[12] S. Sawyer, *Isotropic random walks in a tree*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 12 (1978), 279–292.
[13] R. Szwarc, *An analytic series of irreducible representations of the free group*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 38 (1) (1988), 87–110.
[14] A. Valette, *Cocycles d'arbres et représentations uniformément bornées*, C. R. Acad. Sci. Paris 310 (1990), 703–708.

INSTITUTE OF MATHEMATICS
WROCŁAW UNIVERSITY
PL. GRUNWALDZKI 2/4
50-384 WROCŁAW, POLAND

Received January 10, 1991 (2761)

STUDIA MATHEMATICA 100 (3) (1991)

Pseudocomplémentation dans les espaces de Banach

par

PATRICK RAUCH (Paris)

Abstract. This paper introduces the following definition: a closed subspace Z of a Banach space E is *pseudocomplemented* in E if for every linear continuous operator u from Z to Z there is a linear continuous extension $\overline{u}$ of u from E to E. For instance, every subspace complemented in E is pseudocomplemented in E. First, the pseudocomplemented hilbertian subspaces of L^1 are characterized and, in L^p with p in $[1,+\infty[$, classes of closed subspaces in which the notions of complementation and pseudocomplementation are equivalent are pointed out. Then, for Banach spaces with the uniform approximation property, Dvoretzky's theorem is strengthened by proving that they contain uniformly pseudocomplemented ℓ_n^2's. Finally, the study of Banach spaces in which every closed subspace is pseudocomplemented is started.

Introduction. Cet article, qui a pour origine des notes non publiées de S. Massonnet, introduit la notion, plus large que celle de complémentation, de pseudocomplémentation d'un sous-espace fermé d'un espace de Banach. Ainsi, un sous-espace fermé Z d'un espace de Banach E est dit pseudo-complémenté dans E si et seulement si tout opérateur de Z s'étend en un opérateur de E.

La question résolue suivante de J. Lindenstrauss sur la complémentation a motivé l'introduction de cette nouvelle notion : si E est un espace de Banach de dimension infinie, existe-t-il p dans $[1,+\infty]$ tel que E contienne une suite de sous-espaces uniformément isomorphe à la suite $(\ell_n^p)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et uniformément complémentée dans E? Dans [PIS 1], G. Pisier répond par la négative en construisant un espace de Banach E qui ne contient aucune telle suite.

En revanche, le problème précédent posé dans le cadre plus général de la pseudocomplémentation admet une réponse plus positive. Notons d'abord que, si un espace de Banach E contient une suite de sous-espaces uniformément isomorphe à une suite $(\ell_n^p)_{n\in\mathbb{N}^*}$, avec p dans $[1,+\infty]$, et uniformément pseudocomplémentée dans E, alors E contient nécessairement

1991 *Mathematics Subject Classification*: 46B99, 46A22, 47B10.

une suite de sous-espaces uniformément isomorphe à la suite $(\ell_n^2)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et uniformément pseudocomplémentée dans l'espace E. Le §4 prouve ensuite que tout espace de Banach avec la propriété d'approximation uniforme (notée en abrégé P.A.U.) contient une telle suite de sous-espaces hilbertiens.

D'une part, ce théorème précise, pour les espaces de Banach avec la P.A.U., le théorème classique de Dvoretzky. D'autre part, il permet d'éclairer le vieux problème ouvert en théorie des espaces de Banach suivant : existe-t-il un espace de Banach E de dimension infinie tel que tout opérateur de E soit la somme d'une homothétie et d'une série absolument convergente d'opérateurs de E de rang 1 (i.e. existe-t-il un espace de Banach E sur $\mathbf{K}$ de dimension infinie tel que $L(E,E) = \mathbf{K}\,\mathrm{id}_E + N(E,E)$ où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$)? En effet, tout espace de Banach E qui contient une suite de sous-espaces uniformément isomorphe à la suite $(\ell_n^2)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et uniformément pseudocomplémentée dans E ne vérifie pas cette propriété. On retrouve ainsi le cas déjà connu des espaces de Banach avec la P.A.U.

L'étude, au §3, des sous-espaces hilbertiens pseudocomplémentés de L^1 révèle une autre divergence avec le cas connu de la complémentation. Ainsi, tandis qu'aucun sous-espace hilbertien de dimension infinie de L^1 n'est complémenté dans L^1, le sous-espace hilbertien G engendré par une suite de variables gaussiennes indépendantes standards est pseudocomplémenté dans L^1 (voir §3.1). Dans cette direction, il a alors été possible de caractériser, au §3.2, les sous-espaces hilbertiens de L^1 pseudocomplémentés dans L^1. Signalons deux conséquences de ce résultat : le calcul de la dimension maximale d'un sous-espace hilbertien de ℓ_n^1 pseudocomplémenté dans ℓ_n^1 avec une constante de pseudocomplémentation majorée indépendamment de n (voir §3.3) et la non-pseudocomplémentation dans L^1 d'une part du sous-espace hilbertien R engendré par une suite de variables de Rademacher indépendantes (pour lequel un équivalent de la constante de pseudocomplémentation finidimensionnelle est donné au §3.4) et d'autre part du sous-espace H^1 (voir §3.2).

Plus généralement, le §5 étudie la pseudocomplémentation des sous-espaces fermés de L^p ou ℓ^p, avec p dans $[1,+\infty[$. Le §5.1 révèle par exemple que, dans les classes d'isomorphisme de sous-espaces fermés de L^p hilbertiens ou isomorphes à un espace $\mathcal{L}^p$ pour p dans $]1,+\infty[$ et isomorphes à un espace $\mathcal{L}^1$ complémenté dans son bidual pour $p=1$, les notions de complémentation et de pseudocomplémentation sont équivalentes. Ce résultat permet, par exemple dans le cadre de l'analyse harmonique, de caractériser les sous-espaces hilbertiens invariants par translation de L^p, pour p dans $]1,+\infty[$, pseudocomplémentés dans L^p (voir §5.2).

Enfin, il est bien connu que les espaces de Banach isomorphes à un espace de Hilbert sont les seuls espaces de Banach dont tous les sous-espaces soient complémentés. Aussi, le §6 amorce-t-il l'étude des espaces de Banach E

dont tous les sous-espaces fermés sont pseudocomplémentés dans E, comme c'est le cas, par exemple, des espaces de Banach isomorphes à un espace de Hilbert ou des espaces de Banach injectifs comme L^∞. Le §6.2 démontre ainsi qu'un tel espace de Banach de type non trivial est nécessairement d'indice de type égal à 2.

Remerciements. Je voudrais ici remercier tout particulièrement G. Pisier pour ses conseils et ses idées sans lesquels cet article n'aurait pu voir le jour. Je remercie également tous ceux qui l'ont relu et m'ont fait part de leurs remarques.

1. Définitions, notations et généralités. Dans cet article, tous les espaces de Banach considérés sont réels et toutes les mesures considérées sont positives et finies.

Convenons qu'un *opérateur* (resp. une *projection* ou un *isomorphisme*) d'un espace de Banach E dans un autre F est une application linéaire (resp. une projection ou un isomorphisme) borné(e). $L(E,F)$ (resp. $N(E,F)$) désignera l'espace de Banach des opérateurs (resp. des opérateurs nucléaires : voir [PIE] pour une définition) de E dans F. Si E et F sont des espaces de même dimension finie, $d(E,F)$ est la *distance de Banach–Mazur* entre E et F définie par :

$$d(E,F) = \inf(\|T\|\|T^{-1}\| : T \text{ isomorphisme de } E \text{ sur } F).$$

Rappelons également les quelques notations usuelles suivantes : c_0 est l'espace de Banach, pour la norme sup, des suites réelles de limite nulle. $L^p(m,B) = L^p(\Omega,\mathcal{A},m;B)$, avec p dans $[1,+\infty]$, est l'espace de Banach des classes d'équivalence de fonctions mesurables sur l'espace mesuré $(\Omega,\mathcal{A},m)$ à valeurs dans l'espace de Banach B et dont la puissance $p$ième de la norme est intégrable (resp. qui sont essentiellement bornées en norme si $p=+\infty$).

Si $B=\mathbf{R}$, l'espace $L^p(m,\mathbf{R})$ sera abrégé en $L^p(m)$.

Si $(\Omega,\mathcal{A},m)$ est l'espace mesuré $[0,1]$, muni de la tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue, $L^p(m,B)$ (resp. $L^p(m,\mathbf{R})$) sera abrégé en $L^p(B)$ (resp. L^p).

Si $(\Omega,\mathcal{A},m)$ est l'espace discret $\mathbf{N}$ (resp. $\{1,\ldots,n\}$, avec n dans $\mathbf{N}^*$), muni de la mesure de décompte, $L^p(m,B)$ et $L^p(m,\mathbf{R})$ seront abrégés en $\ell^p(B)$ et ℓ^p (resp. en $\ell_n^p(B)$ et ℓ_n^p).

H^p, avec p dans $[1,+\infty[$ (resp. $p=+\infty$), est le sous-espace fermé de $L^p(\mathbf{C})$ (resp. fermé pour la topologie préfaible $\sigma(L^\infty(\mathbf{C}),L^1(\mathbf{C}))$ de $L^\infty(\mathbf{C})$) engendré par les fonctions complexes $\exp(2\pi int)$ avec n dans $\mathbf{N}$.

Précisons ensuite que la suite $(E_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de sous-espaces fermés de l'espace de Banach E sera dite *uniformément isomorphe* à la suite de sous-espaces fermés $(F_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de l'espace de Banach F si et seulement si il existe un réel D strictement positif tel que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, E_n soit *D-isomorphe* à F_n (i.e. il existe un isomorphisme T_n de E_n sur F_n tel que le produit des normes de T_n et de son inverse T_n^{-1} soit inférieur à D).

Par la suite, E désignera toujours un espace de Banach de dual E' et de bidual E'' et si u est un opérateur de E dans F, u' sera son adjoint de F' dans E'.

Rappelons maintenant les définitions suivantes liées à la notion de complémentation.

Si Λ est un réel strictement positif, un sous-espace fermé Z de E est dit *Λ-complémenté* dans E si et seulement si il existe une projection de E sur Z de norme inférieure à Λ. En particulier, tout sous-espace Z de E de dimension n, avec n dans $\mathbf{N}^*$, est $\sqrt{n}$-complémenté dans E (voir, par exemple, [PIE]). La *constante de complémentation* de Z dans E, notée $\Lambda(Z,E)$, est la borne inférieure des réels Λ tels que Z soit Λ-complémenté dans E. Enfin, la suite $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de sous-espaces fermés de E est dite *uniformément complémentée* dans E si et seulement si il existe un réel Λ strictement positif tel que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, Z_n soit Λ-complémenté dans E.

Voici enfin la définition de la notion de pseudocomplémentation introduite dans cet article.

DÉFINITION. Un sous-espace fermé Z de E est dit *pseudocomplémenté* dans E si et seulement si, pour tout opérateur u de Z dans Z, il existe un opérateur $\overline{u}$ de E dans E étendant u, i.e. tel que $\overline{u}\circ i = i \circ u$, où i est l'injection canonique de Z dans E.

Il existe alors un réel λ strictement positif tel que :

$$\forall u \in L(Z,Z)\ \exists \overline{u} \in L(E,E) \quad \overline{u}\circ i = i\circ u, \quad \|\overline{u}\| \le \lambda \|u\|.$$

La *constante de pseudocomplémentation* de Z dans E, notée $\lambda(Z,E)$, est la borne inférieure de ces réels λ.

Enfin, la suite $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de sous-espaces fermés de E est *uniformément pseudocomplémentée* dans E si et seulement si il existe un réel λ strictement positif tel que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $\lambda(Z_n, E)$ soit inférieure à λ.

Précisons maintenant comment cette notion élargit la notion de complémentation.

En fait, tout sous-espace Z complémenté dans E est pseudocomplémenté dans E et $\lambda(Z,E)$ est inférieure à $\Lambda(Z,E)$. Par ailleurs, tout sous-espace fermé d'un espace de Banach E injectif ou séparablement injectif (voir [L-T 3] pour une définition) est pseudocomplémenté dans E. Ainsi, par exemple, tout sous-espace fermé de l'espace $E = c_0$, ℓ^∞, ou $L^\infty(\mathbf{C})$ est pseudocomplémenté dans E, de sorte que les notions de complémentation et de pseudocomplémentation ne sont pas équivalentes (!) puisque, par exemple, c_0 (resp. H^∞) est un sous-espace pseudocomplémenté mais non complémenté (voir [L-T 1] (resp. [HOF])) dans ℓ^∞ (resp. dans $L^\infty(\mathbf{C})$).

Nous verrons d'autres exemples de cette situation au §3.2.

Terminons ce paragraphe par quelques remarques sur la stabilité de la notion de pseudocomplémentation.

Comme la notion de complémentation, la notion de pseudocomplémentation est transitive et n'est pas, en général, stable, ni par isomorphisme, ni par restriction à un sous-espace (i.e. si Z_0 est un sous-espace fermé de Z, où Z est un sous-espace fermé de E pseudocomplémenté dans E, Z_0 n'est pas nécessairement pseudocomplémenté dans E). Toutefois, contrairement au cas de la complémentation, signalons que, si Z_0 est un sous-espace fermé de Z, où Z est un sous-espace fermé de E, et si Z_0 est pseudocomplémenté dans E, alors Z_0 n'est pas nécessairement pseudocomplémenté dans Z, sauf, par exemple, lorsque Z est complémenté dans E.

2. Quelques critères de pseudocomplémentation

2.1. *Passage du local au global.* La proposition suivante compare la pseudocomplémentation d'un sous-espace avec la pseudocomplémentation uniforme d'une suite de ses sous-espaces, ce qui, pour certains sous-espaces séparables, ramène l'étude à des évaluations fini-dimensionelles (voir §3).

PROPOSITION 1. *Soit E un espace de Banach complémenté dans son bidual. Soit $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite croissante de sous-espaces fermés de E uniformément complémentée dans la fermeture Z de la réunion des sous-espaces Z_n. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Z est pseudocomplémenté dans E.*

(ii) *La suite $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est uniformément pseudocomplémentée dans E.*

Démonstration. (i) implique (ii) par transitivité de la notion de pseudocomplémentation.

Pour la réciproque, considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rrr, "\overline{v}_n"] & & & E \\
& E & E & \\
& Z \arrow[u, "i"] \arrow[r, "u"] & Z \arrow[u, "i"] \arrow[dr, "P_n"] & \\
Z_n \arrow[uuu, "i_n"] \arrow[ur, "j_n"] \arrow[rrr, "v_n = P_n\circ u\circ j_n"'] & & & Z_n \arrow[uuu, "i_n"']
\end{tikzcd}$$

où i, i_n, j_n sont les injections canoniques, u un opérateur de Z dans Z et P_n une projection de Z sur Z_n de norme majorée indépendamment de n. Si $\overline{v}_n$ est l'extension de $v_n = P_n \circ u \circ j_n$ à E, pour tout e de E, la suite bornée $(\overline{v}_n(e))_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge dans E'' pour la topologie préfaible $\sigma(E'', E')$ vers $\overline{v}(e)$ selon tout ultrafiltre sur $\mathbf{N}^*$ plus fin que le filtre de Fréchet.

On définit ainsi un opérateur $\overline{v}$ de E dans E'' tel que, si Q est une projection de E'' sur E, $\overline{u} = Q \circ \overline{v}$ soit une extension de u à E.

2.2. *Pseudocomplémentation d'un sous-espace hilbertien.* Un sous-espace fermé séparable H (resp. de dimension d, avec d dans $\mathbf{N}^*$) d'un espace de Banach E est dit *hilbertien* (resp. *D-hilbertien*, avec D dans $\mathbf{R}_+^*$) si et seulement si H est isomorphe (resp. D-isomorphe) à ℓ^2 (resp. à ℓ_d^2). Une base de H est dite *hilbertienne* (resp. *D-hilbertienne*) si et seulement si elle est l'image de la base canonique de ℓ^2 ou ℓ_d^2 par un isomorphisme (resp. par un D-isomorphisme).

Pour la suite de ce paragraphe, fixons un sous-espace D-hilbertien H de dimension d d'un espace de Banach E et $\beta = (e_1, \ldots, e_d)$ une base D-hilbertienne de H.

Un opérateur de H de matrice orthogonale dans β sera appelé une *β-rotation* de H. Comme toute β-rotation de H est de norme inférieure à D et que tout opérateur de H de norme inférieure à 1 est une combinaison convexe d'opérateurs de type $D \cdot r$, où r est une β-rotation de H, il en résulte une condition suffisante de pseudocomplémentation de H dans E.

PROPOSITION 2. *Soit λ un réel strictement positif. Si toute β-rotation de H s'étend en un opérateur de E de norme inférieure à λ/D, alors $\lambda(H, E)$ est inférieure à λ.*

2.3. *Formulation duale de la pseudocomplémentation.* Pour deux espaces de Banach X et Y, nous identifierons algébriquement $X \otimes Y$ et l'espace vectoriel des applications linéaires de X' dans Y de rang fini et nous noterons $X \widehat{\otimes} Y$ le complété de $X \otimes Y$ pour la norme projective définie par :

$$\|u\|_{X\widehat{\otimes}Y} = \inf\Big(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\|y_i\| : u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i,\ n \in \mathbf{N}^*\Big).$$

Rappelons qu'alors $(X\widehat{\otimes}Y)'$ est isométrique à $L(X, Y')$ et $L(Y, X')$.

Par ailleurs, si X est un espace de Banach, nous noterons i_X l'injection canonique de X dans son bidual X''. Cependant, nous identifierons un sous-espace de X et son image par i_X dans X''.

Pour tout ce paragraphe, Z est un sous-espace de dimension finie d, d dans $\mathbf{N}^*$, de base $(e_1, \ldots, e_d)$ d'un espace de Banach E; i est l'injection canonique de Z dans E; F est un espace de Banach; λ et Λ sont dans $\mathbf{R}_+^*$.

La proposition 3 établit l'analogue pour la pseudocomplémentation de la caractérisation duale de la complémentation suivante (voir, par exemple, [T-J]) :

$$\Lambda(Z, E) \le \Lambda \ \Leftrightarrow\ \forall w \in L(Z, Z),\ N(w) \le \Lambda N(i \circ w).$$

PROPOSITION 3. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\lambda(Z, E'') \le \lambda$.

(ii) $\forall w \in L(E'', Z)$, $\|w \circ i''\|_{Z'\widehat{\otimes}Z} \le \lambda \|i \circ w\|_{E'\widehat{\otimes}E'}$.

Démonstration. Supposons (i) vérifiée et fixons w dans $L(E'', Z)$. Alors :

$$\begin{aligned}\|w \circ i''\|_{Z'\widehat{\otimes}Z} &= \sup(\mathrm{Tr}(w \circ i'' \circ i_Z \circ u) : \|u\|_{L(Z,Z)} \le 1)\\ &= \sup(\mathrm{Tr}(w \circ i_E \circ i \circ u) : \|u\|_{L(Z,Z)} \le 1)\\ &\le \sup(\mathrm{Tr}(w \circ \overline{u} \circ i_E \circ i) : \|\overline{u}\|_{L(E'',E'')} \le \lambda)\\ &\le \sup(\|\overline{u} \circ i_E\|_{L(E,E'')} \|i \circ w\|_{E'\widehat{\otimes}E} : \|\overline{u}\|_{L(E'',E'')} \le \lambda).\end{aligned}$$

Ce qui prouve (ii).

Réciproquement, supposons (ii) et fixons u dans $L(Z, Z)$ de norme inférieure à 1. Notons S le sous-espace vectoriel de $E'\widehat{\otimes}E$ défini par :

$$S = \{i \circ w : w \in L(E'', Z)\}.$$

La forme linéaire f, de norme inférieure à λ par (ii), définie sur S par :

$$\forall w \in L(E'', Z), \quad f(i \circ w) = \mathrm{Tr}(w \circ i'' \circ i_Z \circ u),$$

s'étend, par le théorème de Hahn–Banach, en une forme linéaire sur $E'\widehat{\otimes}E$ de même norme. On vérifie alors que, si v est l'opérateur de E dans E'' associé à cette extension par isométrie, $\overline{u} = (i_{E'})' \circ v''$ est une extension de u à E'' de norme inférieure à λ, ce qui achève de prouver (i).

Nous établissons maintenant un lemme technique de dualité qui trouvera son utilité au §4.

LEMME. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\forall (x_1', \ldots, x_d') \in F'^d$, $\forall u \in L(Z, Z)$,

$$\Big\|\sum_{k=1}^{d} x_k' \otimes i \circ u(e_k)\Big\|_{F'\widehat{\otimes}E} \le \lambda\|u\| \Big\|\sum_{k=1}^{d} x_k' \otimes i(e_k)\Big\|_{F'\widehat{\otimes}E}.$$

(ii) $\forall v \in L(E, F'')$, $\|v\| \le 1$, $\forall u \in L(Z, Z)$,

$$\exists w \in L(E, F'') \quad w \circ i = v \circ i \circ u, \quad \|w\| \le \lambda\|u\|.$$

$$\begin{tikzcd} & F'' & \\ E \arrow[ur, "w"] & & E \arrow[ul, "v"'] \\ Z \arrow[u, "i"] \arrow[rr, "u"] & & Z \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Démonstration. Supposons (i) vérifiée et fixons u dans $L(Z, Z)$ et v dans $L(E, F'')$ de norme inférieure à 1. Notons S le sous-espace vectoriel de $F'\widehat{\otimes}E$ défini par :

$$S = \Big\{ \sum_{k=1}^{d} x'_k \otimes i(e_k) : (x'_1, \dots, x'_d) \in F'^d \Big\}.$$

La forme linéaire f, de norme inférieure à $\lambda\|u\|$, définie sur S par :

$$\forall (x'_1,\dots,x'_d) \in F'^d, \quad f\Big(\sum_{k=1}^{d} x'_k \otimes i(e_k)\Big) = \sum_{k=1}^{d} (v \circ i \circ u(e_k))(x'_k),$$

s'étend, par le théorème de Hahn–Banach, en une forme linéaire sur $F'\widehat{\otimes}E$ de même norme. L'opérateur w de E dans F'' associé par isométrie à cette extension convient pour (ii).

Réciproquement, (ii) implique (i) de manière immédiate car $L(E,F'')$ est isométrique à $(F'\widehat{\otimes}E)'$.

Remarques. 1) La condition (i) avec $F = E$ implique, par (ii) avec $v = i_E$, la pseudocomplémentation de Z dans E lorsque E est complémenté dans E''.

2) Si Z est un sous-espace D-hilbertien de base D-hilbertienne $(e_1, \dots, e_d)$ de E, (i) est une conséquence de la propriété suivante :

$\forall (x'_1,\dots,x'_d) \in F'^d$, $\forall (u_{k,\ell})_{1\le k,\ell\le d} \in O(d)$,

$$\Big\| \sum_{1\le k,\ell\le d} u_{k,\ell} x'_\ell \otimes i(e_k) \Big\|_{F'\widehat{\otimes}E} \le \frac{\lambda}{D} \Big\| \sum_{k=1}^{d} x'_k \otimes i(e_k) \Big\|_{F'\widehat{\otimes}E}.$$

2.4. *Un critère d'extension dans les espaces $L^1(m)$.* Enonçons ici un résultat de [LEVY].

PROPOSITION 4. *Soient m_1 et m_2 deux mesures positives finies et C dans $\mathbf{R}_+^*$. Soient Y un sous-espace fermé de $L^1(m_1)$ et T un opérateur de Y dans $L^1(m_2)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *T s'étend en un opérateur $\overline{T}$ de $L^1(m_1)$ dans $L^1(m_2)$ de norme inférieure à C.*

(ii) *Pour tout m de $\mathbf{N}^*$ et tout $(y_1,\dots,y_m)$ de Y^m, on a :*

$$\| \sup_{1\le j\le m} |T(y_j)| \|_{L^1(m_2)} \le C \| \sup_{1\le j\le m} |y_j| \|_{L^1(m_1)}.$$

A chaque opérateur T ainsi défini, nous associerons donc la borne inférieure, finie ou non, $a(T)$, des réels C qui vérifient (ii).

Ce résultat reste valable avec $L^1(m_1, \mathbf{C})$ et $L^1(m_2, \mathbf{C})$.

3. Etude de la pseudocomplémentation de sous-espaces hilbertiens d'espaces $L^1(\mathbf{P})$, où $\mathbf{P}$ est une mesure de probabilité. Aucun sous-espace hilbertien de dimension infinie de $L^1(\mathbf{P})$ n'est complémenté dans

$L^1(\mathbf{P})$. Plus précisément, il existe un réel A_0 strictement positif tel que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$ et tout sous-espace D-hilbertien H_n de $L^1(\mathbf{P})$ de dimension n, on ait :

$$(A_0/D)\sqrt{n} \le A(H_n, L^1(\mathbf{P})) \le \sqrt{n}.$$

En effet, avec les notations de [PIE], tout projection P de $L^1(\mathbf{P})$ sur H_n et tout D-isomorphisme T de H_n sur ℓ_n^2 vérifient :

$$\begin{aligned}\sqrt{n} = \pi_2(\mathrm{id}_{H_n}) \le \pi_2(P) &\le \|T^{-1}\|\pi_2(T\circ P)\\ &\le K_G\|T^{-1}\|\|T\circ P\| \le K_G D\|P\|,\end{aligned}$$

où K_G est la constante de Grothendieck (voir, par exemple, [L-T 2]).

Comme le montrera ce paragraphe, l'étude de la pseudocomplémentation des sous-espaces hilbertiens de $L^1(\mathbf{P})$ présente plus de contrastes.

Au préalable, précisons que nous noterons $(g_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ (resp. $(r_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$) une suite de variables aléatoires gaussiennes réelles standards indépendantes (resp. la suite des variables de Rademacher) définies sur $[0,1]$. G ou G_n (resp. R ou R_n), pour n dans $\mathbf{N}^*$, désignera le sous-espace fermé de L^1 engendré par les fonctions de la suite $(g_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ ou par $g_1,\dots,g_n$ (resp. par les fonctions de la suite $(r_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ ou par $r_1,\dots,r_n$).

3.1. *Pseudocomplémentation de G dans L^1*

THÉORÈME 1. *Pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $\lambda(G_n, L^1)$ vaut 1.*

Démonstration. Fixons n dans $\mathbf{N}^*$ et notons $\mathcal{A}_n$ la tribu engendrée par $g_1,\dots,g_n$. Une fonction réelle F définie sur $[0,1]$ est $\mathcal{A}_n$-mesurable quand il existe une fonction borélienne f de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ telle que :

$$\forall t \in [0,1], \quad F(t) = f((g_1(t),\dots,g_n(t))).$$

A toute β-rotation u de G_n de matrice orthogonale $(u_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ dans la base 1-hilbertienne $\beta = (g_1,\dots,g_n)$, on associe l'isométrie U de $L^1(\mathcal{A}_n) = L^1([0,1],\mathcal{A}_n, dt)$ définie, pour toute fonction borélienne f de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, par :

$$U(f(g_1,\dots,g_n)) = f\Big(\Big(\sum_{j=1}^{n} u_{1,j}g_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} u_{n,j}g_j\Big)\Big).$$

Comme U étend u, $\lambda(G_n, L^1(\mathcal{A}))$ vaut 1. Or $L^1(\mathcal{A}_n)$ est 1-complémenté dans L^1 (par l'espérance conditionnelle), d'où le résultat.

La proposition 1 du §2.1 conduit au corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. *$\lambda(G, L^1)$ vaut 1.*

Remarque. Le résultat précédent est semblable aux résultats classiques sur l'espace de Fock des physiciens (voir, par exemple, [SIM]).

3.2. *Caractérisation des sous-espaces hilbertiens de $L^1(\mathbf{P})$ pseudocomplémentés dans $L^1(\mathbf{P})$, où $\mathbf{P}$ est une probabilité.* Ce paragraphe a pour but de prouver la caractérisation suivante.

THÉORÈME 2. *Soit H un sous-espace hilbertien de $L^1(\mathbf{P})$ de dimension infinie. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *H est pseudocomplémenté dans $L^1(\mathbf{P})$.*

(ii) *Si T est un isomorphisme de G sur H, il existe deux opérateurs T_1 (resp. T_2) de $L^1(\mathbf{P})$ (resp. L^1) dans L^1 (resp. $L^1(\mathbf{P})$) dont la restriction à H (resp. G) soit T^{-1} (resp. T).*

Précisons qu'il existe deux réels C_1 et C_2 strictement positifs tels que, si $\lambda(H, L^1(\mathbf{P}))$ est inférieure à λ, il existe deux opérateurs T_1 et T_2 vérifiant (ii) *et tels que :*

$$\|T_1\| \le C_1\lambda d(H,G)\|T^{-1}\|, \qquad \|T_2\| \le C_2\lambda d(H,G)\|T\|.$$

Pour établir ce résultat, nous utiliserons les deux lemmes suivants.

LEMME 1 (voir [Mar-P]). *Il existe un réel K strictement positif tel que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, tout espace de Banach B, toute suite $(x_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ de vecteurs de B et toute suite $(g_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ de variables aléatoires gaussiennes standards indépendantes définies sur $[0,1]$, on ait :*

$$\frac{1}{K\sqrt{n}}\Big\|\sum_{1\le i,j\le n} g_{i,j}x_{i,j}\Big\|_{L^1(B)} \le \Big\|\sum_{1\le i,j\le n} u_{i,j}x_{i,j}\Big\|_{L^1(O(n),B)} \le K\Big\|\sum_{1\le i,j\le n} g_{i,j}x_{i,j}\Big\|_{L^1(B)},$$

où $L^1(O(n),B)$ est l'espace L^1 des fonctions à valeurs dans B définies sur le groupe orthogonal $O(n)$ muni de sa mesure de Haar.

LEMME 2. *Soient n dans $\mathbf{N}^*$, D dans $\mathbf{R}_+^*$ et H_n un sous-espace D-hilbertien de $L^1(\mathbf{P})$ de dimension n. Notons i_n (resp. j_n) l'injection canonique de H_n (resp. G_n) dans $L^1(\mathbf{P})$ (resp. dans L^1). Soit T un isomorphisme de G_n sur H_n et K la constante universelle du lemme 1. Alors :*

$$a(i_n\circ T_n) \le \lambda(H_n, L^1(\mathbf{P}))DK\sqrt{\pi/2}\|T_n\|,$$
$$a(j_n\circ T_n^{-1}) \le \lambda(H_n, L^1(\mathbf{P}))DK\|T_n^{-1}\|.$$

D é m o n s t r a t i o n d u l e m m e 2. Pour i dans $\{1,\dots,n\}$, notons e_i le vecteur $T_n(g_i)$ et $\beta = (e_1,\dots,e_n)$. Pour évaluer $a(i_n\circ T_n)$, fixons m dans $\mathbf{N}^*$ et $x_1,\dots,x_m$ dans G_n. Pour k dans $\{1,\dots,m\}$, notons $x_k(1),\dots,x_k(n)$ les coordonnées de x_k dans la base $(g_1,\dots,g_n)$ de G_n. Observons alors que :

$$\Big\|\sup_{1\le k\le m}|i_n\circ T_n(x_k)|\Big\|_{L^1(\mathbf{P})} = \Big\|\sup_{1\le k\le m}|i_n\circ T_n(x_k)|\Big\|_{L^1(O(n),L^1(\mathbf{P}))}$$

$$\le \|a(i_n\circ r_n^{-1})\|\,\Big\|\sup_{1\le k\le m}|r_n\circ T_n(x_k)|\,\|_{L^1(\mathbf{P})}\Big\|_{L^1(O(n))},$$

où r_n est une β-rotation de H_n associée à une matrice orthogonale $(u_{i,j})$. On a :

$$\begin{aligned}
&\Big\|\sup_{1\le k\le m}|i_n\circ T_n(x_k)|\Big\|_{L^1(\mathbf{P})}\\
&\le \lambda(H_n, L^1(\mathbf{P}))D\Big\|\Big(\sum_{j=1}^n x_k(j)\sum_{i=1}^n u_{i,j}e_i\Big)_{1\le k\le m}\Big\|_{L^1(O(n),L^1(\mathbf{P},\ell_m^\infty))}\\
&\le \lambda(H_n, L^1(\mathbf{P}))\frac{K}{\sqrt{n}}D\Big\|\Big(\sum_{j=1}^n x_k(j)\sum_{i=1}^n g_{i,j}e_i\Big)_{1\le k\le m}\Big\|_{L^1(L^1(\mathbf{P},\ell_m^\infty))}\\
&\le \lambda(H_n, L^1(\mathbf{P}))\frac{K}{\sqrt{n}}D\Big\|\Big(\sum_{i=1}^n e_i^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^1(\mathbf{P})}\Big\|\sup_{1\le k\le m}|x_k|\Big\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Or $\|(\sum_{i=1}^n e_i^2)^{1/2}\|_{L^1(\mathbf{P})}$ est inférieure à $\sqrt{\pi/2}\|T_n\|$ (voir, par ex., [L-T 2]). L'estimation de $a(j_n\circ T_n^{-1})$ est analogue en tout point sauf la fin où il faut utiliser la 2-concavité de $L^1(\mathbf{P})$.

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e 2. Notons i (resp. j) l'injection canonique de H (resp. G) dans $L^1(\mathbf{P})$ (resp. dans L^1).

Supposons (i) vérifiée. Alors H est la fermeture de la réunion croissante d'une suite de sous-espaces hilbertiens $(H_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ D-isomorphe à la suite $(G_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, où $D = d(H,G)$, et uniformément pseudocomplémentée dans $L^1(\mathbf{P})$. Si, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, T_n est la restriction de T à G_n et i_n (resp. j_n) est la restriction de i (resp. j) à H_n (resp. G_n), le lemme 2 prouve que :

$$a(i\circ T) = \sup_{n\in\mathbf{N}^*} a(i_n\circ T_n) \le \sup_{n\in\mathbf{N}^*}\lambda(H_n, L^1(\mathbf{P}))\cdot DK\sqrt{\pi/2}\|T\|,$$
$$a(j\circ T^{-1}) = \sup_{n\in\mathbf{N}^*} a(j_n\circ T_n^{-1}) \le \sup_{n\in\mathbf{N}^*}\lambda(H_n, L^1(\mathbf{P}))\cdot DK\|T^{-1}\|.$$

Mais par ailleurs, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, on a :

$$\lambda(H_n, L^1(\mathbf{P})) \le \Lambda(H_n, H)\lambda(H, L^1(\mathbf{P})) \le D\lambda(H, L^1(\mathbf{P})).$$

Ainsi $a(i\circ T)$ et $a(j\circ T^{-1})$ sont finis et la proposition 4 du §2.4 achève de prouver (ii).

Supposons, réciproquement, que (ii) est vérifiée pour un isomorphisme T de G sur H. Alors, si u est un opérateur de H et $\overline{v}$ l'extension de $v = T^{-1}\circ u\circ T$ à L^1 donnée par le corollaire 1 du §3.1, on vérifie facilement que $\overline{u} = T_2\circ\overline{v}\circ T_1$ est une extension de u à L^1 ainsi que le montre le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
L^1(\mathbf{P}) \arrow[rrr, "\overline{u}=T_2\circ\overline{v}\circ T_1"] \arrow[ddd, "T_1"'] & & & L^1(\mathbf{P}) \\
& H \arrow[ul, "i"'] \arrow[r, "u"] \arrow[d, shift right, "T^{-1}"'] & H \arrow[ur, "i"] \arrow[d, shift right, "T^{-1}"'] & \\
& G \arrow[u, shift right, "T"'] \arrow[r, "v=T^{-1}\circ u\circ T"] \arrow[dl, "j"'] & G \arrow[u, shift right, "T"'] \arrow[dr, "j"] & \\
L^1 \arrow[rrr, "\overline{v}"'] & & & L^1 \arrow[uuu, "T_2"']
\end{tikzcd}$$

Corollaire 2. *Si H est un sous-espace hilbertien de $L^1(\mathbf{P})$ de dimension infinie pseudocomplémenté dans $L^1(\mathbf{P})$, il existe deux réels K_1 et K_2 strictement positifs tels que toute base hilbertienne $(e_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ de H vérifie :*

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\qquad K_1(1+\ln(n))^{1/2}\le\|\sup_{1\le k\le n}|e_k|\,\|_{L^1(\mathbf{P})}\le K_2(1+\ln(n))^{1/2}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le (ii) du théorème 2 et la proposition 4 du §2.4 à l'isomorphisme T de G dans H défini par $T(g_k)=e_k$, $\forall k\in\mathbf{N}^*$, sachant, de plus, que, par exemple par [PIS 5], il existe c_1 et c_2 dans $\mathbf{R}_+^*$ tels que :

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\qquad c_1(1+\ln(n))^{1/2}\le\|\sup_{1\le k\le n}|g_k|\,\|_{L^1}\le c_2(1+\ln(n))^{1/2}.$$

Tous les résultats de ce paragraphe restant valables pour l'espace de Banach réel $L^1(\mathbf{P},\mathbf{C})$, voici quelques conséquences du corollaire 2.

Application 1. *Tout sous-espace hilbertien de $L^1(\mathbf{P})$ (resp. de $L^1(\mathbf{P},\mathbf{C})$) de dimension infinie dont une base hilbertienne n'est constituée que de fonctions uniformément bornées, n'est pas pseudocomplémenté dans $L^1(\mathbf{P})$ (resp. dans $L^1(\mathbf{P},\mathbf{C})$).*

Exemple 1. R n'est pas pseudocomplémenté dans L^1. Le §3.4 précisera ce résultat.

Exemple 2. Rappelons qu'une partie S de $\mathbf{Z}$ est un *ensemble $\Lambda(2)$* si et seulement si le sous-espace fermé L_S^1 de $L^1(\mathbf{C})$ engendré par les fonctions complexes $\exp(2\pi int)$, pour n dans S, est hilbertien. Ainsi, dans $L^1(\mathbf{C})$, les sous-espaces hilbertiens de dimension infinie, L_S^1, où S est un ensemble $\Lambda(2)$, ne sont pas pseudocomplémentés.

Application 2. *H^1 n'est pas pseudocomplémenté dans $L^1(\mathbf{C})$.*

Démonstration. Par [Lo-R], l'ensemble S des valeurs d'une suite lacunaire de Hadamard est un ensemble de Sidon, donc un ensemble $\Lambda(2)$. Ainsi, par l'exemple 2 précédent, L_S^1 n'est pas pseudocomplémenté dans $L^1(\mathbf{C})$. Or la mise bout à bout des théorèmes de Paley (voir [DUR]), de Rudin–Pisier (voir [PIS 6]) et de Khintchine (voir [L-T 2]) prouve que L_S^1 est complémenté, donc pseudocomplémenté, dans H^1. Par transitivité de la notion de pseudocomplémentation, H^1 ne peut donc pas être pseudocomplémenté dans $L^1(\mathbf{C})$.

Remarques. Rappelons que, par [HOF], pour tout p de $]1,+\infty[$, H^p est complémenté dans $L^p(\mathbf{C})$ et que H^∞, bien que non complémenté dans $L^\infty(\mathbf{C})$, est pseudocomplémenté dans l'espace injectif $L^\infty(\mathbf{C})$. Par ailleurs, signalons que S est un ensemble de Sidon si et seulement si L_S^1 est un sous-espace hilbertien "pseudocomplémenté de façon invariante par translation" dans $L^1(\mathbf{C})$, c'est-à-dire que tous les multiplicateurs de L_S^1 s'étendent à $L^1(\mathbf{C})$.

3.3. *Cas des sous-espaces de ℓ_n^1, avec n dans $\mathbf{N}^*$, pseudocomplémentés dans ℓ_n^1.* Comme ℓ_n^1 est isométrique à l'espace L^1 sur $\{1,\dots,n\}$ muni de la mesure de décompte normalisée, les résultats du §3.2 s'appliquent. Le théorème suivant donne la dimension maximale, en fonction de n, d'un sous-espace hilbertien H de ℓ_n^1 tel que $\lambda(H,\ell_n^1)$ soit majorée indépendamment de n.

Théorème 3. *Il existe une fonction f de $\mathbf{R}_+^{*2}$ dans $\mathbf{R}_+^*$ telle que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, tous D et λ de $\mathbf{R}_+^*$, tout sous-espace D-hilbertien H_d de dimension d de ℓ_n^1 tel que $\lambda(H_d,\ell_n^1)$ soit inférieur à λ, on ait :*

$$d\le f(\lambda,D)(1+\ln(n)).$$

De plus, cette estimation est inaméliorable, i.e. il existe deux réels c_3 et λ_3 strictement positifs tels que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, il existe un sous-espace $\sqrt{2}$-hilbertien H_d de dimension d, avec d dans $\mathbf{N}^*$, de ℓ_n^1 tel que :

$$\lambda(H_d,\ell_n^1)\le\lambda_3,\qquad d\ge c_3(1+\ln(n)).$$

Démonstration. Si H_d est un sous-espace D-hilbertien de dimension d de ℓ_n^1, notons i_d (resp. j_d) l'injection canonique de H_d (resp. G_d) dans ℓ_n^1 (resp. L^1) et T_d un D-isomorphisme de G_d sur H_d. Alors, le lemme 2 du §3.2 donne :

$$a(i_d\circ T_d)\le\lambda(H_d,\ell_n^1)DK\sqrt{\pi/2}\|T_d\|,\quad a(j_d\circ T_d^{-1})\le\lambda(H_d,\ell_n^1)DK\|T_d^{-1}\|.$$

Ainsi, si $\lambda(H_d,\ell_n^1)$ est inférieure à λ, l'identité de G_d s'étend en un opérateur de L^1 de rang inférieur à n et de norme inférieure à $\lambda^2D^3K^2\sqrt{\pi/2}$. D'où, par [F-J-S], le résultat annoncé.

D'autre part, par [FIG] et [DOR], il existe deux réels c_3 et λ_3 strictement positifs tels que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, il existe un sous-espace Z_d de L^1 contenant G_d et un isomorphisme T_d de Z_d sur ℓ_n^1 tels que :

$$d\le c_3(1+\ln(n)),\quad \Lambda(Z_d,L^1)\le\lambda_3/2,\quad \|T_d\|\|T_d^{-1}\|\le\sqrt{2}.$$

Grâce au théorème 1 du §3.1, $H_d = T_d(G_{d_1})$ est alors un sous-espace $\sqrt{2}$-hilbertien de ℓ_n^1 tel que $\lambda(H_d, \ell_n^1)$ soit inférieure à λ_3.

Le théorème suivant, par l'utilisation des techniques du §3.2, précise une fonction f du théorème 3 précédent.

THÉORÈME 3 bis. *Il existe un réel K_3 strictement positif tel que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, tout D de $\mathbf{R}_+^*$, et tout sous-espace D-hilbertien H_d de dimension d de ℓ_n^1, on ait :*

$$d \le K_3 \lambda(H_d, \ell_n^1)^2 D^4 (1 + \ln(n)) .$$

Démonstration. Fixons n dans $\mathbf{N}^*$, D dans $\mathbf{R}_+^*$ et H_d un sous-espace D-hilbertien de ℓ_n^1 de base D-hilbertienne $(e_1, \ldots, e_d)$, où, pour tout i de $\{1, \ldots, d\}$, e_i est l'image de g_i par un isomorphisme T_d de G_d sur H_d de norme $\sqrt{D}$. Considérons les éléments $f_1, \ldots, f_d$ de $(\ell_n^1)'$ de normes inférieures à $\sqrt{D}$ qui étendent les formes biorthogonales associées aux vecteurs $e_1, \ldots, e_d$ et notons i_d l'injection canonique de H_d dans ℓ_n^1 et $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ la base canonique de ℓ_n^1. Pour la projection $p = \sum_{j=1}^d f_j \otimes e_j$ de ℓ_n^1 sur H_d, on a :

$$\begin{aligned} d = N(\mathrm{id}_{H_d}) &= N(p \circ i_d) = N(i_d \circ p) \\ &= \|i_d \circ p\|_{\ell_n^1(\ell_n^\infty)} = \|\sup_{1\le k\le n} |i_d \circ p(\varepsilon_k)|\,\|_{\ell_n^1} . \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le lemme 2 du §3.2, on obtient :

$$\begin{aligned} d &= \|\sup_{1\le k\le n} |(i_d \circ T_d)(T_d^{-1} \circ p(\varepsilon_k))|\,\|_{\ell_n^1} \le a(i_d \circ T_d)\,\|\sup_{1\le k\le n} |T_d^{-1} \circ p(\varepsilon_k)|\,\|_{L^1} \\ &\le \lambda(H_d, \ell_n^1) D K \sqrt{\pi/2} \|T_d\|\,\|\sup_{1\le k\le n} |T_d^{-1} \circ p(\varepsilon_k)|\,\|_{L^1} . \end{aligned}$$

Or, par exemple par [PIS 5], il existe un réel M strictement positif tel que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$ et toute famille de variables gaussiennes centrées $X_1, \ldots, X_n$ définies sur $[0,1]$, on ait :

$$\|\sup_{1\le k\le n} |X_k|\,\|_{L^1} \le M \sqrt{1 + \ln(n)} \sup_{1\le k\le n} \|X_k\|_{L^2} .$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \|\sup_{1\le k\le n} |T_d^{-1} \circ p(\varepsilon_k)|\,\|_{L^1} &= \Big\|\sup_{1\le k\le n} \Big|\sum_{j=1}^d f_j(\varepsilon_k) g_j\Big|\,\Big\|_{L^1} \\ &\le M\sqrt{1+\ln(n)} \sup_{1\le k\le n} \Big\|\sum_{j=1}^n f_j(\varepsilon_k) g_j\Big\|_{L^2} \\ &\le M\sqrt{1+\ln(n)} \sup_{1\le k\le n} \Big(\sum_{j=1}^n |f_j(\varepsilon_k)|^2\Big)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\le M\sqrt{1+\ln(n)}\Big(\sum_{j=1}^n \|(f_j(\varepsilon_k))_{k=1,\ldots,n}\|_{\ell_n^\infty}^2\Big)^{1/2} \\ &\le M\sqrt{1+\ln(n)}\sqrt{dD} . \end{aligned}$$

Finalement, on a obtenu :

$$\sqrt{d} \le \lambda(H_d, \ell_n^1) D^2 K M \sqrt{\pi/2}\sqrt{1+\ln(n)} .$$

3.4. *Etude de la pseudocomplémentation de R dans L^1.* Dans tout ce paragraphe, $(g_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de variables gaussiennes réelles indépendantes définies sur $[0,1]$ standards qui soit indépendante de la suite $(r_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ des variables de Rademacher. Les notations G_n et G sont conservées.

LEMME 3. *Pour tout n de $\mathbf{N}^*$, tout espace de Banach B et tous $x_1, \ldots, x_n$ de B, on a :*

$$\begin{aligned} \|g_1\|_{L^1} \Big\|\sum_{k=1}^n r_k x_k\Big\|_{L^1(B)} &\le \Big\|\sum_{k=1}^n g_k x_k\Big\|_{L^1(B)} \\ &\le \|\sup_{1\le k\le n} |g_k|\,\|_{L^1} \Big\|\sum_{k=1}^n r_k x_k\Big\|_{L^1(B)} . \end{aligned}$$

Démonstration. Pour l'inégalité de gauche, voir par exemple [PIS 2]. Pour prouver l'inégalité de droite, fixons n dans $\mathbf{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n$ dans B. Observons alors que, par symétrie de la suite $(r_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$, on a :

$$\begin{aligned} \Big\|\sum_{k=1}^n r_k x_k\Big\|_{L^1(B)} &= \sup\Big(\Big\|\sum_{k=1}^n a_k r_k x_k\Big\|_{L^1(B)} : (a_1, \ldots, a_n) \in \{-1,1\}^n\Big) \\ &= \sup\Big(\Big\|\sum_{k=1}^n a_k r_k x_k\Big\|_{L^1(B)} : (a_1, \ldots, a_n) \in [-1,1]^n\Big) . \end{aligned}$$

Par homogénéité, il en résulte que :

$$\forall t \in [0,1], \quad \Big\|\sum_{k=1}^n g_k(t) r_k x_k\Big\|_{L^1(B)} \le \sup_{1\le k\le n} |g_k(t)| \Big\|\sum_{k=1}^n r_k x_k\Big\|_{L^1(B)} .$$

Par intégration sur $[0,1]$ en sachant que, par symétrie de la suite $(g_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$, la suite $(r_k g_k)_{1\le k\le n}$ a même loi sur $[0,1]^2$ que la suite $(g_k)_{1\le k\le n}$ sur $[0,1]$, on trouve l'inégalité souhaitée.

THÉORÈME 4. *Il existe deux réels λ_4 et λ_4' strictement positifs tels que :*

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \lambda_4(1+\ln(n))^{1/2} \le \lambda(R_n, L^1) \le \lambda_4'(1+\ln(n))^{1/2} .$$

Démonstration. Par souci de clarté, nous travaillerons par étapes successives.

1) *Notations.* Pour n dans $\mathbf{N}^*$, notons i_n (resp. j_n) l'injection canonique de R_n (resp. G_n) dans L^1 et T_n l'isomorphisme de G_n sur R_n qui, pour tout i de $\{1,\ldots,n\}$, associe à g_i la fonction r_i. Rappelons que, par les inégalités de Khintchine (voir, par exemple, [L-T 2]), il existe un réel A_1 strictement positif tel que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \|T_n\| \le \sqrt{\pi/2}, \quad \|T_n^{-1}\| \le A_1^{-1}\sqrt{2/\pi}.$$

2) *Majoration de $\lambda(R_n, L^1)$.* Si u_n est un opérateur de R_n, l'opérateur $v_n = T_n^{-1} \circ u_n \circ T_n$ de G_n s'étend, par le théorème 1 du §3.1, en un opérateur $\overline{v}_n$ de L^1 de même norme. On vérifie alors facilement (voir le diagramme de la démonstration du théorème 2 du §3.2) que, si $T_{1,n}$ (resp. $T_{2,n}$) est une extension de $j_n \circ T_n^{-1}$ (resp. de $i_n \circ T_n$) à L^1, alors $\overline{u}_n = T_{2,n} \circ \overline{v}_n \circ T_{1,n}$ est une extension de u_n à L^1. Il en résulte que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \lambda(R_n, L^1) \le A_1^{-1} a(i_n \circ T_n) a(j_n \circ T_n^{-1}).$$

3) *Calculs de $a(i_n \circ T_n)$ et $a(j_n \circ T_n^{-1})$.* Par définition (voir la proposition 4 du §2.4), pour tout n de $\mathbf{N}^*$, on a :

$$a(i_n \circ T_n) = \inf(C > 0 : \forall m \in \mathbf{N}^*, \\ \forall (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \in \mathbf{R}^{nm},\ (\mathrm{I}_{n,m}) \text{ soit vérifiée}),$$

où $(\mathrm{I}_{n,m})$ est l'inégalité suivante :

$$(\mathrm{I}_{n,m}) \qquad \Big\| \max_{1\le j\le m} \Big| \sum_{i=1}^n a_{i,j} r_i \Big| \Big\|_{L^1} \le C \Big\| \max_{1\le j\le m} \Big| \sum_{i=1}^n a_{i,j} g_i \Big| \Big\|_{L^1}.$$

Mais, si $(e_1,\ldots,e_m)$ est la base canonique de ℓ_m^∞, on observe que :

$$(\mathrm{I}_{n,m}) \qquad \Big\| \sum_{i=1}^n r_1 \Big(\sum_{i=1}^m a_{i,j} e_j \Big) \Big\|_{L^1(\ell_m^\infty)} \le C \Big\| \sum_{i=1}^n g_i \Big(\sum_{i=1}^m a_{i,j} e_j \Big) \Big\|_{L^1(\ell_m^\infty)}.$$

L'inégalité inverse étant claire, nous obtenons par ce qui précède et par le lemme 3 :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad a(i_n \circ T_n) = \|g_1\|_{L^1}^{-1} = \sqrt{\pi/2}.$$

De même, on trouve que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad a(j_n \circ T_n^{-1}) = \| \sup_{1\le k\le n} |g_k| \,\|.$$

4) *Minoration de $\lambda(R_n, L^1)$.* Pour tout n de $\mathbf{N}^*$, le lemme 2 du §3.2 appliqué à R_n avec $D = A_1^{-1}$ donne :

$$\lambda(R_n, L^1) \ge A_1 K^{-1} \|T_n^{-1}\|^{-1} a(j_n \circ T_n^{-1}) \ge A_1^2 K^{-1} \sqrt{\pi/2} \| \sup_{1\le k\le n} |g_k| \,\|_{L^1}.$$

5) *Conclusion.* Le résultat annoncé découle de 2), 3) et 4) sachant que, par exemple par [PIS 5], il existe deux réels c_1 et c_2 strictement positifs tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad c_1(1+\ln(n))^{1/2} \le \| \sup_{1\le k\le n} |g_k| \,\|_{L^1} \le c_2(1+\ln(n))^{1/2}.$$

La proposition 1 du §2.1 conduit au corollaire suivant :

COROLLAIRE 3. *R n'est pas pseudocomplémenté dans L^1.*

4. Amélioration du théorème de Dvoretzky pour les espaces de Banach avec la P.A.U. Le théorème de Dvoretzky (voir [DVO]) assure l'existence, dans tout espace de Banach de dimension infinie, d'une suite de sous-espaces uniformément isomorphe à la suite $(\ell_n^2)_{n\in\mathbf{N}^*}$. Par ailleurs, dans [PIS 1], G. Pisier construit un espace de Banach de dimension infinie qui ne contient aucune suite de sous-espaces qui soit à la fois uniformément isomorphe à la suite $(\ell_n^2)_{n\in\mathbf{N}^*}$ (ou même à la suite $(\ell_n^p)_{n\in\mathbf{N}^*}$ pour p dans $[1,+\infty]$) et uniformément complémentée dans cet espace.

Le but de ce paragraphe est de prouver que tout espace de Banach E de dimension infinie, avec la propriété d'approximation uniforme, contient une suite de sous-espaces uniformément isomorphe à $(\ell_n^2)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et uniformément pseudocomplémentée dans E.

Avant de préciser ce résultat, rappelons qu'un espace de Banach E de dimension infinie a la *propriété d'approximation uniforme* (en abrégé P.A.U.) si et seulement si il existe un réel M strictement positif et une fonction f de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{N}^*$ croissante tels que, pour tout d de $\mathbf{N}^*$ et tout sous-espace Z_d de E de dimension d, il existe un opérateur T_d de E étendant l'identité de Z_d avec une norme inférieure à M et un rang inférieur à $f(d)$.

Voici maintenant le résultat annoncé.

THÉORÈME. *Soient E un espace de Banach avec la P.A.U. de constante M et ε_0 un réel strictement positif. Pour tout d de $\mathbf{N}^*$, il existe un sous-espace H_d de E, $(1+\varepsilon_0)$-hilbertien et tel que $\lambda(H_d, E)$ soit inférieure à $M(1+\varepsilon_0)$.*

Démonstration. Il suffit clairement de prouver l'existence d'une fonction h de $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{R}_+^*$ croissante sur $\mathbf{N}^*$ et telle que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, tout sous-espace E_n de E de dimension n, tout ε strictement positif et tout d de $\mathbf{N}^*$ inférieur à $h(\varepsilon, n)$, il existe un sous-espace H_d de E_n de dimension d, $(1+\varepsilon)$-hilbertien et tel que $\lambda(H_d, E)$ soit inférieure à $M(1+\varepsilon)^3$. Pour ce faire, nous suivrons les idées de la démonstration probabiliste du théorème classique de Dvoretzky (voir [PIS 2]). Par souci de clarté, nous travaillerons par étapes.

1) *Notations.* Par [PIS 2], il existe C dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que, pour tout espace de Banach E de dimension finie, il existe une variable gaussienne X à valeurs

dans E de dimension $d(X)$ supérieure à $C\ln(\dim(E))$, où on définit :

$$d(X) = (E\|X\|)^2/s(X)^2, \qquad s(X)^2 = \sup(E\eta(X)^2 : \|\eta\|_{E'} \le 1)\,.$$

Fixons n dans $\mathbf{N}^*$ et E_n un sous-espace de E de dimension n. Notons i l'injection canonique de E_n dans E.

Fixons une variable gaussienne X à valeurs dans E_n de dimension $d(X)$ supérieure à $C\ln(n)$. Soit $(X_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ une suite de copies de X définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Fixons d dans $\mathbf{N}^*$ et ε dans $\mathbf{R}_+^*$. L'ensemble des espaces de Banach de dimension $f(d)$ quotienté par la relation d'isométrie étant compact, considérons un $(1+\varepsilon)$-réseau $F_1, \ldots, F_{g(d)}$ pour la distance de Banach–Mazur. Considérons enfin les deux parties suivantes de Ω :

$$\Omega_1(d,\varepsilon) = \{w\in\Omega : \forall a\in\mathbf{R}^d, (\mathrm{I}_1) \text{ soit vérifiée}\},$$
$$\Omega_2(d,\varepsilon) = \{w\in\Omega : \forall j\in\{1,\ldots,g(d)\}, \forall(x_1',\ldots,x_d')\in F_j'^{\,d}, (\mathrm{I}_2) \text{ soit vérifiée}\},$$

où (I_1) et (I_2) sont les doubles inégalités suivantes :

$$(\mathrm{I}_1) \qquad \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\Big(\sum_{k=1}^d a_k^2\Big)^{1/2} \le \Big\|\sum_{k=1}^d a_k \frac{X_k(w)}{E\|X\|}\Big\| \le \sqrt{1+\varepsilon}\Big(\sum_{k=1}^d a_k^2\Big)^{1/2},$$

$$(\mathrm{I}_2) \qquad \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} E\Big\|\sum_{k=1}^d x_k'\otimes i(X_k)\Big\|_{F_j'\widehat{\otimes}E} \le \Big\|\sum_{k=1}^d x_k'\otimes i(X_k(w))\Big\|_{F_j'\widehat{\otimes}E}$$
$$\le \sqrt{1+\varepsilon}E\Big\|\sum_{k=1}^d x_k'\otimes i(X_k)\Big\|_{F_j'\widehat{\otimes}E}.$$

2) *Schéma de la démonstration.* Ce paragraphe termine la démonstration du théorème en supposant, ce qui sera prouvé au cours des étapes ultérieures, que $\Omega_1(d,\varepsilon)\cap\Omega_2(d,\varepsilon)$ est non vide. Il existe donc w_0 dans Ω tel que (I_1) et (I_2) soient satisfaites.

Par (I_1), le sous-espace H_d engendré par $X_1(w_0), \ldots, X_d(w_0)$ est un sous-espace $(1+\varepsilon)$-hilbertien de E_n de base $(1+\varepsilon)$-hilbertienne $(X_1(x_0)/E\|X\|, \ldots$ $\ldots, X_d(w_0)/E\|X\|)$. Or E a la P.A.U., donc il existe un opérateur T_d de E associé à H_d. Par ailleurs, si F est un sous-espace de E de dimension $f(d)$ contenant l'image de T_d, il existe j_0 dans $\{1,\ldots,g(d)\}$ tel que F_{j_0} soit $(1+\varepsilon)$-isomorphe à F.

Par (I_2) et par invariance de la densité gaussienne par transformation orthogonale, il vient :

$$\forall(u_{k,\ell})_{1\le k,\ell\le d}\in O(d),\ \forall(x_1',\ldots,x_d')\in F'^{\,d},$$

$$\Big\|\sum_{1\le k,\ell\le d} u_{k,\ell}x_\ell'\otimes i(X_k(w_0))\Big\|_{F'\widehat{\otimes}E} \le (1+\varepsilon)^2\Big\|\sum_{k=1}^d x_k'\otimes i(X_k(w_0))\Big\|_{F'\widehat{\otimes}E}.$$

Alors, par le lemme du §2.3 et la remarque 2) qui le suit, il existe, par réflexivité de F, un opérateur w de E dans F tel que :

$$w\circ i = T_d\circ i\circ u, \qquad \|w\| \le M(1+\varepsilon)^3\,.$$

Donc $\lambda(H_d, E)$ est inférieure à $M(1+\varepsilon)^3$ comme le prouve le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[dr, "i_F"] & \\
E \arrow[ur, "w"] \arrow[rr, "\tilde{u}=i_F\circ w"'] & & E \arrow[ul, "T_d"'] \\
H_d \arrow[u, "i"] \arrow[rr, "u"] & & H_d \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

3) *Discrétisation des parties $\Omega_1(d,\varepsilon)$ et $\Omega_2(d,\varepsilon)$ de Ω.* Pour $i=1,2$ et d_i dans $]0,1[$, considérons un d_1-réseau A_1 de la sphère euclidienne unité de $\mathbf{R}^d$ de cardinal inférieur à $(1+2/d_1)^d$ et, pour tout j de $\{1,\ldots,g(d)\}$, un d_2-réseau $A_{2,j}$ de la sphère unité de $F_j'^{\,d}$ de cardinal inférieur à $(1+2/d_2)^d$ pour la norme N_j définie par :

$$\forall(x_1',\ldots,x_d')\in F_j'^{\,d}, \quad N_j((x_j',\ldots,x_d')) = E\Big\|\sum_{k=1}^d x_k'\otimes i(X_k)\Big\|_{F_j'\widehat{\otimes}F}.$$

Alors, comme dans la preuve que nous citions précédemment, il existe, pour $i=1,2$, $d_i(\varepsilon)$ (abrégé en d_i) dans $]0,1[$ tel que la partie $\Omega_i'(d,\varepsilon)$ suivante de Ω soit contenue dans $\Omega_i(d,\varepsilon)$:

$$\Omega_1'(d,\varepsilon) = \{w\in\Omega : \forall a\in A_1, (\mathrm{I}_1') \text{ soit vérifiée}\},$$
$$\Omega_2'(d,\varepsilon) = \{w\in\Omega : \forall j\in\{1,\ldots,g(d)\},$$
$$\forall(x_1',\ldots,x_d')\in A_{2,j}, (\mathrm{I}_2') \text{ soit vraie}\},$$

où (I_1') et (I_2') sont les doubles inégalités suivantes :

$$(\mathrm{I}_1') \qquad 1-d_1 \le \Big\|\sum_{k=1}^d a_kX_k(w)/E\|X\|\Big\| \le 1+d_1\,,$$

$$(\mathrm{I}_2') \qquad 1-d_2 \le \Big\|\sum_{k=1}^d x_k'\otimes i(X_k(w))\Big\|_{F_j'\widehat{\otimes}E} \le 1+d_2\,.$$

4) *Majoration de $P({}^c\Omega_i'(d,\varepsilon))$ pour $i=1,2$.* Rappelons l'inégalité de déviation pour une variable gaussienne : il existe un réel K strictement positif tel que, pour tout réel t strictement positif, tout espace de Banach B et toute variable Z gaussienne définie sur Ω et à valeurs dans B, on ait :

$$P(\{w\in\Omega : |\,\|Z(w)\| - E\|Z\|\,| > tE\|Z\|\}) \le 2\exp(-Kt^2d(Z))\,.$$

Cette inégalité appliquée successivement aux variables $Z_a = \sum_{k=1}^{d} a_k X_k$ pour a dans A_1 et $Z_{x'} = \sum_{k=1}^{d} x'_k \otimes i(X_k)$, pour j dans $\{1, \ldots, g(d)\}$ et $x' = (x'_1, \ldots, x'_d)$ dans $A_{2,j}$, conduit aux deux majorations suivantes :

$$P({}^c\Omega'_1(d,\varepsilon)) \le 2\exp(2(d/d_1) - K d_1^2 d(X)),$$
$$P({}^c\Omega'_2(d,\varepsilon)) \le 2\max(\exp(\ln(g(d)) + 2d\,f(d)/d_2 - K d_2^2 d(Z_{x'})) : x' \in A_{2,j}).$$

5) *Comparaison de $d(X)$ et $d(Z_{x'})$.* Soient E et F deux espaces de Banach et $x' = (x'_1, \ldots, x'_d)$ dans F'^d. Soient $X_1, \ldots, X_d$ des copies d'une variable gaussienne X à valeurs dans E et $Z_{x'} = \sum_{k=1}^{d} x'_k \otimes X_k$. Montrons que $d(Z_{x'})$ est supérieure à $d(X)/d$. D'une part,

$$\begin{aligned} E\|Z_{x'}\|_{F'\widehat{\otimes}E} &\le E\sup\Big(\Big\|\sum_{k=1}^{d} x'_k(x)X_k\Big\| : \|x\|_F \le 1\Big)\\ &\le \sup\Big(E\Big\|\sum_{k=1}^{d} x'_k(x)X_k\Big\| : \|x\|_F \le 1\Big)\\ &= \sup\Big(\Big(\sum_{k=1}^{d} x'_k(x)^2\Big)^{1/2} : \|x\|_F \le 1\Big)E\|X\|. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$s(Z_{x'})^2 = \sup\Big(E\Big(\sum_{k=1}^{d}\eta(x'_k \otimes X_k)\Big)^2 : \|\eta\|_{(F'\widehat{\otimes}E)'} \le 1\Big).$$

Or les variables aléatoires gaussiennes réelles $(\eta(x'_k \otimes X_k))_{k\in\{1,\ldots,d\}}$ sont indépendantes, de sorte que :

$$\begin{aligned} s(Z_{x'})^2 &= \sup\Big(\sum_{k=1}^{d} E\eta(x'_k \otimes X_k)^2 : \|\eta\|_{(F'\widehat{\otimes}E)'} \le 1\Big)\\ &\le \sum_{k=1}^{d}\sup(E\eta(x'_k \otimes X_k)^2 : \|\eta\|_{(F'\widehat{\otimes}E)'} \le 1)\\ &= \sum_{k=1}^{d}\|x'_k\|^2 \sup(E(u(x'_k/\|x'_k\|)(X_k))^2 : \|u\|_{L(F',E')} \le 1)\\ &\le \sum_{k=1}^{d}\|x'_k\|^2 s(X)^2 \le d\sup\Big(\Big(\sum_{k=1}^{d} x'_k(x)^2\Big)s(X)^2 : \|x\|_F \le 1\Big), \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé.

6) *Valeur maximale de d pour que $\Omega_1(d,\varepsilon)\cap\Omega_2(d,\varepsilon)$ soit non vide.* Pour

que $\Omega_1(d,\varepsilon)\cap\Omega_2(d,\varepsilon)$ soit non vide, il suffit de prendre, d'une part,

$$2d/d_1 \le K d_1^2 C\ln(n)/2 \le K d_1^2 d(X)/2,$$

pour que, par 3) et 4), on ait :

$$P({}^c\Omega_1(d,\varepsilon)) \le P({}^c\Omega'_1(d,\varepsilon)) \le 2\exp(-K d_1^2 C\ln(n)/2),$$

donc

$$P({}^c\Omega_1(d,\varepsilon)) \le 2\exp(-2d/d_1) \le 2\exp(-2d) \le 2/e^2 < 1/2;$$

d'autre part,

$$\ln(g(d)) + 2d\,f(d)/d_2 \le K d_2^2 C\ln(n)/(2d) \le K d_2^2 d(X)/(2d),$$

pour que, par 3), 4) et 5), on ait :

$$P({}^c\Omega_2(d,\varepsilon)) \le P({}^c\Omega'_2(d,\varepsilon)) \le 2\exp(-K d_2^2 C\ln(n)/(2d)),$$

donc

$$P({}^c\Omega_2(d,\varepsilon)) \le 2\exp(-\ln(g(d)) - 2d\,f(d)/d_2) \le 2\exp(-2d) < 1/2.$$

Ainsi, on réalise $P({}^c\Omega_i(d,\varepsilon)) \le 1/2$, pour $i = 1, 2$, donc a fortiori $\Omega_1(d,\varepsilon)\cap\Omega_2(d,\varepsilon)$ non vide, avec, par exemple,

$$d\ln(g(d)) + 2d^2 f(d) \le K(C/2)\min(d_1, d_2)^3\ln(n).$$

R e m a r q u e. La démonstration précédente prouve en fait le résultat plus général suivant. Pour toute fonction f croissante de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{N}^*$, il existe une fonction h de $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{R}_+^*$ croissante sur $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{N}^*$ telle que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, tout espace de Banach E_n de dimension n, tout ε strictement positif et tout d de $\mathbf{N}^*$ inférieur à $h(\varepsilon, n)$, il existe un sous-espace H_d de E_n de dimension d, $(1+\varepsilon)$-hilbertien de base $(1+\varepsilon)$-hilbertienne $(e_1, \ldots, e_d)$ et tel que, pour tout espace de Banach F de dimension $f(d)$, on ait :

$$\forall (u_{k,\ell})_{1\le k,\ell\le d} \in O(d),\ \forall (x'_1, \ldots, x'_d) \in F'^d;$$
$$\Big\|\sum_{1\le k,\ell\le d} u_{k,\ell}x'_\ell \otimes e_k\Big\|_{F'\widehat{\otimes}E} \le (1+\varepsilon)\Big\|\sum_{k=1}^{d} x'_k \otimes e_k\Big\|_{F'\widehat{\otimes}E}.$$

On note $\Pi_2(E, E)$ l'espace de Banach des opérateurs 2-sommants de l'espace de Banach E (pour une définition précise, voir [PIE]).

Exemple d'application. On retrouve que tout espace de Banach E avec la P.A.U. est tel que :

$$L(E, E) \supsetneq \mathbf{R}\,\mathrm{id}_E + \Pi_2(E, E) \supset \mathbf{R}\,\mathrm{id}_E + N(E, E).$$

D é m o n s t r a t i o n. Raisonnons par l'absurde et supposons que $L(E, E) = \mathbf{R}\,\mathrm{id}_E + \Pi_2(E, E)$. Alors il existe un réel C strictement positif tel que :

$$\forall \overline{u} \in L(E, E),\ \exists a \in \mathbf{R},\ \exists \overline{v} \in \Pi_2(E, E)$$
$$\overline{u} = a\,\mathrm{id}_E + \overline{v},\quad |a| + \pi_2(\overline{v}) \le C\|\overline{u}\|.$$

Ainsi, d'après le théorème précédent, on sait que, pour tout d de $\mathbf{N}^*$ et tout u_d de $L(H_d, H_d)$, il existe a_d réel et v_d dans $\Pi_2(H_d, H_d)$ tels que :

$$u_d = a_d \operatorname{id}_{H_d} + v_d, \quad |a_d| + \pi_2(v_d) \leq C\lambda(H_d, E)\|u_d\|,$$

où v_d est la restriction à H_d de l'opérateur $\overline{v}_d$ associé à l'extension $\overline{u}_d$ de u_d à E. Alors, en prenant pour u_d l'opérateur qui correspond à la projection orthogonale de ℓ^2_d sur $\ell^2_{[d/2]}$, on trouve une contradiction.

5. Equivalence des notions de pseudocomplémentation et de complémentation pour certains sous-espaces de L^p et ℓ^p, avec p dans $[1, +\infty[$. Applications. Par [L-R], tout sous-espace fermé de L^p, avec p dans $]1, +\infty[$ (resp. de L^1) complémenté dans L^p (resp. dans L^1) est ou bien hilbertien, ou bien un espace $\mathcal{L}^p$ (resp. un espace $\mathcal{L}^1$ complémenté dans son bidual). Par ailleurs, par [L-T 1], tout sous-espace fermé de dimension infinie de ℓ^p, avec p dans $[1, +\infty[$, complémenté dans ℓ^p, est isomorphe à ℓ^p. Le §5.1 a pour but d'établir que, réciproquement, assez souvent, lorsque le sous-espace est pseudocomplémenté, il est complémenté.

5.1. *Exemples de classes d'isomorphisme d'espaces pseudocomplémentés qui sont complémentés.* Rappelons au préalable les deux définitions suivantes.

Un espace de Banach E est dit *localement π-euclidien* si et seulement si il existe Λ dans $\mathbf{R}^*_+$ tel que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, il existe N dans $\mathbf{N}^*$, tel que tout sous-espace Y de E de dimension N contienne un sous-espace 2-hilbertien de dimension n de E, Λ-complémenté dans E. En particulier, $L^p(\mathbf{C})$ et ℓ^p, avec p dans $]1, +\infty[$, sont localement π-euclidiens. Pour plus de précisions, voir [PIS 3].

Un espace de Banach E est un *espace $\mathcal{L}^p$*, avec p dans $[1, +\infty]$, si et seulement si il existe D dans $]1, +\infty[$ tel que, pour tout sous-espace de dimension finie E_1 de E, il existe un sous-espace E_2 de dimension finie de E contenant E_1 et D-isomorphe à $\ell^p_{\dim(E_2)}$. En particulier, $L^p(m)$ est un espace $\mathcal{L}^p$. Voir aussi [L-R].

Le théorème suivant précise les équivalences annoncées.

THÉORÈME. *Si le sous-espace fermé Z de l'espace de Banach E est pseudocomplémenté dans E, il est complémenté dans E dans chacun des cas suivants :*

(a) *Z est un sous-espace hilbertien d'un espace E localement π-euclidien.*

(b) *Z est un espace $\mathcal{L}^p$ (complémenté dans son bidual si $p = 1$) dans $E = L^p$, avec p dans $[1, +\infty[$ distinct de 2.*

(c) *Z est un sous-espace isomorphe à ℓ^p de $E = \ell^p$, avec p dans $[1, +\infty[$.*

Démonstration. On peut supposer Z de dimension infinie. L'idée consiste à écrire Z comme fermeture d'une réunion d'une suite croissante $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de sous-espaces fermés uniformément complémentée dans Z et uniformément isomorphe à une suite $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de sous-espaces fermés de Z uniformément complémentée dans E.

En effet, le diagramme commutatif suivant prouve que, par pseudocomplémentation de Z dans E, la suite $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est en fait uniformément complémentée dans E. Puis, Z, complémenté dans son bidual, le sera dans E.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "\overline{u}_n"] \arrow[dd, bend right, "R_n"'] & & E \arrow[dd, bend left, "Q_n"] \\
Z \arrow[u, "i"] \arrow[rr, "u_n = j_n \circ T_n \circ P_n"] \arrow[d, shift left, "P_n"] & & Z \arrow[u, "i"'] \\
Z_n \arrow[u, shift left, "i_n"] \arrow[rr, shift left, "T_n"] & & Y_n \arrow[u, "j_n"'] \arrow[ll, shift left, "T_n^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Dans le diagramme précédent, i_n, j_n et i sont les injections canoniques, P_n et Q_n des projections et T_n un isomorphisme d'inverse T_n^{-1} tels que P_n, Q_n, T_n, T_n^{-1} soient de normes majorées indépendamment de n. $\overline{u}_n$ est l'extension de l'opérateur $u_n = j_n \circ T_n \circ P_n$ à E et $R_n = T_n^{-1} \circ Q_n \circ \overline{u}_n$ est une projection de E sur Z_n de norme majorée indépendamment de n.

Dans les cas cités, il existe une telle suite $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ uniformément isomorphe à la suite $(\ell^2_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ dans le cas (a) (car Z est un sous-espace hilbertien de E) et à la suite $(\ell^p_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ dans les cas (b) et (c) (voir [L-R]).

Par ailleurs, il existe une suite $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de sous-espaces de Z uniformément complémentée dans E et uniformément isomorphe dans le cas :

(a) à la suite $(\ell^2_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ car E est localement π-euclidien,

(b) à la suite $(\ell^p_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ car Z contient un sous-espace isomorphe à ℓ^p et complémenté dans E (voir [PIS 2] et [PIS 4] pour p dans $]1, 2[$ et [L-T 3] pour p dans $]2, +\infty[$),

(c) à la suite $(\ell^p_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ car Z contient un sous-espace isomorphe à ℓ^p et complémenté dans E (voir [L-T 1]).

Donc, dans les trois cas cités, la suite $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est bien uniformément isomorphe à la suite $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ exhibée précédemment.

Remarque. L'exemple du sous-espace G de L^1 vu au §3.1 prouve que le (a) du théorème précédent ne s'étend pas au cas de L^1.

5.2. *Cas des sous-espaces hilbertiens de $L^p(\mathbf{C})$ pour p dans $]1, +\infty[$*

5.2.1. *Cas général.* Par le théorème du §5.1, les propriétés de complémentation et de pseudocomplémentation des sous-espaces hilbertiens de $L^p(\mathbf{C})$, avec p dans $]1, +\infty[$, deviennent équivalentes. Toutefois, pour p dans $[2, +\infty[$, tous les sous-espaces hilbertiens de $L^p(\mathbf{C})$ sont déjà complémentés dans $L^p(\mathbf{C})$ (voir, par exemple, [L-T 3]). En revanche, pour p dans $]1,2[$, il existe un sous-espace hilbertien Z_p de $L^p(\mathbf{C})$ non complémenté dans $L^p(\mathbf{C})$ (voir [B-D-G-J-N]). Par le théorème du §5.1, Z_p n'est pas non plus pseudocomplémenté dans $L^p(\mathbf{C})$. Au paragraphe suivant, nous verrons d'autres exemples de cette situation. Signalons pour terminer que, pour tout p de $]1,+\infty[$, le sous-espace hilbertien G_p (resp. R_p) de $L^p(\mathbf{C})$ engendré par une suite de variables indépendantes réelles gaussiennes standards (resp. par la suite des variables de Rademacher) est complémenté dans $L^p(\mathbf{C})$.

5.2.2. *Etude de la pseudocomplémentation des sous-espaces hilbertiens invariants par translation de $L^p(\mathbf{C})$, pour p dans $]1,+\infty[$.* Rappelons au préalable quelques notations et résultats usuels d'analyse harmonique (voir, par exemple, [L-T 3]).

Si S est une partie de $\mathbf{Z}$, L^p_S est le sous-espace fermé de $L^p(\mathbf{C})$ engendré par les fonctions complexes $\exp(2\pi int)$, avec n dans S. Rappelons que les sous-espaces invariants par translation de $L^p(\mathbf{C})$ sont les sous-espaces L^p_S, où S est une partie de $\mathbf{Z}$. Une partie S de $\mathbf{Z}$ est un *ensemble* $\Lambda(p)$, pour p dans $]1,+\infty[$, lorsque, sur L^p_S, la norme induite par $L^p(\mathbf{C})$ et notée $\|\ \|_p$ est équivalente à la norme induite par $L^r(\mathbf{C})$ et notée $\|\ \|_r$ pour un r de $[1,p[$. En fait, si S est un ensemble $\Lambda(p)$, les normes $\|\ \|_p$ et $\|\ \|_r$ sont équivalentes pour tout r de $[1,p]$ sur L^p_S.

Ainsi, pour tout p de $]1,+\infty[$ distinct de 2, les sous-espaces hilbertiens de $L^p(\mathbf{C})$ invariants par translation sont les sous-espaces L^p_S, où S est un ensemble $\Lambda(\max(2,p))$. De plus, on démontre facilement que, pour p dans $]1,2[$, L^p_S est un sous-espace hilbertien complémenté dans $L^p(\mathbf{C})$ si et seulement si S est un ensemble $\Lambda(p')$, où $1/p+1/p'=1$. Avec le théorème du §5.1, il en résulte la caractérisation suivante.

COROLLAIRE 1. *Pour tout p de $]1,+\infty[$ distinct de 2, les sous-espaces hilbertiens de $L^p(\mathbf{C})$ invariants par translation et pseudocomplémentés dans $L^p(\mathbf{C})$ sont les sous-espaces L^p_S, où S est un ensemble $\Lambda(\max(p,p'))$, avec la relation $1/p+1/p'=1$.*

Dans [BOU 2], J. Bourgain prouve, pour tout p'_0 de $]2,+\infty[$, l'existence d'une partie S'_0 de $\mathbf{Z}$ qui soit un ensemble $\Lambda(p'_0)$ mais qui ne soit pas un ensemble $\Lambda(p')$ pour tout p' de $]p'_0,+\infty[$. Ainsi, pour p dans $]1,p_0[$, avec $1/p_0+1/p'_0=1$, $L^p_{S'_0}$ est un sous-espace hilbertien de $L^p(\mathbf{C})$ non complémenté dans $L^p(\mathbf{C})$. D'après le théorème du §5.1, $L^p_{S'_0}$ n'est pas non plus pseudocomplémenté dans $L^p(\mathbf{C})$. Il en résulte le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2. *Pour tout p de $]1,2[$, il existe un sous-espace hilbertien de $L^p(\mathbf{C})$ invariant par translation qui n'est pas pseudocomplémenté dans $L^p(\mathbf{C})$.*

Tous ces résultats s'étendent au cas général des espaces $L^p(\mathbf{C})$ de fonctions complexes définies sur un groupe abélien compact (voir [ROS 1] et [BOU 2]).

5.3. *Cas des sous-espaces de L^p et ℓ^p isomorphes à ℓ^p pour p dans $[1,+\infty[-\{2\}$.* D'une part, par [D-S], pour tout p de $[1,+\infty[$, tout sous-espace de L^p isomorphe à ℓ^p et engendré par une suite de variables aléatoires indépendantes est complémenté dans L^p. En revanche, il existe, pour p dans $[1,+\infty[$ distinct de 2, un sous-espace Z_p de L^p isomorphe à ℓ^p et non complémenté dans L^p (pour $p=1$, voir [BOU 1], pour p dans $]1,2[$, voir [B-D-G-J-N], pour p dans $]2,+\infty[$, voir [ROS 2]). Par le théorème du §5.1, Z_p n'est pas non plus pseudocomplémenté dans L^p.

D'autre part, par [PEL], pour tout p de $[1,+\infty[$, tout sous-espace de ℓ^p isométrique à ℓ^p est complémenté dans ℓ^p. En revanche, il existe, pour p dans $[1,+\infty[$ distinct de 2, un sous-espace Z_p de ℓ^p isomorphe à ℓ^p et non complémenté dans ℓ^p (pour $p=1$, voir [BOU 1], pour p dans $]1,2[$, voir [B-D-G-J-N], pour p dans $]2,+\infty[$ voir [ROS 2]). Par le théorème du §5.1, Z_p n'est pas non plus pseudocomplémenté dans ℓ^p.

Terminons cette partie en signalant sur ce sujet le problème ouvert suivant : existe-t-il un sous-espace fermé Z_p de L^p (resp. de ℓ^p), pour p dans $]1,+\infty[$ (resp. dans $[1,+\infty[$) et distinct de 2, pseudocomplémenté dans L^p (resp. dans ℓ^p) et non complémenté dans L^p (resp. ℓ^p)?

6. Etude des espaces de Banach E dont tous les sous-espaces sont pseudocomplémentés dans E. Si E est un espace de Banach, on peut considérer les deux propriétés de complémentation suivantes :

(P'_1) Tous les sous-espaces de E sont complémentés dans E.
(P'_2) Il existe un réel Λ strictement positif tel que tout sous-espace de dimension finie Z de E soit Λ-complémenté dans E.

Rappelons, dans le théorème suivant, les résultats connus sur ce sujet (voir [D-D-S] et [L-T 1]).

THÉORÈME. *Tout espace de Banach E qui vérifie* (P'_1) *vérifie* (P'_2), *et tout espace de Banach E qui vérifie* (P'_2) *est isomorphe à un espace de Hilbert. Les propriétés* (P'_1) *et* (P'_2) *sont donc équivalentes et caractérisent les espaces de Banach isomorphes à un espace de Hilbert.*

Le but de ce paragraphe est l'étude des deux propriétés suivantes de pseudocomplémentation dans l'espace de Banach E.

(P_1) Tous les sous-espaces de E sont pseudocomplémentés dans E.
(P_2) Il existe un réel λ strictement positif tel que tout sous-espace de dimension finie Z de E ait une constante de pseudocomplémentation dans E inférieure à λ.

Remarquons que les espaces de Banach isomorphes à un espace de Hilbert ou à un espace de type P_λ, avec λ dans $[1,+\infty[$ (voir [L-T 3] pour une définition), vérifient (P_1) et (P_2).

6.1. *Comparaison des propriétés* (P_1) *et* (P_2). Nous commençons par établir deux résultats techniques pour un espace de Banach E.

LEMME 1 (voir [DAY]). *A tout sous-espace Z de dimension infinie de E et à tout t de $\mathbf{R}_+^*$, on peut associer un sous-espace Y de E de codimension finie tel que :*

(i) $Y\cap Z=(0)$.

(ii) *l'application P de $Z\oplus Y$ dans $Z\oplus Y$ définie par $P(x+y)=x$, $\forall(x,y)\in Z\times Y$, soit une projection de norme inférieure à $1+t$.*

LEMME 2. *Si Y est un sous-espace de E de codimension finie tel qu'il existe un réel λ_Y strictement positif tel que tout sous-espace F de dimension finie de Y ait une constante de pseudocomplémentation dans Y inférieure à λ_Y, alors E a la propriété* (P_2).

Démonstration. Nous pouvons clairement supposer Y de codimension finie N, avec N dans $\mathbf{N}^*$. Alors, si Y_1 est un supplémentaire topologique de Y dans E et si Q_1 est une projection de E sur Y_1 de norme inférieure à $\sqrt{N}$, $Q=\mathrm{id}_E-Q_1$ est une projection de E sur Y de norme inférieure à $1+\sqrt{N}$.

Fixons un sous-espace Z de E de dimension finie. Comme Z est contenu dans $Q(Z)\oplus Q_1(E)$, on a :

$$\begin{aligned}\dim((Q(Z)\oplus Q_1(E))/Z)&=\dim(Q(Z))+\dim(Q_1(E))-\dim(Z)\\&\le\dim(Q_1(E))=N\,.\end{aligned}$$

Ainsi Z est $(1+\sqrt{N})$-complémenté dans $Q(Z)\oplus Q_1(E)$.

Etudions maintenant la pseudocomplémentation de $Q(Z)\oplus Q_1(E)$ dans E. Considérons pour cela un opérateur u de $Q(Z)\oplus Q_1(E)$. D'une part, si $u|_{Q(Z)}$ est la restriction de u à $Q(Z)$, on a :

$$u|_{Q(Z)}=Q\circ u|_{Q(Z)}+Q_1\circ u|_{Q(Z)}\,.$$

Or $Q\circ u|_{Q(Z)}$ est un opérateur de $Q(Z)$ qui s'étend en un opérateur v de Y de norme inférieure à $\lambda_Y\|Q\circ u|_{Q(Z)}\|$. Puis, $Q_1\circ u|_{Q(Z)}$ est un opérateur de $Q(Z)$ dans $Q_1(E)$ qui se prolonge en un opérateur w de Y dans $Q_1(E)$ de norme inférieure à $d(Q_1(E),\ell_N^\infty)\|Q_1\circ u|_{Q(Z)}\|$ d'après la propriété d'extension métrique de ℓ_N^∞. Ainsi, $u_1=(v+w)\circ Q$ étend $v+w$ à E, comme l'indique le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u_1=(v+w)\circ Q"] \arrow[d, shift left, "Q"] & E \\ Y \arrow[u, shift left, "i"] \arrow[r, "v+w"] & Y\oplus Q_1(E) \arrow[u, "i"'] \\ Q(Z) \arrow[u, "i"] \arrow[r, "u|_{Q(Z)}"] & Q(Z)\oplus Q_1(E) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

où toutes les applications notées i sont des injections canoniques. D'autre part, $u_2=u|_{Q_1(E)}\circ Q_1$ étend à E la restriction $u|_{Q_1(E)}$ de u à $Q_1(E)$. Finalement, on vérifie facilement que $\overline{u}=u_1+u_2$ étend u à E. Or on a :

$$\begin{aligned}\|\overline{u}\|&\le\|u_1\|+\|u_2\|\\&\le(\sqrt{N}+1)(\lambda_Y\|Q\circ u|_{Q(Z)}\|+N\|Q_1\circ u|_{Q(Z)}\|)+\sqrt{N}\|u\|\\&\le((\sqrt{N}+1)(\lambda_Y(\sqrt{N}+1)+N\sqrt{N})+\sqrt{N})\|u\|\,,\end{aligned}$$

de sorte que E vérifie bien la propriété (P_2) avec pour constante λ le réel

$$\lambda=(1+\sqrt{N})((\sqrt{N}+1)(\lambda_Y(\sqrt{N}+1)+N\sqrt{N})+\sqrt{N})\,.$$

THÉORÈME 1. *Si E a la propriété (P_1) alors E a la propriété (P_2).*

Démonstration. Le cas où E est de dimension finie étant évident, nous supposerons E de dimension infinie. Raisonnons alors par l'absurde et supposons que :

(H) $\quad\forall\lambda>0\ \exists Z\subset E$, Z sous-espace vectoriel de dimension finie,

$$\lambda(Z,E)>\lambda\,.$$

Fixons M dans $]1,+\infty[$ et $(t_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ une suite de réels de $\mathbf{R}_+^*$ telle que le produit infini $\prod_{k=1}^{\infty}(1+t_k)$ converge et soit de valeur inférieure à M.

Prouvons par récurrence l'existence d'une suite $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de sous-espaces de dimension finie de E tels que :

$$(*)\qquad \forall n\in\mathbf{N}^*,\quad \lambda(Z_n,E)>n\,,$$

$$(**)\qquad \forall n\ge2,\ \forall(x_1,\ldots,x_n)\in Z_1\times\ldots\times Z_n,\ \forall k\in\{2,\ldots,n\},$$
$$\|x_1+\ldots+x_{k-1}\|\le(1+t_k)\|x_1+\ldots+x_k\|\,.$$

Par l'hypothèse (H), il existe un sous-espace Z_1 de E de dimension finie tel que $\lambda(Z_1,E)$ soit strictement supérieur à 1.

Supposons l'existence, pour un entier n supérieur à 2, de sous-espaces notés $Z_1,\ldots,Z_n$ convenables et construisons Z_{n+1}.

Si Z est l'espace vectoriel engendré par $Z_1,\ldots,Z_n$, $(**)$ donne :

$$\forall k\in\{2,\ldots,n\},\qquad Z_k\cap\sum_{i=1}^{k-1}Z_i=(0)\,,$$

de sorte que $Z = Z_1 \oplus \ldots \oplus Z_n$.

Par le lemme 1, il existe alors un sous-espace Y de codimension finie N tel que $Y \cap Z = (0)$ et l'application P de $Z \oplus Y$ dans $Z \oplus Y$ définie par $P(x+y) = x$, pour tout (x,y) de $Z \times Y$, soit une projection de norme inférieure à $1 + t_{n+1}$ de $Z \oplus Y$ sur Z.

Avec (H), le lemme 2 prouve alors l'existence d'un sous-espace Z_{n+1} de Y de dimension finie tel que $\lambda(Z_{n+1}, Y)$ soit strictement supérieure à $(1+\sqrt{N})(n+1)$. Comme Y est $(1+\sqrt{N})$-complémenté dans E, on obtient

$$\lambda(Z_{n+1}, E) > n+1\,.$$

Considérons maintenant l'espace vectoriel Z engendré par tous les sous-espaces Z_n, avec n dans $\mathbb{N}^*$, ainsi construits. Par (**), on a alors :

$$\begin{aligned}
&\forall (n,N) \in \mathbb{N}^{*2}, n \geq 2, N > n,\ \forall (x_1, \ldots, x_N) \in Z_1 \times \ldots \times Z_N\,,\\
&\qquad \|x_1\| \leq \prod_{i=1}^{N} (1+t_i)\|x_1 + \ldots + x_N\| \leq 2M\|x_1 + \ldots + x_N\|\,,\\
&\qquad \|x_n\| \leq \|x_1 + \ldots + x_{n-1}\| + \|x_1 + \ldots + x_n\|\\
&\qquad\qquad \leq \prod_{i=1}^{N}(1+t_i)\|x_1 + \ldots + x_N\| + \prod_{i=n+1}^{N}(1+t_i)\|x_1 + \ldots + x_N\|\\
&\qquad\qquad \leq 2M\|x_1 + \ldots + x_N\|\,.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\forall (n,N) \in \mathbb{N}^{*2}, N > n,\ \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \bigotimes_{i=1}^{\infty} Z_i, \quad \|x_n\| \leq 2M\|x_1 + \ldots + x_N\|\,.$$

Par ailleurs, toujours par (**), on a :

$$\forall n \geq 2, \quad Z_n \cap \sum_{i=1}^{n-1} Z_i = (0)\,.$$

Ainsi, les éléments de Z s'écrivent de manière unique comme sommes d'éléments de chaque Z_n dont seul un nombre fini sont non nuls. Alors, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'application P_n de Z dans Z telle que :

$$\forall (n,N) \in \mathbb{N}^{*2},\ N > n,\ \forall (x_1, \ldots, x_N) \in Z_1 \times \ldots \times Z_N\,, \qquad P_n(x_1 + \ldots + x_N) = x_n\,,$$

définit une projection de Z sur Z_n de norme inférieure à $2M$. Par transitivité et la propriété (P_1), on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n < \lambda(Z_n, E) \leq 2M\lambda(Z, E) < \infty\,,$$

ce qui est manifestement absurde.

Avant de tenter une réciproque du théorème 1, rappelons qu'un espace de Banach E de dimension infinie a la *propriété d'approximation bornée* (en abrégé P.A.B.) si et seulement si il existe un réel M strictement positif tel que, pour tout sous-espace Z de dimension finie de E, il existe un opérateur de E étendant l'identité de Z, de rang fini et de norme inférieure à M.

THÉORÈME 2. *Si E est un espace de Banach complémenté dans son bidual qui a la propriété* (P_2) *alors tous les sous-espaces de E avec la P.A.B. sont pseudocomplémentés dans E.*

Démonstration. Pour simplifier, nous supposerons que Z est un sous-espace séparable de E avec la P.A.B. Alors Z est la fermeture de la réunion d'une suite croissante $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de sous-espaces de dimension finie. Comme Z a la P.A.B., il existe un réel M strictement positif tel que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un opérateur T_n de Z de rang fini et de norme inférieure à M dont la restriction à Z_n soit l'identité. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, notons Y_n le sous-espace image de T_n contenant Z_n. Par hypothèse sur E, la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est uniformément pseudocomplémentée dans E. Considérons alors le diagramme commutatif suivant, dans lequel i_n, j_n, i sont les injections canoniques, u un opérateur de Z et $\overline{v}_n$ une extension de $v_n = T_n \circ u \circ j_n$ à E.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rrr, "\overline{v}_n"] & & & E \\
& E & E & \\
& Z \arrow[u, "i"] \arrow[r, "u"] & Z \arrow[u, "i"] \arrow[dr, "T_n"] & \\
Y_n \arrow[uuu, "i_n"] \arrow[ur, "j_n"] \arrow[rrr, "v_n = T_n \circ u \circ j_n"'] & & & Y_n \arrow[uuu, "i_n"']
\end{tikzcd}$$

Pour tout x de E, la suite bornée $(\overline{v}_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans E'' pour la topologie préfaible $\sigma(E'', E')$, selon tout ultrafiltre plus fin que le filtre de Fréchet sur $\mathbb{N}^*$, vers un vecteur $\overline{v}(x)$ de E''. On définit ainsi un opérateur $\overline{v}$ de E dans E'' et, si Q est une projection de E'' sur E, on vérifie facilement que $\overline{u} = Q \circ \overline{v}$ est un opérateur de E qui étend u.

APPLICATION. Les théorèmes 1 et 2 prouvent que, pour tout espace de Banach (séparable) E complémenté dans son bidual et avec la P.A.B., les propriétés (P_1) et (P_2) sont équivalentes. Ceci s'applique en particulier aux espaces L^p et ℓ^p, avec p dans $[1, +\infty[-\{2\}$, pour lesquels les §3 et 5 ont prouvé l'existence de sous-espaces non pseudocomplémentés. Ces espaces ne vérifient donc ni (P_1) ni (P_2).

6.2. *Type d'un espace de Banach localement π-euclidien qui vérifie* (P_2). Rappelons pour commencer qu'un espace de Banach E est de *type* p, avec p dans $[1,2]$, si et seulement si il existe un réel T_p de $[1, +\infty[$ tel que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$ et tous vecteurs $x_1, \dots, x_n$ de E, on ait :

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \Big\|_{L^2(E)} \le T_p \Big(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \Big)^{1/p}.$$

Convenons de noter p_E la borne supérieure, non nécessairement atteinte, des p tels que E soit de type p. Rappelons enfin que les espaces localement π-euclidiens sont les espaces E pour lesquels p_E est distinct de 1 (voir [PIS 3]).

Théorème 3. *Si E est un espace de Banach qui a la propriété* (P_2) *et tel que p_E soit distinct de* 1, *alors p_E vaut* 2.

Pour parvenir à ce résultat, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 3. *Dans tout espace de Banach E tel que p_E soit distinct de* 1, *il existe une suite $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de sous-espaces tels que* :

$$\forall t \in]0, p_E - 1[,\ \exists C(t) > 0,\ \forall n \in \mathbf{N}^*,$$
$$d(Z_n, \ell_n^{p_E - t}) \le C(t)(1 + \ln(n)), \quad \Lambda(Z_n, E) \le C(t)(1 + \ln(n)).$$

Démonstration. D'après [Mau-P], avec $p = p_E$, il existe une suite $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de sous-espaces tels que :

$$\exists C > 0,\ \forall t \in]0, p - 1[,\ \forall n \in \mathbf{N}^*,$$
$$d(Z_n, \ell_n^{p-t}) \le C n^{1/(p-t) - 1/t}, \quad \Lambda(Z_n, E) \le C n^{1/q - 1/q_t},$$

où $1/p + 1/q = 1$ et $1/(p-t) + 1/q_t = 1$, de sorte que le résultat annoncé résulte des équivalences suivantes, valables pour tout entier n supérieur à 2 :

$$n^{1/(p-t) - 1/p} \sim \ln(n) \cdot (t/p^2), \quad n^{1/q - 1/q_t} \sim \ln(n) \cdot (t/p^2),$$

lorsque $t \to 0^+$.

Démonstration du théorème 3. Considérons la suite $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de sous-espaces de E donnée par le lemme 3 et fixons (n,t) dans $\mathbf{N}^* \times \mathbf{R}_+^*$. Posons $p_E = p$ et notons $i_{n,t}$ l'identité de ℓ_n^1 dans ℓ_n^{p-t} et $T_{n,t}$ un isomorphisme de ℓ_n^{p-t} sur Z_n tel que $\|T_{n,t}\|$ et $\|T_{n,t}^{-1}\|$ soient inférieures à $C(t)^{1/2}(1+\ln(n))^{1/2}$.

D'après le théorème de Dvoretzky pour les espaces de cotype 2 (voir, par exemple, [F-L-M]), il existe un réel a strictement positif tel que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, il existe un sous-espace H_n 2-hilbertien de ℓ_n^1 de dimension $[an]$.

D'après la propriété (P_2), il existe un réel λ strictement positif tel que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$ et tout t de $]0, p-1[$, le sous-espace $Z_{n,t} = T_{n,t} \circ i_{n,t}(H_n)$ de Z_n vérifie :

$$\lambda(Z_{n,t}, E) \le \lambda.$$

Or Z_n est $C(t)(1+\ln(n))$-complémenté dans E, de sorte que :

$$\lambda(Z_{n,t}, Z_n) \le \lambda C(t)(1 + \ln(n)),$$

d'où, par isomorphisme,

$$\lambda(i_{n,t}(H_n), \ell_n^{p-t}) \le \lambda C(t)(1+\ln(n)) d(Z_n, \ell_n^{p-t})^2.$$

Comme H_n est un sous-espace 2-hilbertien de ℓ_n^1, H_n est $\sqrt{2}$-isomorphe à $i_{n,t}(H_n)$, de sorte que :

$$\lambda(H_n, \ell_n^1) \le \sqrt{2} d(\ell_n^1, \ell_n^{p-t}) \lambda(i_{n,t}(H_n), \ell_n^{p-t}).$$

Par le théorème 3 bis du §3.3, il existe un réel C strictement positif tel que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$ et tout t de $\mathbf{R}_+^*$, on ait :

$$[an] \le C\lambda^2 C(t)^6 (1+\ln(n))^7 n^{2 - 2/(p-t)}.$$

Cette dernière inégalité, vraie pour tout n de $\mathbf{N}^*$, impose que le réel $2 - 2/(p-t)$ soit supérieur à 1 pour tout t strictement positif et strictement inférieur à $p-1$, de sorte que, finalement, p vaut 2.

Bibliographie

[B-D-G-J-N] G. Bennett, L. E. Dor, V. Goodman, W. B. Johnson, and C. M. Newman, *On uncomplemented subspaces of L_p, $1 < p < 2$*, Israel. J. Math. 26 (1977), 178–187.

[BOU 1] J. Bourgain, *New Classes of $\mathcal{L}^p$-Spaces*, Lecture Notes in Math. 889, Springer, 1981.

[BOU 2] —, *Bounded orthogonal systems and the $\Lambda(p)$-set problem*, Acta Math. 162 (1989), 227–245.

[D-D-S] W. J. Davis, D. W. Dean and I. Singer, *Complemented subspaces and Λ-systems in Banach spaces*, Israel J. Math. 6 (1968), 303–309.

[DAY] M. M. Day, *On the basis problem in normed spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 655–658.

[DOR] L. E. Dor, *On projections in L_1*, Ann. of Math. 102 (1975), 463–474.

[D-S] L. E. Dor and T. Starbird, *Projections of L_p onto subspaces spanned by independent random variables*, Compositio Math. 39 (2) (1979), 141–175.

[DUR] P. L. Duren, *Theory of H^p Spaces*, Academic Press, New York 1970.

[DVO] A. Dvoretzky, *Some results on convex bodies and Banach spaces*, in : Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces, Jerusalem 1960, Israel Acad. Sci. Humanities, Jerusalem 1961, 123–160.

[FIG] T. Figiel, *The exponential estimate for local structure of gaussian subspaces of L^p*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 36 (3-4) (1988), 133–141.

[F-J-S] T. Figiel, W. B. Johnson and G. Schechtman, *Factorization of natural embeddings of l_p^n into L_r, I*, Studia Math. 89 (1988), 79–103.

[F-L-M] T. Figiel, J. Lindenstrauss and V. Milman, *The dimensions of almost spherical sections of convex bodies*, Acta Math. 139 (1977), 53–94.

[HOF] K. Hoffman, *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.

[LEVY] M. Levy, *Prolongement d'un opérateur d'un sous-espace de $L^1(\mu)$ dans $L^1(\nu)$*, Séminaire Maurey-Schwartz, 1979–80, exposé 5, Ecole Polytechnique, Paris.

[L-R] J. Lindenstrauss and H. P. Rosenthal, *The $\mathcal{L}^p$-spaces*, Israel J. Math. 7 (1969), 325–349.

[Ló-R] J. López and K. Ross, *Sidon Sets*, Dekker, New York 1975.

[L-T 1 et 2] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces, I : Sequence Spaces, II : Function Spaces*, Springer, Berlin 1977, 1979.

[L-T 3] —, —, *Classical Banach Spaces*, Lecture Notes in Math. 338, Springer, 1973.

[L-T 4] —, —, *On the complemented subspace problem*, Israel J. Math. 9 (1971), 263–269.

[Mar-P] M. B. Marcus and G. Pisier, *Random Fourier Series with Applications to Harmonic Analysis*, Ann. of Math. Stud. 101, Princeton Univ. Press, 1981.

[Mau-P] B. Maurey et G. Pisier, *Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach*, Studia Math. 58 (1976), 45–90.

[PEŁ] A. Pełczyński, *Projections in certain Banach spaces*, ibid. 19 (1960), 209–228.

[PIE] A. Pietsch, *Operator Ideals*, North-Holland, 1978.

[PIS 1] G. Pisier, *Factorization of Linear Operators and Geometry of Banach Spaces*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. 60, Amer. Math. Soc., 1986.

[PIS 2] —, *Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces*, in: Probability and Analysis, C.I.M.E. Varenna 1985, Lecture Notes in Math. 1206, Springer, 1986, 167–241.

[PIS 3] —, *Holomorphic semi-groups and the geometry of Banach spaces*, Ann. of Math. 115 (1982), 375–392.

[PIS 4] —, *Bases, suites lacunaires dans les espaces L^r d'après Kadec–Pełczyński*, Séminaire Maurey–Schwartz, 1972–73, exposé 18, Ecole Polytechnique, Paris.

[PIS 5] —, *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Cambridge Univ. Press, 1989.

[PIS 6] —, *Les inégalités de Khintchine–Kahane d'après C. Borell*, Séminaire sur la géométrie des espaces de Banach, 1977–78, n° 7, Ecole Polytechnique, Palaiseau.

[ROS 1] H. P. Rosenthal, *Projections onto translation-invariant subspaces of $L^p(G)$*, Mem. Amer. Math. Soc. 63 (1966).

[ROS 2] —, *On the subspaces of L^p ($p > 2$) spanned by sequences of independent random variables*, Israel J. Math. 8 (1970), 273–303.

[SIM] B. Simon, *The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory*, Princeton Univ. Press, Princeton 1974.

[T-J] N. Tomczak-Jaegermann, *Banach–Mazur Distances and Finite-Dimensional Operator Ideals*, Longman Scientific&Technical, 1989.

ÉQUIPE D'ANALYSE
U.A. N° 754 AU C.N.R.S.
UNIVERSITÉ PARIS VI
TOUR 46, 4ÈME ÉTAGE
4, PLACE JUSSIEU
75 252 PARIS CEDEX 05, FRANCE

Received February 27, 1991 (2784)

STUDIA MATHEMATICA 100 (3) (1991)

Index of Volumes 91–100