Soit Y un ensemble convexe fermé non vide dans un espace de Banach réflexif E. Soient $A : E \to E'$ et $u : E \to E'$ deux opérateurs tels que :*

(i) *A est multivoque monotone et $D(A)$ est contenu dans Y,*

(ii) *u est linéaire monotone continu,*

(iii) *il existe $x_0 \in D(A)$ tel que $\{y \in Y \mid \sup_{x' \in A(x_0)} \langle u(y) + x', y - x_0\rangle \leq 0\}$ est borné.*

Alors, il existe $y_0 \in Y$ tel que

$$\sup_{x' \in A(x)} \langle u(y_0) + x', y_0 - x\rangle \leq 0 \quad \textit{pour tout } x \in D(A).$$

Démonstration. Considérons l'application multivoque $G : D(A) \to Y$ définie par

$$G(x) = \{y \in Y \mid \sup_{x' \in A(x)} \langle u(y) + x', y - x\rangle \leq 0\} \quad \text{pour } x \in D(A).$$

Les ensembles $G(x)$ sont convexes fermés car, d'après (ii), la fonction $y \mapsto \langle u(y), y\rangle$ est convexe continue sur Y. D'autre part, $G(x_0)$ est borné : c'est l'hypothèse (iii). Montrons que G est KKM. Soit $y_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, où $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset D(A)$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda^{n-1}$. Pour $(x, y) \in D(A) \times Y$, posons

$$g(x, y) = \sup_{x' \in A(x)} \langle u(y_0) + x', y - x\rangle.$$

Comme A est monotone, on a

$$g(x_i, x_j) + g(x_j, x_i) \leq 0 \quad \text{pour tout } i, j \in [n],$$

d'où

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i g(x_i, x_j) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g(x_j, x_i) \leq 0 \quad \text{pour tout } j \in [n],$$

et, puisque $y \mapsto g(x, y)$ est convexe,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i g(x_i, x_j) + g(x_j, y_0) \leq 0 \quad \text{pour tout } j \in [n].$$

En appliquant les mêmes opérations sur ces inégalités (multiplication par λ_j, sommation sur j, utilisation de la convexité de $y \mapsto g(x, y)$), on arrive à

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i g(x_i, y_0) + \sum_{j=1}^n \lambda_j g(x_j, y_0) \leq 0.$$

Donc, nécessairement $g(x_i, y_0) \leq 0$ pour au moins un point x_i. Ceci exprime que $y_0 \in \bigcup\{G(x_i) \mid i \in [n]\}$ et prouve que G est KKM.

Ainsi, les conditions du principe géométrique sont vérifiées par G lorsque l'on munit E de la topologie faible. D'où $\bigcap\{G(x) \mid x \in D\} \neq \emptyset$: le théorème est démontré. ∎

Parmi les conséquences du Théorème 14, citons deux résultats de base en théorie des opérateurs maximaux monotones :

COROLLAIRE 14.1 (Minty). *Soient E un espace de Banach réflexif et $A : E \to E'$ un opérateur multivoque maximal monotone tel que $D(A)$ est borné. Alors A est surjectif.*

Démonstration. Il suffit clairement de montrer que $0 \in A(E)$. Notons Y l'enveloppe convexe fermée de $D(A)$. Remarquons que, puisque A est maximal, $D(A)$ est non vide, donc Y est convexe fermé borné non vide. (On peut en fait vérifier facilement que si A est maximal monotone, alors $D(A)$ est convexe fermé non vide, donc $Y = D(A)$.) On déduit du Théorème 14 (avec $u : x \mapsto 0$) qu'il existe $y_0 \in Y$ tel que

$$\langle x', x - y_0\rangle \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in D(A) \text{ et } x' \in A(x).$$

Comme A est maximal monotone, ceci entraîne que $0 \in A(y_0)$. ∎

COROLLAIRE 14.2 (Minty). *Soient H un espace de Hilbert identifié à son dual H' et $A : H \to H$ un opérateur multivoque maximal monotone. Alors $I + A$ est surjectif (I dénote l'application identique sur H).*

Démonstration. Il suffit de montrer que $0 \in (I+A)(H)$. Appliquons le Théorème 14 avec $Y = E = H$ et $u = I$ (tout x_0 dans $D(A)$ vérifie (iii)). On trouve qu'il existe $y_0 \in H$ vérifiant

$$\langle x' - (-y_0), x - y_0\rangle \geq 0 \quad \text{pour tout } (x, x') \in H \times H \text{ tel que } x' \in A(x).$$

Comme A est maximal monotone, on en déduit que $-y_0 \in A(y_0)$, c'est-à-dire que $0 \in y_0 + A(y_0)$. ∎

Commentaire. Le Théorème 14 est un cas particulier du théorème de Debrunner–Flor [4], où u est seulement supposé continu de E faible dans E' fort (mais pas nécessairement linéaire, ni monotone).

Références

[1] H. Asakawa, *Maximal monotone operators associated with saddle functions*, TRU Math. 22 (2) (1986), 47–71.

[2] C. Berge, *Espaces topologiques, Fonctions multivoques*, Dunod, Paris 1959.

[3] H. F. Bohnenblust, S. Karlin and L. Shapley, *Games with continuous pay-off*, in: Ann. of Math. Stud. 24 (1950), 181–192.

[4] H. Debrunner und P. Flor, *Ein Erweiterungssatz für monotone Mengen*, Arch. Math. (Basel) 15 (1964), 445–447.
[5] J. Dugundji and A. Granas, *Fixed Point Theory*, Vol. I, Monografie Mat. 61, Polish Scientific Publishers, Warszawa 1982.
[6] K. Fan, *Minimax theorems*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 39 (1953), 42–47.
[7] —, *Existence theorems and extreme solutions for inequalities concerning convex functions or linear transformations*, Math. Z. 68 (1957), 205–216.
[8] —, *A generalization of Tychonoff's fixed point theorem*, Math. Ann. 142 (1961), 305–310.
[9] —, *Extensions of two fixed point theorems of F. E. Browder*, Math. Z. 112 (1969), 234–240.
[10] —, *A minimax inequality and applications*, in: Inequalities III, O. Shisha (ed.), Academic Press, New York 1972, 103–113.
[11] K. Fan, I. Glicksberg and A. J. Hoffman, *Systems of inequalities involving convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 617–622.
[12] B. Halpern and G. Bergman, *A fixed point theorem for inward and outward maps*, Trans. Amer. Math. Soc. 130 (1968), 353–358.
[13] V. L. Klee, *On certain intersection properties of convex sets*, Canad. J. Math. 3 (1951), 272–275.
[14] B. Knaster, C. Kuratowski und S. Mazurkiewicz, *Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe*, Fund. Math. 14 (1929), 132–137.
[15] H. Kneser, *Sur un théorème fondamental de la théorie des jeux*, C. R. Acad. Sci. Paris 234 (1952), 2418–2420.
[16] H. König, *Über das von Neumannsche minimax theorem*, Arch. Math. (Basel) 19 (1968), 482–487.
[17] M. Lassonde, *Multi-applications KKM en analyse non linéaire*, Thèse de Doctorat, Université de Montréal, 1978.
[18] M. Neumann, *Bemerkungen zum von Neumannschen Minimaxtheorem*, Arch. Math. (Basel) 29 (1977), 96–105.
[19] H. Nikaidô, *On von Neumann's minimax theorem*, Pacific J. Math. 4 (1954), 65–72.
[20] M. Sion, *On general minimax theorems*, ibid. 8 (1958), 171–176.
[21] E. Sperner, *Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 6 (1928), 265–272.
[22] F. A. Valentine, *Convex Sets*, McGraw-Hill, New York 1964.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
ET DE STATISTIQUE
UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
MONTRÉAL, QUÉBEC
CANADA, H3C 3J7

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL
63177 AUBIÈRE CEDEX, FRANCE

Received August 9, 1990 (2709)

STUDIA MATHEMATICA 101 (1) (1991)

Ergodic properties of group extensions of dynamical systems with discrete spectra

by

MIECZYSŁAW K. MENTZEN* (Toruń)

Abstract. Ergodic group extensions of a dynamical system with discrete spectrum are considered. The elements of the centralizer of such a system are described. The main result says that each invariant sub-σ-algebra is determined by a compact subgroup in the centralizer of a normal natural factor.

Introduction. In this paper, we shall be concerned with extending the results of [4] to ergodic isometric extensions of systems with discrete spectra. We will prove that each such system is a natural factor of an ergodic group extension and that other theorems of [4] are true in this more general case.

In [4], the structure of invariant sub-σ-algebras for ergodic abelian group extensions of transformations with discrete spectra has been described. Theorem 3 in [4] says that for any such sub-σ-algebra $\mathcal{C}$ there exists a compact subgroup $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ in the centralizer of a natural factor of the original system such that $\mathcal{C}$ consists of exactly those subsets of this natural factor which are invariant with respect to all elements of $\mathcal{H}(\mathcal{C})$. The present paper includes a generalization of the above result to ergodic nonabelian group extensions of transformations with discrete spectra.

D. Newton in [5] has proved that each factor map of an ergodic abelian group extension of a transformation with discrete spectrum which preserves the base is of the form $\overline{S}(x,g) = (Sx, \theta_x(g))$, where $\theta : X \times G \to G$ splits into the product of a map from the base into the group and a continuous group epimorphism. We will prove that this result is also true in the nonabelian case. In particular, we will describe all elements in the centralizer of such a system.

All results in this paper follow from the specific structure of ergodic self-joinings of ergodic group extensions of transformations with discrete spectra. The joinings turn out to be natural, namely, each of them is the

1991 *Mathematics Subject Classification*: 28D05.
* Research supported by RP.I.10.