Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées

par

W. ORLICZ (Poznań).

1. Dans la Théorie des opérations linéaires, l'ensemble des fonctions mesurables définies dans un intervalle $\langle a, b\rangle$ et bornées presque partout peut être considéré, en y définissant d'une manière usuelle l'addition et la multiplication par nombre réel, soit comme un espace du type (B) avec la norme $\|x\|_\infty \equiv \underset{a\leqslant t\leqslant b}{\mathrm{v.sup}}|x(t)|$ [1], soit comme un espace linéaire avec une notion de limite convenablement définie. On introduit d'habitude cette notion comme suit: la suite de fonctions $x_1(t), x_2(t), \dots$ est dite *(l)-convergente* vers la fonction $x_0(t)$ lorsqu'il existe une constante $K>0$ telle que $\|x_n\|_\infty\leqslant K$ et $x_n(t)\overset{as}{\to}x_0(t)$ [2]. Nous allons désigner désormais par le symbole $\overset{l}{\to}$ la (l)-convergence, par (M_l) l'espace des fonctions mesurables bornées avec cette notion de convergence et par (M) celui des mêmes fonctions, considéré comme espace du type (B) avec la norme $\|x\|_\infty$.

J'établis dans cet ouvrage [3]) divers théorèmes concernant les

[1]) $\underset{a\leqslant t\leqslant b}{\mathrm{v.sup}}|x(t)|$ désigne le plus petit des nombres m pour lesquels l'inégalité $|x(t)|>m$ se présente tout au plus dans un ensemble des t de mesure nulle. Quant à la notion d'espace du type (B) et à la Théorie des opérations linéaires en général, voir S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Tom I, Warszawa-Lwów 1932.

[2]) La notion de (l)-convergence est due à G. Fichtenholz; voir sa Note *Sur une classe d'opérations fonctionnelles linéaires*, Recueil Math. de Moscou 4 (1938), p. 215-226. Le symbole $\overset{as}{\to}$ désigne la convergence asymptotique.

[3]) dont les résultats datent de l'été de 1943, mais à cause de la guerre n'ont été presentés que le 10. IV. 1945 à la Section de Cracovie et le 31. V. 1946 à la Section de Wrocław de la Société Polonaise de Mathématique. Cf. Annales de la Soc. Polon. de Math. 18 (1945), p. 161 et 19 (1946), p. 235-236.

opérations définies dans l'espace fonctionnel (M_l) et dont les valeurs appartiennent à un espace linéaire Y qui sera supposé soit du type (F), soit pourvu d'une notion de convergence convenablement définie. Puis, j'en donne une série d'applications aux opérations et aux suites d'opérations dans des espaces particuliers.

Une opération $U(x)$ sera dite *(M_l, Y)-continue* si $x_n\overset{l}{\to}x_0$ entraîne $U(x_n)\to U(x_0)$ au sens de la convergence définie dans Y. Conformément à la terminologie universellement admise, j'appellerai *additive* toute opération $U(x)$ telle que

$$U(x_1+x_2)=U(x_1)+U(x_2).$$

L'opération qui est (M_l, Y)-continue et additive sera dite *(M_l, Y)-linéaire.*

J'emploierai la terminologie analogue aussi dans les cas où l'opération $U(x)$ est définie dans un espace X distinct de (M_l).

Dans le cas particulier où $U(x)$ est une *fonctionnelle*, c'est-à-dire où Y est l'espace des nombres réels, et dans tous les cas où il n'y a pas de doute en quel sens faut-il entendre la convergence dans Y, nous appellerons $U(x)$ simplement *continue dans* (M_l), *linéaire dans* (M_l) etc.

Enfin, étant donné un ensemble mesurable $E\subset\langle a,b\rangle$, nous désignerons par $x_E=x_E(t)$, où $a\leqslant t\leqslant b$, la fonction caractéristique de E. Il est évident que $\{E_n\}$ étant une suite de sous-ensembles mesurables de $\langle a,b\rangle$, les conditions $|E_n|\to 0$ et $x_{E_n}\overset{l}{\to}0$ sont équivalentes.

2. Soit $U(x)$ une opération définie dans (M_l).

Théorème 1. *Les conditions suivantes suffisent pour que l'opération additive $U(x)$ soit (M_l, Y)-linéaire:*

(a_1) *Y est un espace du type* (F);

(b_1) *si $x_n\overset{l}{\to}0$, la suite $U(x_1), U(x_2), \dots$ est bornée* [4]);

(c_1) *si $x_{A_n}(t)\overset{l}{\to}0$, on a $U(x_{A_n})\to 0$.*

[4]) Une suite $y_1, y_2, \dots$ d'éléments d'un espace Y du type (F) s'appelle *bornée* lorsqu'on a $\vartheta_n y_n\to 0$ pour toute suite $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$ de nombres réels telle que $\vartheta_n\to 0$; cf. S. Mazur und W. Orlicz, *Über Folgen linearer Operationen*, Studia Math. 4 (1933), p. 152-157.

Démonstration. Nous allons montrer d'abord que l'opération $U(x)$ est (M,Y)-continue.

En posant $\|x_n\|_\infty \to 0$, on a $x_n \xrightarrow{l} 0$, d'où, en vertu de (b_1), la suite $U(x_1)$, $U(x_2)$,... est bornée. Par conséquent, l'opération $U(x)$, considérée dans l'espace (M), transforme toute suite convergeant vers 0 en une suite bornée. Elle est donc (M,Y)-continue.

Il est facile de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe en vertu de (a_1) un nombre $\delta(\varepsilon)$ tel que l'inégalité $\|y\| \leqslant \delta(\varepsilon)$ où $y \epsilon Y$ entraîne l'inégalité $\|\vartheta y\| \leqslant \varepsilon$ pour $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$.

Soit ε un nombre positif donné d'avance. Par suite de la (M,Y)-continuité de l'opération $U(x)$, il existe entre 0 et 1 un η_0 rationnel, tel que $\|x\|_\infty \leqslant \eta_0$ entraîne $\|U(x)\| \leqslant \varepsilon$. D'autre part, il existe en vertu de (c_1) un η_1 tel que $\int_a^b |x_E(t)|\,dt \leqslant \eta_1$ entraîne $\|U(x_E)\| \leqslant \delta(\varepsilon\eta_0)$, c'est-à-dire $\|\vartheta U(x_E)\| \leqslant \varepsilon\eta_0$, pour $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$.

Considérons une suite quelconque $\{x_n(t)\}$ telle que $|x_n(t)| \leqslant 1$ presque partout et $x_n(t) \xrightarrow{as} 0$. On a pour tout $n \geqslant n_0$ l'inégalité $|x_n(t)| \leqslant \eta_0$ dans un ensemble A_n dont le complément à $\langle a,b\rangle$:

$$B_n = \langle a,b\rangle - A_n$$

est de mesure inférieure à η_1. Soit B_{in} avec $i = 0,1,2,\ldots,k$, où $k = [1/\eta_0]$, l'ensemble des $t \epsilon B_n$ tels que $i\eta_0 \leqslant |x_n(t)| < (i+1)\eta_0$.

Posons

$$z_n(t) = \vartheta_0 x_{B_{0n}}(t) + \vartheta_1 x_{B_{1n}}(t) + \ldots + \vartheta_k x_{B_{kn}}(t),$$

où $\vartheta_i = i\eta_0$. On a

$$|x_n(t) - z_n(t)| \begin{cases} < \eta_0 & \text{pour } t \epsilon B_n, \\ = |x_n(t)| \leqslant \eta_0 & \text{pour } t \epsilon A_n, \end{cases}$$

de sorte que $\|x_n - z_n\|_\infty \leqslant \eta_0$, ce qui entraîne $\|U(x_n - z_n)\| \leqslant \varepsilon$.

D'autre part, on a

$$\int_a^b |x_{B_{in}}(t)|\,dt \leqslant |B_n| < \eta_1,$$

ce qui entraîne $\|\vartheta_i U(x_{B_{in}})\| \leqslant \varepsilon\eta_0$. En tenant compte de l'additivité de l'opération $U(x)$, il vient donc $U(\vartheta_i x_{B_{1n}}) = \vartheta_i U(x_{B_{in}})$ et

$$\|U(z_n)\| \leqslant \|\vartheta_0 U(x_{B_{0n}})\| + \|\vartheta_1 U(x_{B_{in}})\| + \ldots + \|\vartheta_k U(x_{B_{kn}})\| \leqslant$$
$$\leqslant (k+1)\varepsilon\eta_0 < 2\varepsilon.$$

On a par conséquent

$$\|U(x_n)\| \leqslant \|U(x_n - z_n)\| + \|U(z_n)\| \leqslant 3\varepsilon \qquad \text{pour tout } n \geqslant n_0.$$

Il en résulte que $U(x_n) \to 0$, c. q. f. d.

Définition 1. Nous dirons qu'un espace Y du type (F) a *la propriété* (Z) lorsqu'il satisfait à la condition suivante:

Si pour $n = 1,2,\ldots$ les sommes $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i y_i$ où $y_i \epsilon Y$ pour $i = 1,2,\ldots,n$ sont bornées quels que soient $\varepsilon_i = 0$ ou 1, la série $\sum_{n=1}^\infty y_n$ est convergente dans l'espace Y.

Théorème 2. *Les conditions suivantes suffisent pour que l'opération additive $U(x)$ soit (M_l, Y)-linéaire:*

(a_2) *Y est un espace du type (F) ayant la propriété* (Z);

(b_2) *si $x_n \xrightarrow{l} 0$, la suite $U(x_1)$, $U(x_2)$,... est bornée;*

(c_2) *si $x_n \xrightarrow{l} x_0$, on a $\varliminf_{n\to\infty} \|U(x_n)\| \geqslant k\|U(x_0)\|$ où k est une constante telle que $0 < k \leqslant 1$.*

Démonstration. En vertu du théorème 1, il suffit de montrer (voir (c_1)) que $x_{E_n} \xrightarrow{l} 0$ entraîne $U(x_{E_n}) \to 0$.

Supposons, par contre, qu'il existe un $\varrho > 0$ et une suite d'ensembles $\{E_n\}$ tels que $|E_n| \to 0$, mais $\|U(x_{E_n})\| \geqslant \varrho$ pour $n = 1,2,\ldots$ Il est facile de déduire de (c_2) l'existence dans cette suite d'une suite partielle d'ensembles — désignons-la par $\{A_n\}$ — et d'une suite de nombres positifs $\{\varrho_n\}$ telles que

(1) $$\int_a^b |x_E(t) - x_{A_n}(t)|\,dt \leqslant \varrho_{n+1} \quad \text{entraîne} \quad \|U(x_E)\| \geqslant \varrho\frac{k}{2},$$

(2) $$\varrho_{n+1} < {}^1/_2\,\varrho_n,$$

(3) $$|A_n| < {}^1/_2\,\varrho_n.$$

Posons:

$$B_n = A_n(A_{n+1} + A_{n+2} + \ldots) \quad \text{et} \quad C_n = A_n - B_n.$$

Les ensembles C_n sont deux à deux disjoints et la mesure de l'ensemble B_n satisfait à l'inégalité

$$|B_n| \leqslant |A_{n+1}| + |A_{n+2}| + \ldots < {}^1/_2(\varrho_{n+1} + \varrho_{n+2} + \ldots).$$

On a donc

$$\int_a^b |x_{C_n}(t) - x_{A_n}(t)|\,dt \leqslant \varrho_{n+1}$$

et d'après (1)

(4) $$\|U(x_{C_n})\| \geqslant \varrho k/2 \quad \text{pour} \quad n=1,2,\ldots$$

Or, pour $n=1,2,\ldots$ et pour $\varepsilon_i = 0$ ou 1 arbitraires $(i=0,1,\ldots,n)$, les fonctions

$$x_n(t) = \varepsilon_1 x_{C_1}(t) + \varepsilon_2 x_{C_2}(t) + \ldots + \varepsilon_n x_{C_n}(t)$$

appartiennent à (M_l) et on a $x_n(t) \xrightarrow{l} x_0(t)$ où

$$x_0(t) = \varepsilon_1 x_{C_1}(t) + \varepsilon_2 x_{C_2}(t) + \ldots$$

Il résulte de (b_2) que la suite

$$\varepsilon_1 U(x_{C_1}) + \varepsilon_2 U(x_{C_2}) + \ldots + \varepsilon_n U(x_{C_n})$$

est bornée et comme Y jouit de la propriété (Z) en vertu de (a_2), il vient $\|U(x_{C_n})\| \to 0$, contrairement à (4).

Remarque 1. Si l'espace Y est du type (B), la condition (b_2) équivaut à

(b_2^*) $$\|U(x)\| \leqslant K\|x\|_\infty \quad \text{pour un} \quad K > 0.$$

Lemme. *Soient: X un espace du type (B), Y un espace du type (F), $U(x) = y \,\epsilon\, Y$ une opération additive définie dans X et Y_0 l'ensemble des valeurs de cette opération pour $\|x\| \leqslant 1$. Alors, si*

(5) $$x_n \to x_0 \quad \textit{entraîne} \quad \varliminf_{n\to\infty} \|U(x_n)\| \geqslant \|U(x_0)\|,$$

l'ensemble Y_0 est borné et l'opération $U(x)$ est (X,Y)-linéaire.

Démonstration. Soit k un nombre naturel. Désignons pour tout $n=1,2,\ldots$ par X_n l'ensemble des éléments x de l'espace X qui satisfont à la condition:

$$\|\vartheta U(x)\| \leqslant \frac{1}{2k} \quad \text{pour} \quad |\vartheta| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Soit ϑ un nombre rationnel. Pour $x_n \to x_0$, on a $\vartheta x_n \to \vartheta x_0$ et comme $U(\vartheta x_n) = \vartheta U(x_n)$, il vient en vertu de l'hypothèse (5) $\varliminf_{n\to\infty} \|\vartheta U(x_n)\| \geqslant \|\vartheta U(x)\|$. Il en résulte que les ensembles X_n sont fermés. Comme d'autre part $X = \sum_{n=1}^{\infty} X_n$, il existe en vertu du théoréme de Baire un indice p tel que X_p est de II^e catégorie dans X. Comme fermé, X_p contient donc une sphère. Il existe par conséquent un nombre rationnel $\varrho > 0$ et un élément $x_0 \,\epsilon\, X$ tels que $\|x - x_0\| \leqslant \varrho$ entraîne $\|\vartheta U(x)\| \leqslant \frac{1}{2k}$ pour $|\vartheta| \leqslant \frac{1}{p}$. Si $\|x'\| \leqslant \varrho$, il vient donc

$$\|\vartheta U(x')\| \leqslant \|\vartheta U(x'+x_0)\| + \|\vartheta U(x_0)\| \leqslant \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k} \quad \text{pour} \quad |\vartheta| \leqslant \frac{1}{p}.$$

Soit $\|x\| \leqslant 1$. On a par conséquent $\|\vartheta U(x)\| \leqslant \frac{1}{k}$ pour $|\vartheta| \leqslant \frac{\varrho}{p}$, ce qui prouve que l'ensemble Y_0 est borné.

Soit à présent $x_m \to 0$. Posons $\vartheta_m = \lambda_m \|x_m\|$ où ϑ_m sont rationnels, $\lambda_m \geqslant 1$ pour $m=1,2,\ldots$ et $\lambda_m \to 1$. On a à partir d'un m:

$$\|U(x_m)\| = \|\vartheta_m U(x_m \vartheta_m^{-1})\| \leqslant \frac{1}{k},$$

c'est-à-dire $U(x_m) \to 0$, ce qui prouve que l'opération $U(x)$ est (X,Y)-linéaire.

Théorème 3. *Les conditions (a_2) et (c_2) avec $k=1$ fixe suffisent pour que l'opération additive $U(x)$ soit (M_l, Y)-linéaire.*

Démonstration. Vu le théorème 2, il s'agit de montrer que la condition (b_2) se trouve satisfaite. Cela résulte immédiatement du lemme qui précède car $\|x_n - x_0\|_\infty \to 0$ entraîne $x_n \xrightarrow{l} x_0$.

Remarque 2. Si l'espace Y, tout en étant du type (B), n'a pas de propriété (Z), les hypothèses des théorèmes 2 et 3 n'entraînent pas d'une façon générale la (M_l, Y)-continuité de l'opération additive $U(x)$. Soit, p. ex., $x(t)$ une fonction mesurable essentiellement bornée; considérons l'opération $U(x) = x(t)$ comme définie dans l'espace (M_l) et ayant les valeurs dans (M). Alors les conditions (b_2^*) et (c_2) sont satisfaites avec les constantes K et k égales à 1, mais il est évident que l'opération $U(x)$ n'est pas (M_l, M)-continue.

Définition 2. Appelons *ensemble fondamental* (ou *normant*) *de fonctionnelles*[5]) dans l'espace Y du type (B) — et désignons par N_0 — tout ensemble de fonctionnelles linéaires définies dans Y qui ont la propriété suivante: il existe deux constantes c et C telles que:

$$\sup_{\eta \in N_0} |\eta(y)| \geqslant c\|y\| \qquad \text{pour tout } y \in Y,$$

$$\|\eta\| \leqslant C \qquad \text{pour tout } \eta \in N_0.$$

Théorème 4. *Les conditions suivantes suffisent pour que l'opération $U(x)$ soit (M_l, Y)-linéaire:*

(a_4) *Y est un espace du type (B), séparable;*

(d_4) *pour tout $\eta \in N_0$, la fonctionnelle $\eta(U(x))$ est linéaire dans l'espace (M_l).*

Démonstration. Il est facile de voir que l'opération $U(x)$ est nécessairement additive. En vertu d'un théorème de Fichtenholz [6]) et de l'hypothèse (d_4), on a

$$\eta(U(x)) = \int_a^b x(t) f_\eta(t)\, dt \qquad \text{pour tout } \eta \in N_0,$$

où $f_\eta(t) \in (L^1)$. L'espace Y étant séparable d'après (a_4), on peut extraire de toute suite $\{\eta_k\}$ de fonctionnelles appartenant à N_0 une suite partielle $\eta_{k_1}, \eta_{k_2} \ldots$ telle que la suite $\eta_{k_1}(U(x)), \eta_{k_2}(U(x)), \ldots$ soit convergente pour tout $x \in (M_l)$. Il en résulte l'inégalité

$$\sup_{\eta \in N_0} \int_a^b |f_\eta(t)|\, dt < +\infty$$

et, en vertu d'un théorème connu de Hahn et Steinhaus [7]), la continuité égale de toutes les fonctions $f_\eta(t)$ pour $\eta \in N_0$.

---

[5]) Notion introduite par S. Mazur et moi-même au cours des recherches sur les ainsi dits *espaces du type* (B_0).

[6]) G. Fichtenholz, *Sur les fonctionnelles linéaires, continues au sens généralisé*, Recueil Math. Moscou 4 (1938), p. 193-214.

[7]) Voir p. ex. H. Steinhaus, *Sur les développements orthogonaux*, Bull. Acad. Polonaise des Sc. et des Lettres (1926), p. 11-39.

Soit $x_n \xrightarrow{l} 0$. Etant donné un $\varepsilon > 0$, choisissons dans N_0 la suite $\eta_1, \eta_2, \ldots$ de façon à avoir

$$\eta_n(U(x_n)) \geqslant \frac{c}{2} \|U(x_n)\|$$

et un $\delta > 0$ de façon que l'inégalité $|E| < \delta$ entraîne l'inégalité

$$\int_E |f_{\eta_n}(t)|\, dt \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour } n = 1, 2, \ldots$$

On peut extraire de la suite $\{x_n(t)\}$ une suite partielle $\{x_{k(n)}(t)\}$ uniformément convergente dans un ensemble A tel que $|\langle a, b\rangle - A| < \delta$. Soit $B = \langle a, b\rangle - A$. On a donc à partir d'un certain n dépendant de ε:

$$|\eta_{k(n)}(U(x_{k(n)}))| \leqslant$$

$$\leqslant \int_A |x_{k(n)}(t)| |f_{\eta_{k(n)}}(t)|\, dt + \sup_n \|x_{k(n)}\|_\infty \int_B |f_{\eta_{k(n)}}(t)|\, dt <$$

$$< \varepsilon \sup_n \left(\int_a^b |f_{\eta_{k(n)}}(t)|\, dt + \sup_n \|x_{k(n)}\|_\infty \right),$$

d'où $\eta_{k(n)}(U(x_{k(n)})) \to 0$ et par conséquent $\|U(x_{k(n)})\| \to 0$. Ainsi, lorsque $x_n \xrightarrow{l} 0$, on peut extraire de la suite $\{U(x_n)\}$ une suite partielle qui converge vers 0 dans Y. Il en résulte aussitôt la (M_l, Y)-continuité de l'opération $U(x)$.

Remarque 3. Si l'espace Y n'est pas séparable, les hypothèses du théorème 4 n'entraînent pas d'une façon générale la continuité de l'opération en question. Considérons, en effet, la même opération $U(x) = x(t)$ que celle définie dans la remarque 2 et admettons comme l'ensemble N_0 dans l'espace (M) celui des fonctionnelles

$$\eta(x) = \pm \frac{1}{h} \int_u^{u+h} x(t)\, dt \quad \text{où} \quad a \leqslant u < b \quad \text{et} \quad 0 < h \leqslant b - u.$$

La fonctionnelle $\eta(U(x))$ est évidemment continue dans (M_l), mais l'opération $U(x)$ n'est pas (M_l, M)-continue.

Cependant la séparabilité de Y est superflue quand l'ensemble N_0 coïncide avec l'espace conjugué à Y. On a, en effet, le

Théorème 4'. *Les conditions suivantes suffisent pour que l'opération* $U(x)$ *soit* (M_l, Y)*-linéaire:*

(a'_4) Y *est un espace du type* (B);

(d'_4) *pour tout* η *linéaire dans* Y, *la fonctionnelle* $\eta(U(x))$ *est linéaire dans* (M_l).

Démonstration. Considérons une suite d'éléments $\{x_n\}$ dense dans (M_l), (celle p. ex. de tous les polynômes à coefficients rationnels) et désignons par Y_0 le plus petit ensemble linéaire, fermé et contenant tous les termes de la suite $\{U(x_n)\}$. Il est aisé de montrer que Y_0 est un espace du type (B), séparable.

Soit $x_{n_i} \xrightarrow{l} x$ où $x \epsilon (M_l)$. En vertu de l'hypothèse (d'_4), on a $\eta(U(x_{n_i})) \to \eta(U(x))$ pour toute fonctionnelle linéaire η. Il en résulte d'après un théorème connu que les combinaisons linéaires de $U(x_{n_i})$ approchent l'élément $U(x)$ dans Y, ce qui prouve que l'image $y = U(x)$ de cet élément appartient à Y_0. Reste à répéter le raisonnement de la démonstration du théorème 4.

Théorème 4''. *La condition* (a_4) *peut être remplacée (dans le théorème 4) par la suivante:*

(a''_4) Y *est un espace du type* (B) *ayant la propriété* (Z).

Démonstration. L'opération $U(x)$ est en tout cas additive. Admettons que $\|x_n - x_0\|_\infty \to 0$ et $\|U(x_n) - y_0\| \to 0$. Il en résulte que $\lim_{n\to\infty} \eta(U(x_n)) = \eta(y_0)$. On a en vertu de ($d_4$)

$$\lim_{n\to\infty} \eta(U(x_n)) = \eta(U(x_0)) \qquad \text{pour } \eta \epsilon N_0$$

et on conclut de la définition 2 (p. 66) que $U(x_0) = y_0$, ce qui prouve en vertu d'un théorème connu de Banach[8]) que la condition (b_2^*), qui équivaut à (b_2), est vérifiée (voir remarque 1, p. 64).

Soit $x_n \xrightarrow{l} x_0$. Choisissons un $\eta_0 \epsilon N_0$ de manière à avoir $|\eta_0(U(x_0))| \geqslant \frac{c}{2}\|U(x_0)\|$. Comme $\eta_0(U(x_n)) \to \eta_0(U(x_0))$, on a à partir d'un n suffisamment élevé

$$C\|U(x_n)\| \geqslant \|\eta_0\| \cdot \|U(x_n)\| \geqslant |\eta_0(U(x_n))| \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}|\eta_0(U(x_0))| \geqslant \frac{c}{4}\|U(x_0)\|,$$

[8]) S. Banach, op. cit., p. 41, Théorème 7.

c'est-à-dire $\|U(x_n)\| \geqslant \frac{c}{4C}\|U(x_0)\|$. La condition ($c_2$) est donc satisfaite avec la constante $k = \frac{c}{4C}$ et toutes les hypothèses du théorème 2 se trouvent ainsi vérifiées.

Définition 3. Nous dirons que l'espace Y du type (F) dont les éléments sont des fonctions mesurables a la *propriété* (Z_a) lorsqu'il satisfait à la condition suivante: si pour $n = 1, 2, \ldots$ les sommes

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i y_i \quad \text{où} \quad y_i \epsilon Y \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, n$$

convergent asymptotiquement quels que soient $\varepsilon_i = 0$ ou 1 vers une fonction $y(t) \epsilon Y$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ est convergente dans l'espace Y.

Théorème 5. *Les conditions suivantes suffisent pour que l'opération additive* $U(x)$ *soit* (M_l, Y)*-linéaire:*

(a_5) Y *est un espace du type* (F) *ayant la propriété* (Z_a);

(b_5) *si* $y_n(t) \xrightarrow{as} y_0(t)$ *dans* Y, *on a* $\varliminf_{n\to\infty} \|y_n(t)\| \geqslant \|y_0(t)\|$;

(c_5) *si* $x_n \xrightarrow{l} x_0$, *on a* $U(x_n) \xrightarrow{as} U(x_0)$.

Démonstration. En vertu des conditions (c_5) et (b_5), $x_n \xrightarrow{l} x_0$ entraîne $\varliminf_{n\to\infty} \|U(x_n)\| \geqslant \|U(x_0)\|$; ainsi la condition ($c_2$) avec $k = 1$ est satisfaite. En vertu du lemme, il en résulte la condition (b_2). En vertu du théorème 1, il suffit donc de montrer encore que $x_{E_n} \xrightarrow{l} 0$ entraîne $U(x_n) \to 0$.

Supposons que l'on ait $\|U(x_{E_n})\| \geqslant \varrho > 0$ pour une suite d'ensembles $\{E_n\}$ où $|E_n| \to 0$. Le raisonnement employé dans la démonstration du théorème 2 permet aussitôt d'établir l'existence d'une suite d'ensembles disjoints $\{C_n\}$ tels que

$$(6) \qquad \|U(x_{C_n})\| \geqslant \varrho/2.$$

Les fonctions $x_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_{C_i}(t)$ avec $\varepsilon_i = 0$ ou 1 arbitraires convergent pour $n \to \infty$ dans (M_l) vers une fonction $x(t) \epsilon (M_l)$. Il en résulte en vertu de (c_5) que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n U(x_{C_n})$ avec

$\varepsilon_i = 0$ ou 1 arbitraires converge asymptotiquement vers un élément $U(x)$ de l'espace Y et par conséquent, en vertu de (a_5), qu'elle y converge suivant la norme (admise dans Y). On aurait donc $\|U(x_{C_n})\| \to 0$, contrairement à (6).

3. Passons aux applications des théorèmes 1-5 à des cas particuliers d'espaces fonctionnels. Considérons les exemples suivants:

Espaces ayant la propriété (Z).

(I) Tous les espaces du type (B) faiblement complets [9], en particulier:

(I_1) l'espace (L^α) des fonctions intégrables dans $\langle a, b\rangle$ avec la puissance $\alpha \geqslant 1$;

(I_2) l'espace (L^M) des fonctions $f(x)$ mesurables pour lesquelles il existe l'intégrale $\int\limits_a^b M(|f(x)|)\,dx$ où $M(u)$ est une fonction non décroissante, convexe pour $u > 0$ et telle que

$$M(0) = 0, \qquad M(2u) \leqslant lM(u) \qquad \text{pour } u \geqslant u_0 > 0;$$

(I_3) l'espace (V) des fonctions à variation bornée dans $\langle a, b\rangle$;

(I_3^*) l'espace (VC) des fonctions continues à variation bornée dans $\langle a, b\rangle$;

(I_3^{**}) l'espace (V^*) des fonctions équivalentes à celles de (V); en outre, deux espaces suivants du type (F) qui ne sont équivalents à aucun espace du type (B) et même du type plus général (B_0) ayant la propriété (Z):

(II) l'espace (L^α) des fonctions intégrables dans $\langle a, b\rangle$ avec la puissance positive $\alpha < 1$, la norme de l'élément $x = x(t)$ étant définie par la formule

$$\|x\| = \int\limits_a^b |x(t)|^\alpha\,dt;$$

(III) l'espace (S) des fonctions mesurables, la norme de l'élément $x = x(t)$ étant définie par la formule

$$\|x\| = \int\limits_a^b \frac{|x(t)|}{1 + |x(t)|}\,dt.$$

[9] Voir S. Banach, op. cit., p. 240.

Espaces ayant la propriété (Z_a).

(I_a) Tous les espaces du type (B) faiblement complets, composés de fonctions $x(t)$ mesurables et dans lesquels

$$x_n(t) \overset{as}{\to} x(t) \quad \text{entraîne} \quad \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\| \geqslant \|x\|;$$

(II_a) l'espace (C) des fonctions continues dans $\langle a, b\rangle$ [10];

(II_a^*) l'espace (C^*) des fonctions équivalentes à celles de (C) [10];

(III_a) les espaces (I_2), (II) et (III).

On a les théorèmes:

Théorème 6. *Pour que l'opération additive $U(x) = U(x, t)$ soit (M_l, S)-linéaire, il suffit que*

$$x_n \overset{l}{\to} x_0 \quad \textit{entraîne} \quad \varliminf_{n\to\infty} |U(x_n, t)| \geqslant |U(x_0, t)| \quad \textit{pour presque tout } t.$$

Démonstration. Soit $p(t) = |t| / (1 + |t|)$. On a

$$\varliminf_{n\to\infty} p(U(x_n, t)) = p\,(\varliminf_{n\to\infty} U(x_n, t)),$$

d'où

$$\|U(x)\| = \int\limits_a^b p(U(x, t))\,dt \leqslant \int\limits_a^b \varliminf_{n\to\infty} p\,U(x_n, t)) \leqslant$$

$$\leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_a^b p\,(U(x_n, t))\,dt = \varliminf_{n\to\infty} \|U(x_n)\|.$$

Reste à appliquer le théorème 3.

Remarque 4. Le théorème analogue peut être démontré pour les espaces (I_1) et (II).

Théorème 7. *Pour que l'opération additive $U(x)$ soit (M_l, Y)-linéaire, où Y est l'un quelconque des espaces (L^α), (L^M), (V), (V^*), (S), (C) et (C^*), il suffit que $x_n \overset{l}{\to} x_0$ entraîne $U(x_n) \overset{as}{\to} U(x_0)$.*

[10] Pour la démonstration que cet espace jouit de la propriété (Z_a), voir W. Orlicz, *Sur la convergence commutative dans certains espaces fonctionnels*, Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie (à paraître).

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème 5 car tous les espaces Y en question ont la propriété (Z_a) et dans chacun d'eux $y_n(t) \xrightarrow{as} y_0(t)$ entraîne $\varliminf_{n\to\infty} \|y_n\| \geqslant \|y_0\|$.

Théorème 8. *Soit $k(t,v)$ une fonction définie pour $a \leqslant t \leqslant b$, $c \leqslant v \leqslant d$ et satisfaisant à la condition:*

(a_8) *pour toute fonction $x(t)\,\epsilon\,(M_l)$ l'intégrale*

$$F(x,v) = \int_a^b x(t)\,k(t,v)\,dt \tag{7}$$

existe pour tout v de $\langle c,d\rangle$ et appartient à (VC) ou (C), ou bien elle existe pour presque tout v de $\langle c,d\rangle$ et appartient à l'un des espaces (L^α), (L^M), (V^*), (S) et (C^*).

Alors $F(x,v)$ est une opération (M_l, Y)-linéaire, Y étant l'un quelconque des sept espaces en question.

Démonstration. En posant $x(t)\equiv 1$, on constate que l'intégrale $\int_a^b |k(t,v)|\,dt$ existe en tout cas pour presque tout v de $\langle c,d\rangle$. Par conséquent $x_n \xrightarrow{l} x_0$ entraîne $F(x_n,v)\to F(x_0,v)$ presque partout. Reste à appliquer le théorème 7.

Théorème 9. *Soit $k(t,v)$ une fonction mesurable de v pour tout t, définie pour $a\leqslant t\leqslant b$, $c \leqslant v \leqslant d$, telle que*

$$h\to 0 \quad \textit{entraîne} \quad k(t,v+h) \xrightarrow{as} k(t,v) \qquad \textit{pour tout } v\,\epsilon\,\langle c,d\rangle \tag{8}$$

et satisfaisant à la condition:

(a_9) *l'intégrale (7) existe pour tout $v\,\epsilon\,\langle c,d\rangle$ et pour toute fonction $x(t)\,\epsilon\,(M_l)$.*

Alors, pour que l'intégrale (7), où $x(t)$ est une fonction mesurable bornée arbitraire, soit une fonction continue de $v\,\epsilon\,\langle c,d\rangle$, il faut et il suffit que

$$h\to 0 \quad \textit{entraîne} \quad \int_a^b |k(t,v+h)-k(t,v)|\,dt \to 0 \tag{9}$$

uniformément dans l'intervalle $\langle c,d\rangle$.

Démonstration. Si $F(x,v)$ est une fonction continue de v dans $\langle c,d\rangle$ pour toute fonction $x(t)\,\epsilon\,(M_l)$, elle est en vertu du théorème 8 une opération (M_l, C)-linéaire. Il existe donc pour tout $\varepsilon>0$ un $\delta>0$ tel que l'inégalité $|E|<\delta$ entraîne l'inégalité

$$\max_{c\leqslant v\leqslant d} \int_E |k(t,v)|\,dt < \varepsilon. \tag{10}$$

Il existe en outre pour tout $\varepsilon>0$ et $\delta>0$ un $\eta>0$ tel que

$$|h|<\eta \quad \text{entraîne} \quad |k(t,v+h)-k(t,v)|<\varepsilon \tag{11}$$

pour tout $v\,\epsilon\,\langle c,d\rangle$ et pour tout t appartenant à un ensemble $E\subset\langle a,b\rangle$ (qui dépend de ε, v et h) pour lequel $|\langle a,b\rangle - E|<\delta$. En effet, si un tel η n'existait pas, il existerait deux nombres $\varepsilon_0>0$ et $\delta_0>0$, en même temps que deux suites $\{v_n\}$ et $\{h_n\}$ telles que

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v_0, \qquad \lim_{n\to\infty} h_n = 0$$

et une suite d'ensembles $\{A_n\}$ de mesure $|A_n|\geqslant\delta_0$ pour $n=1,2,\ldots$, telle que l'on ait

$$|k(t,v_n+h_n)-k(t,v_n)|\geqslant\varepsilon_0 \qquad \text{pour tout } t\,\epsilon\,A_n,$$

ce qui est incompatible avec l'hypothèse (8).

Posons $B=\langle a,b\rangle - E$. En vertu de (10) et (11), l'inégalité $|h|<\eta$ entraîne

$$\int_a^b |k(t,v+h)-k(t,v)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_E |k(t,v+h)-k(t,v)|\,dt + \int_B |k(t,v+h)-k(t,v)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon(b-a)+2\varepsilon \qquad \text{pour tout } v\,\epsilon\,\langle c,d\rangle.$$

Il est ainsi démontré que la condition (9) est nécessaire. Sa suffisance résulte immédiatement de l'inégalité

$$|F(x,v+h)-F(x,v)| \leqslant \int_a^b |k(t,v+h)-k(t,v)|\,dt\cdot\|x\|_\infty.$$

Théorème 10. *Soit* $\alpha > 1$. *Soit* $\varphi(t,v)$ *une fonction mesurable du point* (v,t), *définie pour* $a \leqslant t \leqslant b$, $a \leqslant v \leqslant b$ *et satisfaisant aux conditions:*

(a_{10}) $\varphi(t,v)$ *est une fonction intégrable de* t *pour tout* $v \in \langle a,b \rangle$;

(b_{10}) *il existe une constante* $K > 0$ *telle que*

$$\int\limits_{a(h)}^{b(h)} \left(\int\limits_a^b |\varphi(t,v+h) - \varphi(t,v)|\, dt \right)^\alpha dv \leqslant K \cdot |h|^\alpha$$

pour tout h *où*

$$a(h) = \begin{cases} a & si\ h \geqslant 0 \\ a-h & si\ h < 0 \end{cases} \quad et \quad b(h) = \begin{cases} b-h & si\ h > 0 \\ b & si\ h \leqslant 0. \end{cases}$$

Alors:

1^0 *pour toute fonction* $x(t) \in (M_l)$, *la fonction*

$$F(x,v) = \int\limits_a^b x(t)\varphi(t,v)\, dt \tag{12}$$

équivaut à une fonction absolument continue $F^*(x,v)$ *dont la dérivée* $F^{*\prime}(x,t) = U(x,t)$ *est une fonction à* α*-ème puissance intégrable;*

2^0 *en posant* $U(x) = U(x,t)$, *l'opération* $U(x)$ *est* (M_l, L^α)*-linéaire;*

3^0 *l'opération* $U(x)$ *satisfait à l'inégalité*

$$\|U(x)\|_\alpha \leqslant K^{1/\alpha} \cdot \|x\|_\infty$$

où $\|U(x)\|_\alpha = \left(\int\limits_a^b |U(x)|^\alpha dt \right)^{1/\alpha}$ *est la norme adoptée dans l'espace* (L^α).

Démonstration. On a

$$F(x,v+h) - F(x,v) = \int\limits_a^b x(t)[\varphi(t,v+h) - \varphi(t,v)]\, dt,$$

$$\int\limits_{a(h)}^{b(h)} |F(x,v+h) - F(x,v)|^\alpha dv \leqslant \|x\|_\infty^\alpha \cdot \int\limits_{a(h)}^{b(h)} \left(\int\limits_a^b |\varphi(t,v+h) - \varphi(t,v)|\, dt \right)^\alpha dv \leqslant$$
$$\leqslant K \cdot \|x\|_\infty^\alpha \cdot |h|^\alpha.$$

Il en résulte d'après un théorème connu [11]) que la fonction $F(x,v)$ équivaut à l'intégrale indéfinie $F^*(x,v)$ d'une fonction à α-ème puissance intégrable, d'où 1^0.

[11]) G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some properties of fractional integrals, I,* Math. Zeitschr. 27 (1928), p. 599, Th. 24.

Soit $U(x,t)$ cette fonction. On a donc

$$F^*(x,v) = \int\limits_a^v U(x,t)\, dt + C_x.$$

Considérons l'opération $W(x)$ qui fait correspondre à toute fonction $x(t) \in (M_l)$ la fonction continue $F^*(x,v)$. En vertu du théorème 8, l'opération $W(x)$ est (M_l, C)-linéaire.

Soit H_α l'ensemble de toutes les fonctions $z(t) \in (M_l)$ assujetties à la condition suivante:

(13) Il existe une subdivision

$$a = v_0 < v_1 < \ldots < v_n = b$$

telle que

$$z(t) = a_i \qquad \text{pour } v_{i-1} \leqslant t < v_i \text{ et } i = 1, 2, \ldots, n$$

où

$$\sum_{i=1}^n |a_i|^{\alpha'} \leqslant 1, \tag{*}$$

α' désignant l'exposant conjugué à α.

L'ensemble des fonctionnelles de la forme

$$\eta(y) = \int\limits_a^b y(t) z(t)\, dt \qquad \text{où } z(t) \in H_\alpha, \tag{14}$$

définies dans l'espace (L^α), est un ensemble fondamental au sens de la définition 2 (p. 66) et chacune des fonctionnelles $\eta(U(x)) = \int\limits_a^b U(x,t) z(t)\, dt$ est linéaire dans (M_l), puisque $x_n \xrightarrow{l} x_0$ entraîne $F^*(x_n,v) \to F^*(x_0,v)$ pour tout $v \in \langle a,b \rangle$ et

$$\int\limits_a^b U(x,t)\, z(t)\, dt = \sum_{i=1}^n a_i [F^*(x,v_i) - F^*(x,v_{i-1})].$$

Ainsi, les hypothèses du théorème 4 sont satisfaites et par conséquent l'opération $U(x) = U(x,t)$ est (M_l, L^α)-linéaire. On a donc 2^0.

Enfin, pour établir 3^0, posons

$$W_n(x,v) = n \cdot \int\limits_v^{v+1/n} U(x,t)\, dt.$$

On a $\lim_{n\to\infty}\int_a^b |W_n(x,v)-U(x,v)|^\alpha dv=0$ et par conséquent

$$\int_a^b |U(x,v)|^\alpha dv=\lim_{n\to\infty}\int_a^b |W_n(x,v)|^\alpha dv \leqslant$$

$$\leqslant \|x\|_\infty^\alpha\cdot n^\alpha\cdot \int_a^{b-1/n}\Big(|\varphi(t,v+1/n)-\varphi(t,v)|\,dt\Big)^\alpha dv \leqslant K\cdot\|x\|_\infty^\alpha,$$

d'où 3°.

Théorème 11 [12]. *Soit $\varphi(t,v)$ une fonction définie pour $a\leqslant t\leqslant b$, $a\leqslant v\leqslant b$, satisfaisant à (a_{10}) et à la condition suivante:*

(b_{11}) *il existe une constante $K>0$ telle que*

$$\int_a^b |\varphi(t,v+h)-\varphi(t,v)|\,dt\leqslant K\cdot|h|$$

pour tout $v\in\langle a,b\rangle$ et pour tout h tel que $v+h\in\langle a,b\rangle$.

Alors:

1° *pour toute fonction $x(t)\in M_l$, la fonction (12) satisfait à la condition de Lipschitz, de sorte que sa dérivée $F'(x,t)=U(x,t)$ est une fonction bornée;*

2° *en posant $U(x)=U(x,t)$, l'opération $U(x)$ est (M_l,M_l)-linéaire;*

3° *l'opération $U(x)$ satisfait à l'inégalité*

$$\|U(x)\|_\infty\leqslant K\cdot\|x\|_\infty.$$

Réciproquement, étant donné une fonction $F(x,v)$ absolument continue pour tout $x=x(t)\in(M_l)$ telle que l'opération $U(x)=U(x,t)$ est (M_l,M_l)-linéaire et la fonctionnelle $F(x,0)$ est linéaire dans (M_l), on a la formule (12) et la fonction $\varphi(t,v)$ satisfait à la condition (b_{11}).

Démonstration. La condition (b_{11}) est nécessaire. En effet, si l'opération $U(x)=U(x,t)$ est (M_l,M_l)-linéaire, elle est (M,M)-linéaire, car $\|x_n-x_0\|_\infty\to 0$ entraîne $x_n\xrightarrow{l}x_0$, d'où $\sup_n\|U(x_n)\|_\infty<\infty$.

[12]) Ce théorème a été établi par G. Fichtenholz dans sa Note: *Sur une classe d'opérations fonctionnelles linéaires*, Recueil Math. Moscou 4 (1938), p. 215-226. Sa démonstration, d'ailleurs facile, que la condition (b_{11}) est nécessaire, est réproduite ici avec une légère modification du raisonnement.

On a donc l'inégalité (b_2^*) (voir Remarque 1, p. 64). On a en outre

$$\int_a^v U(x,t)\,dt+c_x=\int_a^b x(t)\varphi(t,v)\,dt$$

pour une fonction $\varphi(t,v)$ intégrable de la variable t, et

$$\left|\frac{1}{h}\int_v^{v+h}U(x,t)\,dt\right|=\left|\int_a^b x(t)\frac{\varphi(t,v+h)-\varphi(t,v)}{h}\,dt\right|\leqslant K\cdot\|x\|_\infty$$

pour une constante $K>0$.

Reste à évaluer la norme de la fonctionnelle $\int_a^b$ qui figure dans cette formule, pour obtenir la condition (b_{11}).

Pour montrer que la condition (b_{11}) est suffisante — ce qui est un peu moins simple — nous aurons recours au théorème 4. La condition (b_{11}) implique que la fonction $F(x,v)$ satisfait à la condition de Lipschitz, de sorte que l'on a

$$F(x,v)=\int_a^v U(x,t)\,dt+c_x$$

pour une fonction $U(x,t)$ bornée, c'est-à-dire 1°.

Soit H_1 l'ensemble des fonctions $z(t)\in(M_l)$ assujetties à la condition (13) avec l'inégalité (*) concernant les a_i remplacée par

(**) $\qquad |a_i|\leqslant 1 \qquad$ pour $i=1,2,\dots,n$.

L'ensemble des fonctionnelles de la forme (14) où $z(t)\in H_1$, définies dans l'espace (L^1), est un ensemble fondamental au sens de la définition 2 (p. 66). Comme

$$\int_b^a U(x,t)\,z(t)\,dt=\sum_{i=1}^n a_i[F(x,v_i)-F(x,v_{i-1})]$$

et comme $x_n\xrightarrow{l}x_0$ entraîne $F(x_n,v)\to F(x_0,v)$, les fonctionnelles

$$\eta(U(x))=\int_a^b U(x,t)\,z(t)\,dt$$

sont linéaires. Il est facile de voir que $\|U(x,t)\|_\infty\leqslant K\cdot\|x\|_\infty$ où K est la constante de (b_{11}); on a donc 3°.

Il en résulte en vertu du théorème 4 que l'opération $U(x) = U(x,t)$ est (M_l, L^1)-linéaire. Enfin,

$$\|x_n\|_\infty \leqslant k \quad \text{entraîne} \quad \|U(x_n,t)\|_\infty \leqslant k\cdot K,$$

ce qui prouve que l'opération $U(x)$ est (M_l, M_l)-linéaire, c'est-à-dire 2°.

Un raisonnement analogue permet d'établir le

Théorème 12. *Soit $\varphi(t,v)$ une fonction définie pour $a \leqslant t \leqslant b$, $a \leqslant v \leqslant b$, satisfaisant à* (a_{10}) *et à la condition suivante:*

(b_{12}) *il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un $\delta > 0$ tel que, $\langle v_1, w_1\rangle, \langle v_2, w_2\rangle, \ldots, \langle v_k, w_k\rangle$ étant des sous-intervalles arbitraires de $\langle a,b\rangle$ disjoints deux à deux,*

$$\sum_{i=1}^{k}(w_i - v_i) < \delta \quad \text{entraîne} \quad \sum_{i=1}^{k}\int_a^b |\varphi(t,w_i) - \varphi(t,v_i)|\,dt \leqslant \varepsilon.$$

Alors la fonction (12) *est absolument continue et l'opération $U(x) = U(x,t) = F'(x,t)$ est (M_l, L^1)-linéaire.*

4. Je vais établir à présent quelques théorèmes concernant les suites d'opérations linéaires dans (M_l).

Théorème 13. *L'espace Y étant du type (F), soit $\{U_n(x)\}$ une suite d'opérations (M_l, Y)-linéaires qui converge vers un élément $U(x) \epsilon Y$, c'est-à-dire que*

(15) $$U(x) = \lim_{n\to\infty} U_n(x) \qquad \text{pour tout } x \epsilon (M_l).$$

Alors $x_n \xrightarrow{l} x_0$ entraîne $U_n(x_n) \to U(x_0)$ et l'opération $U(x)$ est (M_l, Y)-linéaire [13].

Démonstration. Considérons d'abord le cas où

(16) $$\lim_{n\to\infty} U_n(x) = 0 \qquad \text{pour tout } x \epsilon (M_l);$$

nous allons montrer qu'alors

(17) $$x_{E_n} \xrightarrow{l} 0 \quad \text{entraîne} \quad U_n(x_{E_n}) \to 0.$$

[13]) Cf. S. Saks, *On some functionals*, Transactions of the American Math Soc. 35 (1932), p. 549-556, où le cas analogue est considéré, à savoir dans lequel Y est l'espace des fonctions mesurables et (M_l) — celui des fonctions caractéristiques $x_E = x_E(t)$ avec la distance entre x_{E_1} et x_{E_2} définie par $\int_a^b |x_{E_1}(t) - x_{E_2}(t)|\,dt$.

Le mode du raisonnement sera constructif.

Supposons que l'implication (17) soit fausse. Il existerait donc un $\varrho > 0$ et une suite $\{E_n\}$ d'ensembles telle que $|E_n| \to 0$ et $\|U_{k_n}(x_{E_n})\| \geqslant \varrho$ pour une suite $\{k_n\}$ d'indices. On définit par induction une suite partielle $\{A_n\}$ d'ensembles, extraite de $\{E_n\}$, une suite partielle $\{i_n\}$ d'indices, extraite de $\{k_n\}$, et une suite $\{\varrho_n\}$ de nombres positifs de façon que les conditions (1) avec $U = U_{i_n}$ et $k = 1$, (2) et (3), p. 63, se trouvent satisfaites. En définissant alors les ensembles disjoints B_n et C_n comme dans la démonstration du théorème 2, on établirait l'inégalité

$$\|U_{i_n}(x_{C_n})\| \geqslant \varrho/2,$$

analogue à (4).

Ceci fait, on détermine successivement une suite partielle d'indices $j_n = i_{m_n}$, extraite de $\{i_n\}$ et assujettie aux conditions:

(18) $$\|U_{j_n}(x_{C_{m_n}})\| \geqslant \varrho/2 \qquad \text{pour } n = 1, 2, \ldots,$$

(19) $$\|U_{j_n}(x_{C_{m_p}})\| < \varrho/2^{p+2} \qquad \text{pour } p = 1, 2, \ldots, n-1,$$

(20) $$\|U_{j_n}(x_{C_{m_p}})\| < \varrho/2^{p+1} \qquad \text{pour } p = n+1, n+2, \ldots$$

Il est aisé de vérifier que la détermination de la suite $\{j_n\}$ ayant les propriétés (18)-(20) est possible. Posons

$$x(t) = \sum_{p=1}^{\infty} x_{C_{m_p}}(t).$$

Il vient

$$\|U_{j_n}(x)\| \geqslant \|U_{j_n}(x_{C_{m_n}})\| - \sum_{p=1}^{n-1}\|U_{j_n}(x_{C_{m_p}})\| - \sum_{p=n+1}^{\infty}\|U_{j_n}(x_{C_{m_p}})\| \geqslant$$

$$\geqslant \varrho/2 - \varrho/4 = \varrho/2,$$

contrairement à l'hypothèse (15).

Considérons à présent le cas général où

(21) $$\lim_{n\to\infty} U_n(x) = U(x) \qquad \text{pour tout } x \epsilon (M_l);$$

nous allons prouver que

(22) $$x_{E_n} \xrightarrow{l} 0 \quad \text{entraîne} \quad U_n(x_{E_n}) \to 0.$$

Il suffit à ce but de montrer qu'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $\eta > 0$ tel que $|E| < \delta$ entraîne $\|U_n(x_E) - U_m(x_E)\| < \varepsilon$ pour tout couple n, m d'indices.

Supposons, par contre, qu'il existe un $\varrho > 0$, une suite $\{E_n\}$ d'ensembles telle que $|E_n| \to 0$, et deux suites croissantes d'indices $\{k_n\}, \{l_n\}$ telles que l'on ait $\|U_{k_n}(x_{E_n}) - U_{l_n}(x_{E_n})\| \geqslant \varrho$ pour tout couple k_n, l_n. On serait donc en contradiction avec le résultat (17) établi pour le cas particulier (16), puisque l'hypothèse (21) entraîne $U_{k_n}(x) - U_{l_n}(x) \to 0$. L'implication (22) se trouve ainsi démontrée.

Considérons enfin les opérations $U_n(x)$ définies comme des opérations dans l'espace (M). L'égalité (15) se présentant par l'hypothèse pour tout $x \in (M)$, il existe, en vertu d'un théorème connu [14]), pour tout $\varepsilon > 0$ un $\eta_0 > 0$ tel que

$$\|x\|_\infty \leqslant \eta_0 \quad \text{entraîne} \quad \|U_n(x)\| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } n = 1, 2, \ldots$$

Il existe en outre un $\eta_1 > 0$ tel que

$$\int_a^b |x_E(t)|\, dt \leqslant \eta_1 \quad \text{entraîne} \quad \|U_n(x_E)\| \leqslant \delta(\varepsilon\eta_0)$$

où δ est le même nombre que dans la démonstration du théorème 1 (p. 61).

Soit $x_n \xrightarrow{l} 0$. En répétant pour $U_n(x)$ le raisonnement appliqué à $U(x)$ dans la démonstration du théorème 1, on parvient à l'inégalité $\|U_n(x_n)\| < 3\varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_0$.

Reste à établir la continuité de l'opération-limite $U(x)$. Soit $x_n \xrightarrow{l} 0$. Choisissons les indices $\{k_n\}$ de façon que

$$\|U_{k_n}(x_n) - U(x_n)\| \leqslant \varepsilon/2.$$

Comme d'autre part $\|U_{k_n}(x_n)\| \leqslant \varepsilon/2$ à partir d'un n suffisamment grand, il vient $\|U(x_n)\| \leqslant \varepsilon$, ce qui achève la démonstration.

Remarque 5. Le théorème 13 peut être démontré aussi par la „méthode de catégorie", analogue à celle employée par S. Saks dans son travail précité. Soit (R) l'espace métrique composé de toutes les fonctions $x(t)$ mesurables, essentiellement bornées et telles que $|x(t)| \leqslant 1$ presque partout, la distance entre deux éléments x_1 et x_2 dans (R) étant le nombre $\int_a^b |x_1(t) - x_2(t)|\, dt$. En employant le raisonnement de S. Saks, on peut aussi montrer que, pour avoir (15), il suffit que l'égalité $U(x) = \lim_{n\to\infty} U_n(x)$ se présente pour les x appartenant à un ensemble résiduel dans (R).

[14]) S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fundamenta Mathematicae 3 (1922), p. 133-181, en particulier p. 157.

Théorème 14. *L'espace Y étant du type (B), soit $\{U_n(x)\}$ une suite d'opérations (M_l, Y)-linéaires qui converge* faiblement *vers un élément $U(x) \in Y$, c'est-à-dire que*

$$\lim_{n\to\infty} \eta(U_n(x)) = \eta(U(x)) \tag{23}$$

pour toute fonction $x(t) \in (M_l)$ et pour toute fonctionnelle $\eta(y)$ où $y \in Y$.

Alors l'opération $U(x)$ est (M_l, Y)-linéaire.

Démonstration. Les fonctionnelles $\eta(U_n(x))$ sont continues dans l'espace (M_l). Il en est donc de même des fonctionnelles $\eta(U(x))$ en vertu du théorème 13 — ou seulement du théorème de Hahn et Steinhaus (cité au renvoi [7], p. 66), qui en est un cas particulier. Il suffit d'appliquer encore le théorème 4.

Remarque 6. La thèse du théorème 14 subsiste lorsque l'égalité figurant dans la condition (23) se présente seulement pour les fonctionnelles η appartenant à l'ensemble fondamental N_0 (cf. p. 66), l'espace Y étant séparable ou ayant la propriété (Z).

Théorème 15. *Soit $\{U_n(x)\}$, où $U_n(x) = U_n(x,t)$, une suite d'opérations (M_l, L^α)-linéaires, où $\alpha \geqslant 1$, pour laquelle il existe une opération $U(x) = U(x,t)$ aux valeurs appartenant à (L^α) et telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^v U_n(x,t)\, dt = \int_a^v U(x,t)\, dt \qquad \text{pour tout } v \in \langle a, b \rangle. \tag{24}$$

Alors l'opération $U(x)$ est (M_l, L^α)-linéaire.

Démonstration. Considérons l'ensemble H_α des fonctions $z(t)$ assujetties à la condition (13) avec l'inégalité (*) pour $\alpha > 1$ et (**) pour $\alpha = 1$ (cf. p. 75 et 77). L'hypothèse (24) entraîne l'existence de la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b z(t)\, U_n(x,t)\, dt = \int_a^b z(t)\, U(x,t)\, dt \qquad \text{pour tout } z(t) \in H_\alpha. \tag{25}$$

Les intégrales à gauche étant des fonctionnelles continues dans (M_l), l'intégrale à droite y est une fonctionnelle linéaire. Reste à appliquer le théorème 4 ou — si l'on veut — le théorème 3, qui est plus élémentaire et dont les hypothèses se trouvent également satisfaites, comme il est aisé de le constater.

Remarque 7. Un théorème analogue est vrai aussi pour l'espace (L^M), mentionné p. 70 (voir (I_2)).

Théorème 16. *On peut remplacer dans le théorème 15 (L^α) par (M_l) et par (C).*

Démonstration. Considérons l'ensemble H_∞ des fonctions $z(t)\in(M_l)$ assujetties à la condition (13) avec $\alpha'=1$ (cf. p. 75). La formule (25) ayant lieu pour tout $z(t)\in H_\infty$, les fonctionnelles $\int_a^b z(t)\,U(x,t)\,dt$ sont continues dans (M_l). Soit $\|x_n-x_0\|_\infty\to 0$. Choisissons $z_0(t)$ de façon à avoir

$$\int_a^b z_0(t)\,U(x_0,t)\,dt\geqslant\|U(x_0,t)\|_\infty-\varepsilon.$$

On a l'inégalité

$$\|U(x_0,t)\|_\infty-\varepsilon\leqslant\int_a^b z_0(t)\,U(x_0,t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\int_a^b z_0(t)\,U(x_n,t)\,dt\leqslant\|U(x_n,t)\|_\infty,$$

de sorte que

$$\varliminf_{n\to\infty}\|U(x_n,t)\|_\infty\geqslant\|U(x_0,t)\|_\infty.$$

Il en résulte que l'opération $U(x)$ est (M,M)-linéaire. Il existe par conséquent une constante $K>0$ telle que $\|U(x,t)\|_\infty\leqslant K\cdot\|x\|_\infty$. On en conclut en vertu du théorème 15 que l'opération $U(x)$ est (M_l,L^1)-linéaire; donc

$$x_n\overset{l}{\to}x_0\ \text{ entraîne }\ U(x_n,t)\overset{as}{\to}U(x,t)\tag{26}$$

et $\varlimsup_{n\to\infty}\|U(x_n)\|_\infty<\infty$, ce qui prouve que $U(x)$ est (M_l,M_l)-linéaire.

Dans le cas $Y=(C)$, la démonstration résulte directement du théorème 4, l'ensemble H_∞ étant fondamental dans (C) — ou bien du théorème 7, l'opération $U(x)$ étant en tout cas (M_l,M_l)-linéaire, de sorte qu'on a la relation (26).

Théorème 17. *Y étant l'un quelconque des espaces (L^α), (L^M), (VC), (V^*), (S), (C) et (C^*), soit $\{U_n(x)\}$, où $U_n(x)=U_n(x,t)$, une suite d'opérations (M_l,Y)-linéaires pour laquelle il existe une opération $U(x)=U(x,t)$ aux valeurs appartenant à Y et telle que*

$$U_n(x,t)\overset{as}{\to}U(x,t)\qquad\text{pour tout }x\in(M_l).$$

Alors l'opération $U(x)$ est (M_l,Y)-linéaire.

Démonstration. Les opérations $U_n(x)$ sont (M_l,S)-linéaires. En vertu du théorème 13, il en est donc de même de l'opération $U(x)$. Il suffit d'appliquer encore le théorème 7.

Théorème 18. *Pour que l'opération $U(x)=U(x,t)$ aux valeurs appartenant à l'espace (L^α) avec $\alpha\geqslant 1$ soit (M_l,L^α)-linéaire, il faut et il suffit que l'on ait*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x(t)\left(\sum_{i=1}^n\varphi_i(t)\,\psi_i(v)\right)dt=\int_a^v U(x,t)\,dt\tag{27}$$

pour tout $x\in(M_l)$ et pour tout $v\in\langle a,b\rangle$, où $\varphi_n(t)$ sont des fonctions intégrables indépendantes de x, mais dépendant de $U(x)$, et $\psi_n(v)$ sont des fonctions satisfaisant à la condition de Lipschitz, s'annulant pour $v=a$ et indépendantes de x et de $U(x)$.

Démonstration. Soit $\{\Phi_n(t)\}$ un système orthogonal, complet dans l'espace (L^1), composé de fonctions bornées et tel que

$$\int_a^b\left|\sum_{i=1}^n\Phi_i(t)\,\Phi_i(\tau)\right|d\tau\leqslant K\qquad\text{pour }a\leqslant t\leqslant b\text{ et }n=1,2,\dots$$ [15])

En admettant que l'opération $U(x)=U(x,t)$ est (M_l,L^α)-linéaire, les fonctionnelles $\int_a^b U(x,t)\,\Phi_i(t)\,dt$ peuvent être écrites, en vertu du théorème de Fichtenholz cité p. 66, sous la forme $\int_a^b x(t)\,\varphi_i(t)\,dt$ où $\varphi_i(t)$ sont des fonctions intégrables. Sous les hypothèses admises sur le système $\{\Phi_i(t)\}$ le développement de toute fonction

[15]) Tel est p. ex. le système connu de Haar et celui de Franklin; cf. S. Kaczmarz und H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Monografie Matematyczne, Tome V, Warszawa-Lwów 1935, p. 120-125.

$y(t)\,\epsilon\,(L^{\alpha})$ en série $\sum_{i=1}^{\infty}\int_a^b y(\tau)\Phi_i(\tau)\,d\tau\cdot\Phi_i(t)$ est convergent au sens de la norme adoptée dans (L^{α}). On a donc

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\int_a^b U(x,\tau)\left(\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(\tau)\,\Phi_i(t)\right)d\tau - U(x,t)\right\|_{\alpha}=0.$$

Il en résulte en particulier la condition (27), en posant

$$\psi_i(v)=\int_a^v \Phi_i(t)\,dt.$$

Ainsi, la condition (27) est nécessaire.

Sa suffisance résulte aussitôt du théorème 15, en posant

$$U_n(x,t)=\int_a^b x(\tau)\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\tau)\psi_i'(t)\right)d\tau.$$

On démontre par un raisonnement analogue le suivant

Théorème 19. *La relation* (27) *est nécessaire et suffisante pour que l'opération $U(x)=U(x,t)$ aux valeurs appartenant à (M_l) et à (C) respectivement soit (M_l,M_l)-linéaire et (M_l,C)-linéaire respectivement.*

Le même raisonnement implique le

Théorème 20. *Pour que l'opération $U(x)=U(x,t)$ soit (M_l,L^{α})-linéaire, il faut et il suffit que l'on ait*

$$(28)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_a^b\left|\int_a^b x(\tau)\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\tau)\,\Phi_i(t)\right)d\tau - U(x,t)\right|^{\alpha}dt=0,$$

où $\varphi_n(t)$ sont des fonctions intégrables indépendantes de x, et $\Phi_n(t)$ sont des fonctions continues (bornées) indépendantes de $U(x)$.

Remarque 8. Les théorèmes analogues aux théorèmes 18 et 20 sont vrais pour l'espace (L^{M}).

Théorème 21. *Pour que l'opération $U(x)=U(x,t)$ soit (M_l,M_l)-linéaire, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites:*

$$(29)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_a^b x(\tau)\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\tau)\,\Phi_i(t)\right)d\tau = U(x,t)\quad \textit{pour presque tout } t\,\epsilon\,\langle a,b\rangle,$$

$\varphi_n(t)$ et $\Phi_n(t)$ ayant le même sens que dans l'énoncé du théorème 20;

$$(30)\qquad \int_a^b\left|\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\tau)\,\Phi_i(t)\right|d\tau\leqslant K\qquad \textit{pour tout } t\,\epsilon\,\langle a,b\rangle.$$

Démonstration. Choisissons comme $\{\Phi_i(t)\}$ le système de Haar (cf. p. 83, renvoi [15]) — ou celui de Franklin, si nous voulons avoir les $\Phi_i(t)$ continues. En tenant compte de la propriété fondamentale de ce système et de la relation

$$\int_a^b U(x,\tau)\left(\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(\tau)\,\Phi_i(t)\right)d\tau=\int_a^b x(\tau)\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\tau)\,\Phi_i(t)\right)d\tau,$$

on parvient à la condition (29) et à la relation

$$\left\|\int_a^b x(\tau)\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\tau)\,\Phi_i(t)\right)d\tau\right\|_{\infty}\leqslant\|U(x,t)\|_{\infty}\leqslant K\cdot\|x\|_{\infty}$$

dont on déduit (30) de la manière connue. Les conditions (29) et (30) sont donc nécessaires.

Leur suffisance résulte de la condition (30), qui implique que $\|U(x,t)\|_{\infty}\leqslant K\cdot\|x\|_{\infty}$, et du théorème 17.

On démontre d'une manière analogue le

Théorème 22. *Pour que l'opération $U(x)=U(x,t)$ soit (M_l,C)-linéaire, il faut et il suffit que la convergence exprimée par l'égalité figurant dans* (29) *ait lieu pour $t\,\epsilon\,\langle a,b\rangle$ uniformément, les $\varphi_n(t)$ étant des fonctions intégrables ne dépendant pas de x et les $\Phi_n(t)$ — des fonctions continues ne dépendant pas de $U(x)$.*

5. Pour terminer, signalons quelques applications des théorèmes qui précèdent aux opérations à deux variables.

Définition 4. Toute opération $V(x,y)$ définie dans (M_l) sera dite *biadditive* lorsqu'elle y est, pour tout y fixe, opération additive de la variable x et, pour tout x fixe, opération additive de la variable y. L'opération biadditive $V(x,y)$ s'appellera *bilinéaire* dans (M_l) si les relations $x_n\to x_0$ et $y_n\to y_0$ entraînent la relation $V(x_n,y_n)\to V(x_0,y_0)$.

Théorème 23. *Pour que l'opération $V(x,y)$ définie dans l'espace (M_l) et dont les valeurs appartiennent à un espace du type (F) soit bilinéaire, il suffit qu'elle soit biadditive et continue par rapport à la variable x, et continue par rapport à la variable y.*

Démonstration. Soit $\{y_n\}$ une suite d'éléments de (M_l) qui est l-convergente vers $y_0 \epsilon (M_l)$.

Posons $V_n(x) = V(x, y_n)$. En vertu du théorème 13, $x_n \xrightarrow{l} x_0$ entraîne $V_n(x_n) = V(x_n, y_n) \to V(x_0, y_0)$, c. q. f. d.

Théorème 24. *Pour que la fonctionnelle biadditive $V(x,y)$ soit bilinéaire dans l'espace (M_l), il faut et il suffit qu'il existe des opérations (M_l, L^1)-linéaires $U_1(y,t)$ et $U_2(x,t)$ telles que l'on ait*

$$V(x,y) = \int_a^b x(t)\, U_1(y,t)\, dt = \int_a^b y(t)\, U_2(x,t)\, dt.$$

Démonstration. Admettons que, pour une fonction $y(t) \epsilon (M_l)$ fixe, $V(x,y)$ est une fonctionnelle linéaire de la variable x. En vertu du théorème de Fichtenholz cité p. 66, on a donc

$$V(x,y) = \int_a^b x(t)\, U_1(y,t)\, dt$$

pour une fonction intégrable $U_1(y,t)$. L'additivité de $V(x,y)$ par rapport à y implique aussitôt que $U_1(y,t)$ est une opération additive dans (L^1). Pour en démontrer la continuité, remarquons que toute fonctionnelle linéaire dans (L^1) peut être représentée dans la forme

$$\eta(z) = \int_a^b z(t)\, x(t)\, dt \quad \text{où} \quad z(t) \epsilon (L^1) \quad \text{et} \quad x(t) \epsilon (M_l)$$

et que $\eta(U_1(y,t)) = V(x,y)$ est une fonctionnelle linéaire de la variable y; en vertu du théorème 4', l'opération $U_1(y,t)$ est donc (M_l, L^1)-linéaire. Il est ainsi démontré que la condition est nécessaire.

Réciproquement, il est facile de voir qu'en admettant cette condition, $V(x,y)$, est une fonctionnelle linéaire aussi bien de la variable x que de la variable y. Reste à appliquer le théorème 23.

Remarque 9. Soit $k(t,v)$ une fonction définie pour $a \leqslant t \leqslant b$, $a \leqslant v \leqslant b$ et telle que pour toute fonction mesurable bornée $y(t)$ l'intégrale

$$\int_a^b y(t)\, k(t,v)\, dt$$

existe pour presque tout $v \epsilon \langle a,b \rangle$ et est une fonction intégrable de la variable v. Il résulte des théorèmes 8 et 24 que l'intégrale itérée

$$\int_a^b \left(x(v) \int_a^b y(t)\, k(t,v)\, dt \right) dv$$

est une fonctionnelle bilinéaire dans l'espace (M_l).

Il existe cependant des fonctionnelles bilinéaires dans (M_l) qui ne se laissent pas mettre sous cette forme. Telle est, par exemple, la fonctionnelle

$$\int_a^b x(t)\, y(t)\, dt \quad \text{où} \quad x, y \epsilon (M_l).$$

En effet, si on pouvait l'écrire sous forme d'intégrale itérée, il existerait une fonction $k(t,v)$ telle qu'on aurait

$$y(v) = \int_a^b y(t)\, k(t,v)\, dt$$

presque partout pour toute fonction $y(t) \epsilon (M_l)$. On aurait donc en particulier

$$\sin mv = \int_a^b \sin mt\, k(t,v)\, dt$$

presque partout; il en résulte pour $m \to \infty$ que $\sin mv \to 0$ presque partout, ce qui est impossible.

On peut néanmoins démontrer que *toute fonctionnelle bilinéaire dans l'espace (M_l) est limite d'une suite de fonctionnelles bilinéaires représentables sous forme d'intégrales itérées.*

Théorème 25. *Soit $k(t,v)$ une fonction mesurable définie dans le carré $a \leqslant t \leqslant b$, $a \leqslant v \leqslant b$. Si, quelles que soient les fonctions mesurables bornées $x(t)$ et $y(v)$, les deux intégrales itérées*

$$(31) \qquad \begin{aligned} I_1(x,y) &= \int_a^b \left(y(v) \int_a^b x(t)\, k(t,v)\, dt \right) dv, \\ I_2(x,y) &= \int_a^b \left(x(t) \int_a^b y(v)\, k(t,v)\, dv \right) dt \end{aligned}$$

existent, elles sont identiques.

Démonstration. On a en vertu de l'hypothèse

$$\int_a^b |k(t,v)|\,dt < \infty, \qquad \int_a^b |k(t,v)|\,dv < \infty \tag{32}$$

pour presque tout $v \in \langle a,b \rangle$ et pour presque tout $t \in \langle a,b \rangle$ respectivement. Posons

$$k_n(t,v) = \begin{cases} n & \text{lorsque } |k(t,v)| > n, \\ k(t,v) & \text{lorsque } |k(t,v)| \leqslant n. \end{cases}$$

Quelles que soient les fonctions mesurables bornées $x_0(t)$ et $y_0(v)$ où $\|x_0\|_\infty \leqslant 1$ et $\|y_0\|_\infty \leqslant 1$, il existe les limites

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \int_a^b x_0(t)\,k_n(t,v)\,dt = \int_a^b x_0(t)\,k(t,v)\,dt \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour presque tout } v \in \langle a,b \rangle, \\ &\lim_{n\to\infty} \int_a^b y_0(v)\,k_n(t,v)\,dv = \int_a^b y_0(v)\,k(t,v)\,dv \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour presque tout } t \in \langle a,b \rangle. \end{aligned} \tag{33}$$

Les intégrales (32) étant uniformément bornées dans des ensembles de mesure arbitrairement proche de $b-a$, les relations (33) entraînent l'existence des fonctions $x_1(t)$ et $y_1(t)$ où $\|x_1\|_\infty \leqslant 1$ et $\|y_1\|_\infty \leqslant 1$ pour lesquelles on a les relations:

$$\int_a^b |x_0(t) - x_1(t)|\,dt < \varepsilon, \qquad \int_a^b |y_0(v) - y_1(v)|\,dv < \varepsilon,$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left(y_1(v) \int_a^b x_1(t)\,k_n(t,v)\,dt \right) dv &= \int_a^b \left(y_1(v) \int_a^b x_1(t)\,k(t,v)\,dt \right) dv, \\ \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left(x_1(t) \int_a^b y_1(v)\,k_n(t,v)\,dv \right) dt &= \int_a^b \left(x_1(t) \int_a^b y_1(v)\,k(t,v)\,dv \right) dt. \end{aligned} \tag{34}$$

Il résulte de (34) par substitution de x_1 à x et y_1 à y dans (32) que $I_1(x_1,y_1) = I_2(x_1,y_1)$, car les intégrales itérées dans les membres gauches des égalités (34) sont égales. Il est ainsi démontré que les deux intégrales itérées sont identiques dans un ensemble dense dans (M_l). Comme elles sont en vertu des théorèmes 8 et 24 des fonctionnelles bilinéaires dans (M_l), on a $I_1(x,y) = I_2(x,y)$ quels que soient $x,y \in (M_l)$, c. q. f. d.

Le théorème 25 peut être étendu aux intégrales n fois itérées.

Remarque 10. On peut démontrer le théorème suivant, qui est en rapport avec le théorème 25:

Soit $k(t,v)$ une fonction mesurable définie dans le carré $a \leqslant t \leqslant b$, $a \leqslant v \leqslant b$. Si, quels que soient les ensembles mesurables A et B, les deux intégrales itérées

$$\int_A \left(\int_B k(t,v)\,dt \right) dv, \qquad \int_B \left(\int_A k(t,v)\,dv \right) dt$$

existent, elles sont identiques.

(Reçu par la Rédaction le 3. 6. 1947).