Sur la limitation des intégrales des systèmes d'équations différentielles linéaires ordinaires

par

T. WAŻEWSKI (Kraków).

Les considérations qui suivent concernent un système d'équations (voir (1), p. 49) dont les coefficients sont des fonctions *complexes* d'une variable *réelle* x.

Le théorème 1 ramène la limitation des intégrales de ce système à celle de la racine caractéristique la plus grande $S(x)$ et la plus petite $s(x)$ d'une certaine forme hermitienne Q (voir (3), p. 49). La méthode d'obtenir la limitation des intégrales consiste à résoudre certaines inégalités différentielles (voir (28) et (29), p. 52).

Le théorème 2 indique quelques limitations particulières des intégrales, découlant de différentes sortes de la limitation de $s(x)$ et $S(x)$.

Le théorème 3 concerne les conditions suffisantes pour que les intégrales en question soient bornées. Les corollaires (α), (β), (γ) et (δ) donnent quelques exemples des telles conditions suffisantes. On y retrouve, en particulier, une condition de M. Butlewski[1]) quelque peu généralisée.

La remarque 2 (p. 56) se rapporte au cas des coefficients *réels* dans le système (1). Elle fait voir que, dans ce cas, on peut se passer (ce qui d'ailleurs n'est point nécessaire) des formes hermitiennes et les remplacer par les formes quadratiques réelles convenables.

La limitation fournie par le théorème 1 est, dans un certain sens, la meilleure possible. On peut obtenir une limitation moins fine — et cependant suffisante pour la plupart des applications —

[1]) Z. Butlewski, *Sur les intégrales bornées des équations différentielles*, Annales de la Soc. Polon. de Math. 18(1939), p. 47; cf. Studia Math., ce volume, p. 40.

par une voie plus courte, en se passant entièrement de la théorie des formes quadratiques et de celle des formes hermitiennes. Pour cette raison, la démonstration du théorème 4, qui est moins général, paraît mériter un certain intérêt. Elle est à la fois plus rapide et plus directe que celle du théorème 1.

Les théorèmes 1-3 m'ont été suggérés par la lecture des travaux précités de M. Butlewski et par le fait que j'avais trouvé le théorème 4 indépendemment par une autre voie.

1. Hypothèse H. Dans le système d'équations

$$y_i'(x)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)\,y_j(x)+b_i(x),\qquad i=1,2,\dots,n, \tag{1}$$

les fonctions de la variable réelle x sont complexes et elles sont continues dans l'intervalle ouvert (borné ou non)

$$\Delta=(\alpha,\beta)\qquad\text{où}\qquad -\infty\leqslant\alpha<\beta\leqslant+\infty. \tag{2}$$

Notations. $\bar c$ désignant le nombre conjugué au nombre complexe c, introduisons pour tout x de l'intervalle Δ la forme hermitienne suivante des variables auxiliares $\zeta_1,\dots,\zeta_n$:

$$Q(x;\zeta_1,\dots,\zeta_n)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_{ij}(x)+\bar a_{ji}(x)}{2}\,\zeta_i\,\bar\zeta_j\ ^{2)}. \tag{3}$$

On peut écrire cette forme de la façon suivante

$$Q=\sum_{i,j}c_{ij}(x)\,\zeta_i\bar\zeta_j\qquad\text{où}\qquad c_{ij}(x)=\frac{a_{ij}(x)+\bar a_{ji}(x)}{2}. \tag{4}$$

$S(x)$ et $s(x)$ désigneront respectivement la plus grande et la plus petite racine caractéristique de la forme (3).

Remarque. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $t(x)$ satisfasse à l'inégalité

$$t(x)\leqslant s(x), \tag{5}$$

consiste en ce que l'on ait pour tous les $\zeta_1,\dots,\zeta_n$:

$$t(x)\sum_i|\zeta_i|^2\leqslant Q(x;\zeta_1,\dots,\zeta_n). \tag{6}$$

[2]) Chaque matrice complexe $\|a_{ij}\|$ peut être décomposée (d'une seule façon) en somme d'une matrice hermitienne et d'une matrice hermitienne gauche $\left\|a_{ij}\right\|=\left\|\frac{a_{ij}+\bar a_{ji}}{2}\right\|+\left\|\frac{a_{ij}-a_{ji}}{2}\right\|$; cf. Mac Duffee *The theory of matrices* (1933), p. 25. La matrice de la forme hermitienne (3) constitue la partie hermitienne de la matrice $\|a_{ij}\|$.

Pareillement, l'inégalité

(7) $$Q(x;\zeta_1,\dots,\zeta_n)\leqslant T(x)\sum_i|\zeta_i|^2$$

constitue la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $T(x)$ satisfasse à l'inégalité

(8) $$S(x)\leqslant T(x)$$ [3].

En appliquant à la forme (3) l'inégalité de Lagrange

$$|\sum_i u_i v_i|^2\leqslant\sum_i|u_i|^2\cdot\sum_k|v_k|^2$$

et ensuite l'inégalité $2|p\cdot q|\leqslant|p|^2+|q|^2$, on obtient

$$|Q|\leqslant\sqrt{\sum_{i,j}|c_{ij}|^2}\ \sum_k|\zeta_k|^2\leqslant\sqrt{\sum_{i,j}|a_{ij}|^2}\ \sum_k|\zeta_k|^2$$

et par suite

(9) $$-\sqrt{\sum_{i,j}|a_{ij}|^2}\leqslant-\sqrt{\sum_{i,j}|c_{ij}|^2}\leqslant s(x)\leqslant S(x)\leqslant\sqrt{\sum_{i,j}|c_{ij}|^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i,j}|a_{ij}|^2},$$

donc à plus forte raison

(10) $$-\sum_{i,j}|a_{ij}|\leqslant-\sum_{i,j}|c_{ij}|\leqslant s(x)\leqslant S(x)\leqslant\sum_{i,j}|c_{ij}|\leqslant\sum_{i,j}|a_{ij}|.$$

Théorème 1. *Admettons que les fonctions $t(x)$, $T(x)$, $l(x)$ et $L(x)$ soient continues dans l'intervalle* (2) *et y remplissent les inégalités*

(11) $$t(x)\leqslant s(x)\leqslant S(x)\leqslant T(x),$$

(12) $$l(x)\leqslant-\sqrt{\sum_i|b_i(x)|^2},\qquad L(x)\geqslant\sqrt{\sum_i|b_i(x)|^2}.$$

Soit, pour le système (1) *assujetti à l'hypothèse* H,

(13) $$y_i=\psi_i(x;\xi,\eta_1,\dots,\eta_n)$$

l'intégrale de ce système issue du point $(\xi,\eta_1,\dots,\eta_n)$ *où* $\alpha<\xi<\beta$.

Posons:

(14) $$r(x;\xi,\eta_1,\dots,\eta_n)=\sqrt{\sum_i|\psi_i(x,\xi,\eta_1,\dots,\eta_n)|^2}=\sqrt{\sum_i\psi_i,\overline{\psi}_i},$$

(15) $$\eta=\sqrt{\sum_i|\eta_i|^2},$$

[3]) C'est évident lorsque $Q=\sum_i s_i(x)\zeta_i\overline{\zeta}_i=\sum_i s_i(x)|\zeta_i|^2$. On ramène le cas général à ce cas particulier en appliquant aux ζ_i une transformation unitaire convenable.

et introduisons les équations différentielles auxiliares:

(16) $$z'(x)=T(x)\,z(x)+L(x),$$

(17) $$z'(x)=t(x)\,z(x)+l(x).$$

Désignons respectivement par $\Phi(x;\xi,\eta)$ et $\varphi(x;\xi,\eta)$ l'intégrale de l'équation (16) *et celle de* (17) *issue du point (ξ,η) où η est définie par* (15). *On a alors les inégalités:*

(18) $$\varphi(x;\xi,\eta)\leqslant r(x;\xi,\eta_1,\dots,\eta_n)\leqslant\Phi(x;\xi,\eta)\qquad pour\ \xi\leqslant x<\beta,$$

(19) $$\Phi(x;\xi,\eta)\leqslant r(x;\xi,\eta_1,\dots,\eta_n)\leqslant\varphi(x;\xi,\eta)\qquad pour\ \alpha<x\leqslant\xi,$$

où (comme on sait):

(20) $$\Phi(x;\xi,\eta)=\Big\{\eta+\int_\xi^x[L(u)\exp(-\int_\xi^u T(v)\,dv)\,du]\Big\}\exp\Big(\int_\xi^x T(s)ds\Big),$$

(21) $$\varphi(x;\xi,\eta)=\Big\{\eta+\int_\xi^x[l(u)\ \exp(-\int_\xi^u t(v)\,dv)\,du]\Big\}\exp\Big(\int_\xi^x t(s)\,ds\Big).$$

Démonstration. Fixons l'attention sur un point quelconque $(\xi,\eta_1,\dots,\eta_n)$ où $\alpha<\xi<\beta$ et posons pour abréger:

(22) $$\psi_i(x)=\psi_i(x;\xi,\eta_1,\dots,\eta_n),\qquad r(x)=r(x;\xi,\eta_1,\dots,\eta_n).$$

On vérifie facilement que

(23) $$r'(x)=\frac{1}{2r(x)}\sum_i[\psi_i(x)\overline{\psi}_i'(x)+\psi_i'(x)\overline{\psi}_i(x)]\qquad\text{lorsque } r(x)>0,$$

(24) $$D_+r(x)=-D_-r(x)=\sqrt{\sum_i|\psi_i'(x)|^2}=\sqrt{\sum_i\psi_i'\overline{\psi}_i'}\qquad\text{lorsque } r(x)=0,$$

où $D_+r(x)$ et $D_-r(x)$ désignent respectivement la dérivée à droite et à gauche de $r(x)$.

Comme les ψ_i satisfont au système (1), on a les identités:

(25) $$\psi_i'(x)=\sum_j a_{ij}(x)\,\psi_j(x)+b_i(x),\qquad \overline{\psi}_i'(x)=\sum_j\overline{a}_{ij}(x)\,\overline{\psi}_j(x)+\overline{b}_i(x),$$

qui entraînent

(26) $$\sum_i(\psi_i\overline{\psi}_i'+\psi_i'\overline{\psi}_i)=\sum_{i,j}(a_{ij}\psi_j\overline{\psi}_i+\overline{a}_{ij}\overline{\psi}_j\psi_i)+\sum_i(b_i\overline{\psi}_i+\overline{b}_i\psi_i)=$$
$$=2\sum_{i,j}\frac{a_{ij}+\overline{a}_{ji}}{2}\psi_j\overline{\psi}_i+\sum_i(b_i\overline{\psi}_i+\overline{b}_i\psi_i).$$

En posant $\zeta_i=\psi_i(x)$ dans (6) et (7), on en déduit en vertu de l'hypothèse (11) l'inégalité suivante valable pour $\alpha<x<\beta$:

$$t(x)\sum|\psi_i|^2=t(x)r^2\leqslant\sum_{i,j}\frac{a_{ij}+\bar a_{ji}}{2}\psi_i\bar\psi_j\leqslant T(x)\sum|\psi_i|^2=T(x)r^2.$$

En se servant de l'inégalité (12), on obtient d'une façon analogue l'inégalité

$$2l(x)\,r(x)\leqslant\sum_i\{b_i\bar\psi_i+\bar b_i\psi_i\}\leqslant 2L(x)\,r(x).$$

Ces deux inégalités et l'identité (26) conduisent à l'inégalité

$$2l(x)r(x)+2t(x)[r(x)]^2\leqslant\sum_i\{\psi_i\bar\psi_i'+\psi_i'\bar\psi_i\}\leqslant 2L(x)r(x)+2T(x)[r(x)]^2 \tag{27}$$

valable pour $\alpha<x<\beta$.

Nous allons montrer que, pour $\alpha<x<\beta$, on a les inégalités différentielles:

$$t(x)r(x)+l(x)\leqslant D_+r(x)\leqslant T(x)r(x)+L(x), \tag{28}$$

$$t(x)r(x)+l(x)\leqslant D_-r(x)\leqslant T(x)r(x)+L(x). \tag{29}$$

Distingons deux cas: $r(x)>0$ et $r(x)=0$. Dans le premier cas, les inégalités (28) et (29) résultent immédiatement de (23) et (27). Dans le second, on a d'après (25):

$$\psi_i(x)=0,\qquad \psi_i'(x)=b_i(x)$$

et, en raison de (24):

$$D_+r(x)=\sqrt{\sum_i|b_i|^2}, \tag{30}$$

$$D_-r(x)=-\sqrt{\sum_i|b_i|^2}. \tag{31}$$

Les inégalités (28) et (29) prennent dans ce cas la forme:

$$l(x)\leqslant\sqrt{\sum|b_i|^2}\leqslant L(x), \tag{32}$$

$$l(x)\leqslant-\sqrt{\sum|b_i|^2}\leqslant L(x), \tag{33}$$

et elles sont vérifiées en raison de (12). Ainsi, les inégalités différentielles (28) et (29) subsistent pour $\alpha<x<\beta$ sans aucune restriction. Elles entraînent facilement[4]) les inégalités (18) et (19), c. q. f. d.

[4]) Cf. E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig 1930. La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème 5, p. 91. Il faut tenir compte du théorème auxiliaire 1, p. 92.

2. L'applicabilité du théorème 1 aux cas pratiques n'est que rarement immédiate car on *postule* dans ce théorème l'existence des fonctions continues $t(x)$ et $T(x)$, assujetties aux inégalités (11) et (12), *sans indiquer la construction* de ces fonctions au moyen des fonctions $a_{ij}(x)$ et $b_i(x)$, qui interviennent dans le système (1). Le théorème 2 qui suit fournit quelques exemples effectifs des fonctions $t(x)$ et $T(x)$ se rapportant ou bien au système (1) tout à fait général ou bien satisfaisant à certaines conditions accessoires.

Théorème 2. *Le système* (1) *étant assujetti à l'hypothèse* H, *on a l'inégalité* (11) *dans chacun des cas suivants:*

C_1. $\quad t(x)=s(x),\qquad T(x)=S(x);$

C_2. $\quad t(x)=-\sqrt{\sum_{i,j}|c_{ij}|^2},\qquad T(x)=\sqrt{\sum_{i,j}|c_{ij}|^2};$

C_3. $\quad t(x)=-\sqrt{\sum_{i,j}|a_{ij}|^2},\qquad T(x)=\sqrt{\sum_{i,j}|a_{ij}|^2};$

C_4. $\quad t(x)=-\sum_{i,j}|c_{ij}|,\qquad T(x)=\sum_{i,j}|c_{ij}|;$

C_5. $\quad t(x)=-\sum_{i,j}|a_{ij}|,\qquad T(x)=\sum_{i,j}|a_{ij}|;$

C_6. *La forme hermitienne* (3) *est, pour tous les x de l'intervalle* (2), *positive (ou semi-positive) définie et*

$$t(x)=0,\qquad T(x)=\sum_i\frac{a_{ii}+\bar a_{ii}}{2}\ ^{5)}.$$

C_7. *La forme hermitienne* (3) *est, pour tous les x de l'intervalle* (2), *négative (ou semi-négative) définie et*

$$t(x)=\sum_i\frac{a_{ii}+\bar a_{ii}}{2},\qquad T(x)=0.$$

De plus, si les fonctions $t(x)$ et $T(x)$ ont l'une des formes indiquées dans C_1-C_7, *les intégrales du système* (1) *satisfont aux inégalités* (18) *et* (19), *les fonctions Φ et φ étant définies par les formules* (20) *et* (21), *pourvu que $l(x)$ et $L(x)$ soient continues et satisfassent à* (12).

Démonstration. *Ad* C_1. Il suffit de remarquer que les racines la plus grande et la plus petite d'une forme hermitienne

[5]) Il est intéressant d'observer que les fonctions $t(x)$ et $T(x)$ définies par ces formules ne dépendent pas des coefficients a_{ij} pour lesquels on a $i\neq j$.

sont des fonctions continues des coefficients de cette forme. $S(x)$ et $s(x)$ sont donc continues dans l'intervalle $\alpha < x < \beta$.

Ad C_2. Il suffit de s'appuyer sur la Remarque p. 49, en appliquant l'inégalité (9).

Ad C_3, C_4 *et* C_5. C'est une conséquence immédiate de C_2.

Ad C_6. Soit $s = s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_n = S$ la suite complète des racines de l'équation caractéristique:

$$\det(c_{ij} - \delta_{ij}\sigma) = 0$$

où

$$c_{ij} = \frac{a_{ij} + \bar{a}_{ji}}{2}, \qquad \delta_{ij} = 0 \quad \text{pour } i \neq j \quad \text{et} \quad \delta_{ii} = 1.$$

L'équation caractéristique est de la forme

$$\sigma^n + \sum_{i=1}^{n} e_i \sigma^{n-i} = 0 \qquad \text{où} \qquad e_1 = -\sum_i c_{ii} = -\sum_i s_i.$$

La forme Q étant positive (ou semi-positive) définie, on a $s_i \geqslant 0$. Il en résulte que $0 \leqslant s_1 = s \leqslant S = s_n \leqslant \sum s_i$, d'où l'on conclut immédiatement que les fonctions $t(x)$ et $T(x)$ intervenant dans C_6 satisfont aux inégalités (11).

Ad C_7. Ce cas se ramène au précédent par l'introduction de la forme hermitienne auxiliaire $Q_1 = -Q$, qui est positive (ou semi-positive) définie.

Le théorème 2 se trouve ainsi ramené au théorème 1.

3. Nous établirons maintenant quelques conditions suffisantes pour que les intégrales du système (1) soient bornées.

Théorème 3. *Sous les hypothèses du théorème* 1:

1° *Si les fonctions* $\varphi(x;\xi,\eta)$ *et* $\Phi(x;\xi,\eta)$ *qui figurent dans* (20) *et* (21) *avec* η *assujetti à* (15), *sont bornées dans l'intervalle* $\alpha < x < \beta$, *l'intégrale* (13) *est aussi bornée dans cet intervalle.*

2° *Si la fonction* $\Phi(x;\xi,\eta)$ *est bornée dans l'intervalle* $\xi \leqslant x < \beta$, *l'intégrale* (13) *est aussi bornée dans cet intervalle.*

3° *Si la fonction* $\varphi(x;\xi,\eta)$ *est bornée dans l'intervalle* $\alpha < x \leqslant \xi$, *l'intégrale* (13) *est aussi bornée dans cet intervalle.*

Ce théorème constitue une conséquence immédiate du théorème 1 (cf. (18) et (19)).

Corollaires. *Sous les mêmes hypothèses:*

(α) *Toutes les intégrales du système* (1) *sont bornées dans l'intervalle* $\xi \leqslant x < \beta$ *lorsque*

$$\overline{\lim_{x\to\beta}} \left| \int_\xi^x T(u)\,du \right| < +\infty \qquad et \qquad \overline{\lim_{x\to\beta}} \left| \int_\xi^x L(u)\,du \right| < +\infty.$$

Toutes les intégrales du système (1) *sont bornées dans l'intervalle* $\alpha < x \leqslant \xi$ *lorsque*

$$\overline{\lim_{x\to\alpha}} \left| \int_\xi^x t(u)\,du \right| < +\infty \qquad et \qquad \overline{\lim_{x\to\alpha}} \left| \int_\xi^x l(u)\,du \right| < +\infty.$$

On voit, en effet, que dans ce cas les prémisses du théorème 3 sont vérifiées.

(β) *Toutes les intégrales du système* (1) *sont bornées dans l'intervalle* $\xi \leqslant x < \beta$ *lorsque*

$$\int_\xi^\beta |T(u)|\,du < +\infty \qquad et \qquad \int_\xi^\beta |L(u)|\,du < +\infty.$$

Elles sont bornées dans l'intervalle $\alpha < x \leqslant \xi$ *lorsque*

$$\int_\alpha^\xi |t(u)|\,du < +\infty \qquad et \qquad \int_\alpha^\xi |l(u)|\,du < +\infty.$$

C'est une conséquence immédiate de (α).

(γ) *Toutes les intégrales du système* (1) *sont bornées dans l'intervalle* $\xi \leqslant x < \beta$ *lorsque* (dans la notation de (4)):

$$\int_\xi^\beta |c_{ij}(u)|\,du < +\infty \text{ [6]} \qquad et \qquad \int_\xi^\beta |b_i(u)|\,du < +\infty \qquad (i,j = 1,\ldots,n).$$

Elles sont bornées dans l'intervalle $\alpha < x \leqslant \xi$ *lorsque*

$$\int_\alpha^\xi |c_{ij}(u)|\,du < +\infty \text{ [6]} \qquad et \qquad \int_\alpha^\xi |b_i(u)|\,du < +\infty \qquad (i,j = 1,\ldots,n).$$

C'est une conséquence immédiate de (β), si l'on choisit comme $t(x)$ et $T(x)$ les fonctions indiquées dans la partie C_4 du théo-

[6]) On peut remplacer dans ces inégalités c_{ij} par a_{ij}.

rème 2, et comme $l(x)$ et $L(x)$ les fonctions $-\sum_i |b_i(x)|$ et $\sum_i |b_i(x)|$ respectivement.

Nous retrouvons ainsi le théorème, légèrement généralisé, de M. Butlewski.

(δ) *Admettons que le système* (1) *soit homogène,* (c.-à-d. que $b_i(x) \equiv 0$ pour $i=1,2,\dots,n$). *Si la forme hermitienne* (3) *est négative (où semi-négative) pour tous les x de l'intervalle $\xi \leqslant x < \beta$, toutes les intégrales du système* (1) *sont bornées dans l'intervalle $\xi \leqslant x < \beta$.*

Cf. théorème 2, cas C_7.

Pareillement, toutes les intégrales de ce système sont bornées dans l'intervalle $a < x \leqslant \xi$ lorsque la forme hermitienne (3) *est positive (ou semi-positive) pour tous les x de cet intervalle.*

Cf. théorème 2, cas C_6.

Remarques. 1. En partant des autres cas énumérés dans l'énoncé du théorème 2, on parvient à des diverses autres conditions suffisantes pour que les intégrales du système (1) soient bornées.

2. Tous les résultats précédents restent évidemment vrais sans *aucune* modification lorsque les fonctions $a_{ij}(x)$ et $b_i(x)$, qui interviennent dans le système (1), ainsi que les intégrales $y_i(x)$ de ce système, sont *réelles.*

Il est intéressant que, *dans ce cas, on peut se passer de la théorie des formes hermitiennes.*

On peut notamment remplacer les racines caractéristiques, la plus grande $S(x)$ et la plus petite $s(x)$, de la forme hermitienne (3) respectivement par la plus grande et la plus petite racine de la forme *quadratique réelle*

$$Q_1 = \sum_{i,j} \frac{a_{ij}+a_{ji}}{2} \lambda_i \lambda_j .$$

En effet, l'équation

$$\det\left(\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2} - \delta_{ij}\, s\right) = 0$$

est, dans ce cas, à la fois l'équation caractéristique de la forme hermitienne Q et de la forme quadratique réelle Q_1.

4. Lemme. *Soit $\{y_i(x)\}$, où $i=1,\dots,n$, une suite de fonctions complexes de la variable réelle x qui toutes possèdent une dérivée finie au point x et sont définies au voisinage de ce point. Posons*

$$r(x) = \sqrt{\sum_i |y_i(x)|^2} = \sqrt{\sum_i y_i(x)\,\overline{y}_i(x)}, \tag{34}$$

où $\overline{y}_i(x)$ désigne la fonction complexe conjuguée à $y_i(x)$.

Alors, $D_+ r(x)$ et $D_- r(x)$ désignant respectivement la dérivée à droite et à gauche de $r(x)$, on a les inégalités:

$$-\sqrt{\sum_i |y_i'(x)|^2} \leqslant D_+ r(x) \leqslant \sqrt{\sum_i |y_i'(x)|^2}, \tag{35}$$

$$-\sqrt{\sum_i |y_i'(x)|^2} \leqslant D_- r(x(\leqslant \sqrt{\sum_i |y_i'(x)|^2}. \tag{36}$$

Démonstration. Il résulte des formules (34) que les dérivées $D_+ r(x)$ et $D_- r(x)$ existent (les cas $r(x) \neq 0$ et $r(x)=0$ sont à traiter séparément). La distance des points complexes $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ et $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ étant définie par la formule

$$\varrho(A,B) = \sqrt{\sum_i |a_i - b_i|^2},$$

on a l'inégalité du triangle:

$$-\varrho(B,C) \leqslant \varrho(A,C) - \varrho(A,B) \leqslant \varrho(B,C).$$

Considérons le triangle à sommets:

$$A=(0,\dots,0), \quad B=(y_1(x),\dots,y_n(x)), \quad C=(y_1(x+h),\dots,y_n(x+h)).$$

On a

$$-\sqrt{\sum_i |y_i(x+h)-y_i(x)|^2} \leqslant r(x+h) - r(x) \leqslant \sqrt{\sum_i |y_i(x+h)-y_i(x)|^2}.$$

En divisant cette inégalité d'abord par $h>0$; puis par $h<0$, et en passant à la limite avec $h \to 0$, on obtient les inégalités (35) et (36).

Théorème 4. *Admettons que les fonctions (réelles ou complexes) $a_{ij}(x)$ et $b_i(x)$ de la variable réelle x soient continues dans l'intervalle* (2). *Soit, comme auparavant,* (13) *l'intégrale du système* (1) *issue du point $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n)$. Posons:*

$$T(x) = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}(x)|^2}, \qquad L(x) = \sqrt{\sum_i |b_i(x)|^2} \tag{37}$$

et introduisons les équations différentielles auxiliaires:

$$z'(x)=T(x)\,z(x)+L(x), \tag{38}$$

$$z'(x)=-T(x)\,z(x)-L(x). \tag{39}$$

Désignons respectivement par $\Phi(x;\xi,\eta)$ *et* $\varphi(x;\xi,\eta)$ *l'intégrale de l'équation* (38) *et* (39) *issue du point* (ξ,η).

On a alors les inégalités[7]:

$$\varphi\Big(x;\xi,\sqrt{\sum|\eta_i|^2}\Big)\leqslant\sqrt{\sum_i|\psi_i(x;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_n)|^2}\leqslant\Phi\Big(x;\xi,\sqrt{\sum|\eta_i|^2}\Big) \tag{40}$$

pour $\xi\leqslant x<\beta$,

$$\Phi\Big(x;\xi,\sqrt{\sum|\eta_i|^2}\Big)\leqslant\sqrt{\sum_i|\psi_i(x;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_n)|^2}\leqslant\varphi\Big(x;\xi,\sqrt{\sum|\eta_i|^2}\Big) \tag{41}$$

pour $a<x\leqslant\xi$.

Démonstration. Nous appliquerons le lemme qui précède en admettant que les fonctions $y_i(x)$ satisfont au système (1). Il vient:

$$\sum_i|y_i'(x)|^2\leqslant\sum_i\{|b_i|+\sum_j|a_{ij}|\cdot|y_j|\}^2=\sum_i(A_i+B_i+C_i)$$

où $\quad A_i=|b_i|^2, \qquad B_i=2|b_i|\sum_j|a_{ij}|\cdot|y_j|, \qquad C_i=\{\sum_j|a_{ij}|\cdot|y_j|\}^2.$

On a en vertu de l'inégalité de Lagrange:

$$\sum_i B_i\leqslant 2\sqrt{\sum_i|b_i|^2}\,\sqrt{\sum_i\{\sum_j|a_{ij}|\cdot|y_j|\}^2}\leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{\sum_i|b_i|^2}\,\sqrt{\sum_j|y_j|^2}\,\sqrt{\sum_{i,j}|a_{ij}|^2}=2r\,L(x)\,T(x),$$

$$\sum_i C_i\leqslant\{\sum_j|y_j|^2\}\cdot\sum_{i,j}|a_{ij}|^2=r^2T^2, \qquad \sum A_i=L^2.$$

Par conséquent

$$\sum_i|y_i'(x)|^2\leqslant(rT+L)^2,$$

d'où en raison de (35) et (36):

$$-T(x)\,r(x)-L(x)\leqslant D_+\,r(x)\leqslant T(x)\,r(x)+L(x),$$

$$-T(x)\,r(x)-L(x)\leqslant D_-\,r(x)\leqslant T(x)\,r(x)+L(x).$$

[7]) où (comme on sait) l'intégrale $\Phi(x;\xi,\eta)$ est donnée par la formule (20), et la formule pour $\varphi(x;\xi,\eta)$ résulte de (21) en y remplaçant $t(x)$ par $-T(x)$ et $l(x)$ par $-L(x)$.

Ces inégalités différentielles, qui sont étroitement liées avec les équations (38) et (39), entraînent[8]:

$$\varphi(x;\xi,r(\xi))\leqslant r(x)\leqslant\Phi(x;\xi,r(\xi)) \qquad \text{pour} \quad \xi\leqslant x<\beta,$$

$$\Phi(x;\xi,r(\xi))\leqslant r(x)\leqslant\varphi(x;\xi,r(\xi)) \qquad \text{pour} \quad a<x\leqslant\xi.$$

En posant $y_i(x)=\psi_i(x;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_n)$, on obtient

$$r(x)=\sqrt{\sum_i|\psi_i(x;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_n)|^2}, \qquad r(\xi)=\sqrt{\sum_i|\eta_i|^2},$$

de sorte que les inégalités précédentes coïncident avec les inégalités (40) et (41), ce qui achève la démonstration.

[8]) E. Kamke, loc. cit., p. 91 et 92.

(Reçu par la Rédaction le 22. 5. 1947).