Sur les moyennes de la forme $\psi^{-1}[\sum q\psi(x)]$

par

JAN G.-MIKUSIŃSKI (Lublin).

1. Introduction. Les notations que nous allons employer sont les suivantes. Les lettres ψ et χ désigneront partout des fonctions d'une variable réelle x, continues et strictement monotones dans un intervalle donné J qui peut être supposé fini ou infini. Les fonctions inverses seront désignées respectivement par ψ^{-1} et χ^{-1}. La variable x et les valeurs $x_1, \ldots, x_n$ appartiendront toujours à l'intervalle considéré J. Les nombres $q_1, \ldots, q_n$ sont supposés positifs (n est fixe) et $q_1 + \ldots + q_n = 1$.

Cela posé, nous dirons que l'expression

$$M_\psi = M_\psi(x_1, \ldots, x_n; q_1, \ldots, q_n) = \psi^{-1}[q_1\psi(x_1) + \ldots + q_n\psi(x_n)]$$

est la *moyenne de* $x_1, \ldots, x_n$ *relative à la fonction* ψ. En supposant ψ égale à l'une des fonctions x, $\log x$ et $\frac{1}{x}$, on obtient en particulier la moyenne arithmétique, géométrique et harmonique respectivement.

On connaît certaines conditions pour que $M_\psi < M_\chi$ pour toutes les valeurs de $x_1, \ldots, x_n$ et $q_1, \ldots, q_n$, à moins que $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ [1]). Nous en donnons encore quelques-unes qui nous semblent être bien naturelles et simples.

Le sujet de ce travail nous a été suggéré par M. F. Leja.

[1]) Hardy-Littlewood-Pólya, *Inequalities*, Cambridge 1934, Chapter III.

2. Réduction du problème général au cas $n=2$. Il suffit de considérer le problème de deux variables x_1, x_2 et de deux paramètres q_1, q_2. En effet, en admettant l'inégalité $M_\psi < M_\chi$ pour $n = 2, 3, \ldots, p$, il s'en suit qu'il en est de même pour $n = p+1$.

Pour le montrer, posons

$$M_\psi = \psi^{-1}[q_1\psi(x_1) + \ldots + q_{p+1}\psi(x_{p+1})] =$$
$$= \psi^{-1}[q_1\psi(x_1) + \ldots + q_{p-1}\psi(x_{p-1}) + (q_p + q_{p+1})\psi(x'_p)],$$

où $x'_p = \psi^{-1}\left[\frac{q_p}{q_p + q_{p+1}}\psi(x_p) + \frac{q_{p+1}}{q_p + q_{p+1}}\psi(x_{p+1})\right]$. Si la proposition est vraie pour $n = 2, 3, \ldots, p$, on a

$$x'_p < x''_p = \chi^{-1}\left[\frac{q_p}{q_p + q_{p+1}}\psi(x_p) + \frac{q_{p+1}}{q_p + q_{p+1}}\psi(x_{p+1})\right]$$

et, toute moyenne étant une fonction croissante par rapport à chacune de variables, il vient

$$M_\psi < \psi^{-1}[q_1\psi(x_1) + \ldots + q_{p-1}\psi(x_{p-1}) + (q_p + q_{p+1})\psi(q''_p)]$$
$$< \chi^{-1}[q_1\chi(x_1) + \ldots + q_{p-1}\chi(x_{p-1}) + (q_p + q_{p+1})\chi(x''_p)]$$
$$= M_\chi = \chi^{-1}[q_1\chi(x_1) + \ldots + q_{p+1}\chi(x_{p+1})],$$

c. q. f. d.

On peut donc, sans restreindre la généralité du problème, le réduire au cas particulier où $n=2$. C'est ce que nous allons faire dans les considérations qui suivent.

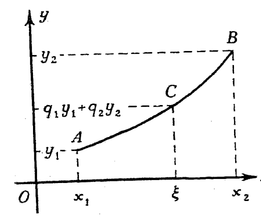

Fig. 1.

3. Interprétation géométrique. Considérons l'arc AB de la courbe $y = \psi(x)$ compris entre les droites $x = x_1$ et $x = x_2$ (fig. 1). En désignant par y_1 et y_2 les ordonnées des points A et B, soit C le point de l'arc d'ordonnée $q_1y_1 + q_2y_2$. L'abscisse ξ du point C est égale à la moyenne des nombres x_1 et x_2 relative à la fonction $\psi(x)$.

4. Une condition nécessaire et suffisante pour que $M_\psi < M_\chi$. On vérifie sans peine à l'aide de la définition que toute fonction de la forme $\alpha\psi(x)+\beta$ donne la même moyenne que $\psi(x)$. En particulier, il en est de même de la fonction

$$\bar{\psi} = \frac{\psi(x)-\psi(x_1)}{\psi(x_2)-\psi(x_1)},$$

normée de manière que $\bar{\psi}(x_1)=0$ et $\bar{\psi}(x_2)=1$.

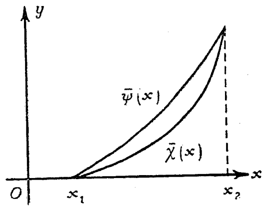

Fig. 2.

Soient $\bar{\psi}(x)$ et $\bar{\chi}(x)$ deux fonctions normées aux points x_1 et x_2. On voit facilement par la figure 2 qu'*une condition nécessaire et suffisante pour que la moyenne $M_\psi(=M_{\bar{\psi}})$ soit inférieure à la moyenne $M_\chi(=M_{\bar{\chi}})$ est que l'arc de la fonction $\bar{\psi}(x)$ compris entre les droites $x=x_1$ et $x=x_2$ soit situé au-dessus de celui de la fonction $\bar{\chi}(x)$.*

5. Une autre forme de la même condition. La condition qui vient d'être énoncée s'exprime analytiquement par l'inégalité $\bar{\chi}(x)<\bar{\psi}(x)$ où $x_1<x<x_2$ ou bien par l'inégalité

$$\frac{\chi(q_1x_1+q_2x_2)-\chi(x_1)}{\chi(x_2)-\chi(x_1)} < \frac{\psi(q_1x_1+q_2x_2)-\psi(x_1)}{\psi(x_2)-\psi(x_1)}$$

où $q_1,q_2>0$ et $q_1+q_2=1$. En y retranchant q_2 des deux membres, il vient après quelques transformations algébriques simples

$$(1)\quad \frac{q_1\psi(x_1)-\psi(q_1x_1+q_2x_2)+q_2\psi(x_2)}{\psi(x_2)-\psi(x_1)} < \frac{q_1\chi(x_1)-\chi(q_1x_1+q_2x_2)+q_2\chi(x_2)}{\chi(x_2)-\chi(x_1)}.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que $M_\psi<M_\chi$ est que l'inégalité (1) *ait lieu pour tous les x_1,x_2 où $x_1 \neq x_2$ et pour tous les q_1,q_2.*

On peut remplacer cette condition par une autre, plus intuitive, en introduisant la notion de *convexité logarithmique.*

6. Convexité logarithmique. Nous dirons que deux fonctions $\psi(x)$ et $\chi(x)$ sont *également convexes en logarithme*, lorsqu'on a pour tout $x_1 \neq x_2$

$$(2)\quad \frac{\Delta^2\psi}{\Delta\psi} = \frac{\Delta^2\chi}{\Delta\chi},$$

où, d'une façon générale,

$$\Delta\varphi = \varphi(x_2)-\varphi(x_1)$$

et

$$\Delta^2\varphi = \frac{1}{2}\varphi(x_1) - \varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{1}{2}\varphi(x_2).$$

Théorème. *Pour que deux fonctions $\psi(x)$ et $\chi(x)$ soient également convexes en logarithme, il faut et il suffit que $\psi(x)=\alpha\chi(x)+\beta$, où α,β sont des nombres et $\alpha \neq 0$.*

La suffisance de cette condition peut être vérifiée sans peine. Pour en démontrer la nécessité, remarquons tout d'abord que, si les deux fonctions $\psi(x)$ et $\chi(x)$ coïncident en deux points x' et x'', l'égalité (2) entraîne leur identité pour tout x entre x' et x''. En effet, on vérifie aussitôt que l'on a dans ce cas

$$\psi\left(\frac{x'+x''}{2}\right) = \chi\left(\frac{x'+x''}{2}\right).$$

Par conséquent $\psi(x)=\chi(x)$ pour tout $x=\dfrac{mx'+nx''}{2}$, où m,n et p sont des nombres naturels, tels que $m+n=2^p$. La continuité de $\psi(x)$ et $\chi(x)$ étant supposée, il s'en suit que $\psi(x)\equiv\chi(x)$ pour tout x entre x' et x''.

En passant à présent au cas général, fixons x' et x'' arbitrairement et choisissons les nombres α et β de manière que l'égalité $\psi(x)=\alpha\chi(x)+\beta$ ait lieu pour les valeurs particulières $x=x'$ et $x=x''$.

Si maintenant les fonctions $\psi(x)$ et $\chi(x)$ sont également convexes en logarithme, il en est de même des fonctions $\psi(x)$ et $\alpha\chi(x)+\beta$. Or, d'après ce qui vient d'être établi, les dernières fonctions sont identiques pour $x' \leqslant x \leqslant x''$, car elles coïncident aux points x' et x''. Ces points ayant été fixés arbitrairement, on en conclut que $\psi(x)=\alpha\chi(x)+\beta$ pour toutes les valeurs de x.

7. Comparaison de la convexité en logarithme. Nous dirons que la fonction $\psi(x)$ est *moins convexe en logarithme que* $\chi(x)$ lorsque

$$\frac{\Delta^2\psi}{\Delta\psi} < \frac{\Delta^2\chi}{\Delta\chi} \tag{3}$$

pour tout couple de valeurs x_1, x_2 où $x_1 \neq x_2$.

Théorème. *Soient $\psi(x)$ et $\chi(x)$ deux fonctions croissantes, la première moins convexe en logarithme que la seconde. Cela posé, si l'inégalité $\chi(x) \leqslant \psi(x)$ est satisfaite aux deux extremités d'un intervalle $x' \leqslant x \leqslant x''$, on a $\chi(x) < \psi(x)$ à l'intérieur de cet intervalle.*

Démonstration. En vertu de la continuité des deux fonctions, il suffit évidemment de montrer que l'inégalité $\chi(x) < \psi(x)$ a lieu au milieu $x = \dfrac{x'+x''}{2}$ de l'intervalle $x' \leqslant x \leqslant x''$.

Posons:

$$\varepsilon' = \psi(x') - \chi(x'), \qquad \varepsilon'' = \psi(x'') - \chi(x''),$$

et

$$\bar\chi(x) = \chi(x) + \varepsilon' \frac{\chi(x) - \chi(x')}{\chi(x'') - \chi(x')} + \varepsilon'' \frac{\chi(x'') - \chi(x)}{\chi(x'') - \chi(x')}. \tag{4}$$

La fonction $\bar\chi(x)$ est évidemment de la forme $\alpha\chi(x) + \beta$ avec $\alpha \neq 0$, elle est donc, en même temps que $\chi(x)$, moins convexe en logarithme que $\psi(x)$, c'est-à-dire que

$$\frac{\frac{1}{2}\psi(x_1) - \psi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{1}{2}\psi(x_2)}{\psi(x_2) - \psi(x_1)} < \frac{\frac{1}{2}\bar\chi(x_1) - \bar\chi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{1}{2}\bar\chi(x_2)}{\bar\chi(x_2) - \bar\chi(x_1)}$$

pour tout couple x_1, x_2 où $x_1 \neq x_2$. En particulier, pour $x_1 = x'$ et $x_2 = x''$, cette inégalité se reduit à

$$\bar\chi\left(\frac{x'+x''}{2}\right) < \psi\left(\frac{x'+x''}{2}\right),$$

car $\bar\chi(x') = \psi(x')$ et $\bar\chi(x'') = \psi(x'')$. On a à plus forte raison

$$\chi\left(\frac{x'+x''}{2}\right) < \psi\left(\frac{x'+x''}{2}\right),$$

car $\chi(x) \leqslant \bar\chi(x)$ pour tout x entre x' et x'', comme on le voit facilement d'après (4).

8. Application à l'inégalité $M_\psi < M_\chi$. Nous allons démontrer maintenant que les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

1° *Les fonctions $\psi(x)$ et $\chi(x)$ satisfont à l'inégalité* (1) *pour tous les x_1, x_2 (où $x_1 \neq x_2$) et pour tous les q_1, q_2;*

2° *La fonction $\psi(x)$ est moins convexe en logarithme que $\chi(x)$.*

On voit que 2° est une conséquence immédiate de 1°.

Admettons, réciproquement, que $\psi(x)$ est moins convexe en logarithme que $\chi(x)$. D'après le théorème du N° 6, il en est de même des fonctions $\bar\psi(x)$ et $\bar\chi(x)$ qui résultent des précédentes en les normant aux points x_1 et x_2. Comme $\bar\psi(x) = \bar\chi(x)$ aux points x_1 et x_2, on a, en vertu du théorème du N° 7, $\bar\chi(x) < \bar\psi(x)$ pour tout x entre x_1 et x_2. Cela conduit, comme nous l'avons vu au N° 5, à l'inégalité (1), c. q. f. d.

Grâce à l'équivalence des propriétés 1° et 2°, nous pouvons énoncer la proposition suivante:

Une condition nécessaire et suffisante pour que $M_\psi < M_\chi$ est que la fonction $\psi(x)$ soit moins convexe en logarithme que $\chi(x)$.

9. Une forme différentielle de la condition. Admettons à présent que, de plus, les fonctions $\psi(x)$ et $\chi(x)$ sont deux fois continuement dérivables et que l'on a $\psi'(x) \neq 0$ et $\chi'(x) \neq 0$ dans l'intervalle considéré.

Cela posé, *une condition nécessaire et suffisante pour que $M_\psi < M_\chi$ est que l'inégalité*

$$\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)} < \frac{\chi''(x)}{\chi'(x)} \tag{5}$$

ait lieu dans un ensemble partout dense [2]).

En effet, lorsque x_1 est fixe et que l'on fait x_2 tendre vers x_1, l'inégalité (3) divisée par $x_2 - x_1$ devient à la limite

$$\frac{\psi''(x_1)}{\psi'(x_1)} \leqslant \frac{\chi''(x_1)}{\chi'(x_1)}.$$

---

[2]) Cette condition a été énoncée indépendamment par M. S. Łojasiewicz (Kraków).

Si l'on avait $\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)} \equiv \frac{\chi''(x)}{\chi'(x)}$ dans un intervalle $x' \leqslant x \leqslant x''$, on aurait par suite $\psi(x) = \alpha\chi(x) + \beta$ et les fonctions $\psi(x)$ et $\chi(x)$ seraient également convexes en logarithme dans cet intervalle. Cela prouve que la condition est nécessaire.

Admettons maintenant que l'inégalité (5) a lieu dans un ensemble partout dense. En intégrant cette inégalité deux fois, il vient

$$\frac{\psi(x)-\psi(x_1)}{\psi'(x_1)} < \frac{\chi(x)-\chi(x_1)}{\chi'(x_1)} \qquad \text{pour } x > x_1.$$

Remarquons que si les dérivées $\psi'(x)$ et $\chi'(x)$ sont positives et l'on a $\psi(x_1) = \chi(x_1)$ et $\psi(x_2) = \chi(x_2)$ où $x_1 < x_2$, alors $\chi'(x_1) < \psi'(x_1)$, ce qui entraîne $\psi(x) < \chi(x)$ au voisinage gauche de x_1 et $\chi(x) < \psi(x)$ au voisinage droit de ce point. Cette remarque nous sera utile tout à l'heure.

Fixons arbitrairement deux points x_1, x_2 (où $x_1 < x_2$) et désignons par $\bar\psi(x)$ et $\bar\chi(x)$ les fonctions correspondantes, normées dans ces points (voir N° 4). Il suffit de montrer que

$$\bar\chi(x) < \bar\psi(x) \tag{6}$$

entre x_1 et x_2. Or, d'après la remarque que nous venons de faire, cette inégalité est vraie au voisinage droit de x_1. Désignons par (x_1, x_1') le plus grand intervalle, où l'inégalité (6) est encore satisfaite. En vertu de la continuité des fonctions considérées on a $(\bar\chi x_1') = \bar\psi(x_1')$. Si $x_1' < x_2$, on aurait, en appliquant aux points x_1' et x_2 la remarque précédente, $\bar\psi(x) < \bar\chi(x)$ au voisinage gauche de x', ce qui est impossible. On a donc $x_1' = x_2$ et la suffisance de la condition est aussi démontrée.

(Reçu par la Rédaction le 1. 12. 1947).

On certain methods of summability associated with conjugate trigonometric series

by

A. ZYGMUND (Chicago).

1. A number of methods of summability of numerical series

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

have their origin in the theory of trigonometric series. The most familiar of these methods is the method of Riemann. It consists in treating (1) as the series

$$u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cos nx \tag{2}$$

at the point $x=0$. If we integrate (2) termwise k times and take the generalised k-th symmetric derivative at the point $x=0$ of the resulting function, the value of this derivative, if it exists, equals

$$\lim_{\alpha\to 0}\left[u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^k\right]. \tag{3}$$

Correspondingly, we say that the series (2) is summable by the method (R,k), $k=1,2,3,\ldots$, to sum s, if the series in (3) converges for $|\alpha|$ small enough, and if the limit (3) exists and equals s. The cases $k=1,2$ are the most familiar ones.

In this note we are going to discuss another method of summability suggested by trigonometric series. As in the Riemann case, we have a whole sequence of methods corresponding to $k=1,2,\ldots$, but in this note we shall confine our attention to the cases $k=1$ and $k=2$ only.