Alors les $3n$ fonctions biréguličres

$$x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t),\ y_1(t),\ y_2(t),\ \ldots,\ y_n(t),\ z_1(t),\ z_2(t),\ \ldots,\ z_n(t)$$

sont mutuellement indépendantes. Le temps relatif de séjour du centroïde (ξ, η, ζ) de l'essaim dans le cube

$$|\xi| < 10^{-3}, \quad |\eta| < 10^{-3}, \quad |\zeta| < 10^{-3}$$

est donc égal à

$$\left(0{\cdot}999978 \pm \frac{0{\cdot}5}{10^6}\right)^3,$$

car les trois coordonnées ξ, η, ζ sont mutuellement indépendantes.

Cette proposition est libre des considérations probabilistes; elle exprime un fait de cinématique pure. On peut lui donner un sens physique en disant, par définition, que la probabilité d'un état soit égale au temps relatif durant lequel cet état est réalisé. En interprétant notre modèle de cette manière, on voit qu'il obéit aux mêmes lois du calcul des probabilités que celles qu'on cherche d'habitude à démontrer par l'hypothèse du chaos initial ou final. D'autre part, on peut choisir un point quelconque de l'essaim, p. ex. celui à l'indice $k = 1\,258\,637$, et un moment quelconque, p. ex. $t = 85\,792$, et en calculer la position en ce moment, les coordonnées $x_k(t)$, $y_k(t)$ et $z_k(t)$ étant données par des formules explicites très simples.

Notre exemple peut servir ainsi à réfuter le prejugé d'après lequel les conceptions „déterministe" et „statistique" seraient incompatibles.

(Reçu par la Rédaction le 12, 8. 1946).

Sur les fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz généralisée (I)

par

W. ORLICZ (Poznań).

1. Soient $\omega(h)$ et $\omega_1(h)$ deux fonctions non décroissantes, définies pour $0 \leqslant h \leqslant l$, ne s'annulant que pour $h = 0$ et tendant vers 0 avec h.

Les fonctions $f(x)$ considerées dans la suite seront supposées définies pour tout x réel et uniformément bornées.

Posons $$\gamma(h) = \sup_{0 < k \leqslant h} \frac{k}{\omega(k)}.$$

Le résultat principal de cette Note[1]) est contenu dans le théorème suivant, qui donne une réponse complète à un problème de S. Ruziewicz.

Pour qu'il existe une fonction $f(x)$ de période l satisfaisant pour chaque x aux conditions[2])*:*

(1) $$|f(x+h) - f(x)| \leqslant \omega(|h|) \qquad \textit{pour tout} \quad |h| \leqslant l,$$

(2) $$\overline{\lim_{h \to 0}} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{\omega_1(|h|)} = +\infty,$$

il faut et il suffit que l'on ait

(3) $$\underline{\lim_{h \to +0}} \frac{\omega_1(h)}{h} \gamma(h) = 0\ ^{3}).$$

[1]) dont tous les résultats datent de l'année 1940, mais à cause de la guerre n'ont été présentés qu'à la séance du 10 avril 1945 de la Société Polonaise de Mathématiques (Section de Cracovie).

[2]) L'inégalité (1) implique l'inégalité $m(h) \leqslant \omega(h)$ pour le module de continuité $m(h)$ de la fonction $f(x)$.

[3]) Bien entendu, y compris le cas où $\gamma(h) = +\infty$ pour $0 < h \leqslant h_0$; on a alors $\underline{\lim_{h \to +0}} \frac{\omega_1(h)}{h} \gamma(h) = +\infty$.

La nécessité de la condition (3) résulte du théorème 1; la suffisance se démontre à l'aide du théorème 2 en construisant effectivement, par une méthode analogue à celle de Weierstrass, une fonction assujettie aux conditions (1) et (2). L'existence d'une telle fonction est établie dans le théorème 3 aussi par une autre méthode, à savoir, à l'aide de la notion de catégorie de Baire. La seconde méthode ne conduit qu'indirectement aux exemples effectifs, mais elle présente quelques avantages vis-à-vis de la méthode constructive: elle permet p. ex. de condenser la singularité en question. Enfin, quelques cas particuliers conduisant aux résultats déjà connus en sont déduits et une construction des fonctions jouissant de quelque singularités, basée sur le théorème 2 et fort simple, est donnée, en particulier celle d'une fonction satisfaisant partout à une condition de Hölder avec l'exposant $\gamma < 1/s$ et qui ne satisfait nulle part à la même condition avec l'exposant $\gamma > 1/s$.

2. Théorème 1. *Si*

(4) $$\varliminf_{h\to+0} \frac{\omega_1(h)}{h}\gamma(h) > 0,$$

toute fonction $f(x)$ satisfaisant pour chaque x à la condition (1), *satisfait à la condition:*

(5) $$|f(x+h)-f(x)| \leqslant K\omega_1(|h|) \qquad \text{pour} \qquad |h|\leqslant l,$$

où K est une constante indépendante de h.

Démonstration. Admettons d'abord que

$$\varlimsup_{h\to+0} \frac{h}{\omega(h)} > +\infty.$$

La relation (4) étant remplie, il existe un $\varepsilon_0 > 0$ et un $h_0 > 0$ tels que $0 < h \leqslant h_0$ entraîne pour un k satisfaisant à l'inégalité $0 < k \leqslant h$ la relation

(6) $$\frac{\omega_1(h)}{h}\frac{k}{\omega(k)} \geqslant \varepsilon_0.$$

Posons $\mathrm{E}(hk^{-1}) = n$; si $0 \leqslant h \leqslant h_0$, on a:

(7) $$|f(x+h)-f(x)| \leqslant |f(x+k)-f(x)| + |f(x+2k)-f(x+k)| + \ldots$$
$$\ldots + |f(x+nk)-f(x+(n-1)k)| + |f(x+h)-f(x+nk)| \leqslant$$
$$\leqslant (n+1)\,\omega(k) \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0}(n+1)\frac{k}{h}\omega_1(h) \leqslant \frac{2}{\varepsilon_0}\omega_1(h),$$

et si $h \geqslant h_0$, on a:

$$|f(x+h)-f(x)| < \frac{2\sup|f(x)|}{\omega_1(|h_0|)}\omega_1(h).$$

Il en résulte l'inégalité (5) pour $0 \leqslant h \leqslant l$ avec la constante

$$K = \max\left(\frac{2}{\varepsilon_0}, \frac{2\sup|f(x)|}{\omega_1(|h_0|)}\right).$$

En substituant $x-h$ à x, on obtient l'inégalité (5) aussi pour $-l \leqslant h \leqslant 0$, ce qui achève la démonstration.

Admettons maintenant que

$$\varlimsup_{h\to+0} \frac{h}{\omega(h)} = +\infty.$$

Quel que soit $\varepsilon_0 > 0$, on obtient d'abord l'inégalité (6) pour $0 < h \leqslant l$ et pour un k assujetti à l'inégalité $0 < k \leqslant h$; il en résulte, comme auparavant, l'inégalité (7), d'où $f(x+h) = f(x)$ pour tout x avec $0 \leqslant h \leqslant l$. Par conséquent $f(x) = \text{const.}$ et il n'existe dans ce cas que cette fonction qui satisfasse aux hypothèses du théorème.

Corollaire. *Si*

$$\varlimsup_{h\to+0} \frac{h}{\omega(h)} > 0,$$

toute fonction satisfaisant pour chaque x à (1) *satisfait à la condition de Lipschitz* [4]).

En effet, on n'a qu'à poser $\omega_1(h) = h$; alors (3) équivaut à la relation $\lim\limits_{h\to+0} \dfrac{h}{\omega(h)} = 0$ et il ne reste qu'à appliquer le théorème 1.

Lemme 1. *$\varphi(x)$ étant une fonction non constante de période l, définie pour tout x réel et continue, il existe deux nombres, τ et σ, ne dépendant que de $\varphi(x)$ et tels que:*

(8) $$0 < \tau \leqslant \sigma \leqslant l,$$

(9) *pour tout x, il existe un nombre $\overline{h}_x$ assujetti aux inégalités:*

$$\tau \leqslant |\overline{h}_x| \leqslant \sigma \qquad \text{et} \qquad |\varphi(x+\overline{h}_x) - \varphi(x)| \geqslant \frac{1}{2}\max|\varphi(x)-\varphi(0)|.$$

---

[4]) Ce corollaire a été demontré pour la première fois par une méthode différente par H. Auerbach; cf. H. Steinhaus, *Anwendungen der Funktionalanalysis auf einige Fragen der reellen Funktionentheorie,* Studia Math. 1 (1929), p. 51-81, en particulier p. 57-58.

Démonstration. Soient:

$$0<\xi<l \qquad \text{et} \qquad |\varphi(\xi)-\varphi(0)|=\max|\varphi(x)-\varphi(0)|=r.$$

Considérons l'ensemble E de tous les x tels que:

$$0\leqslant x\leqslant l \qquad \text{et} \qquad |\varphi(x)-\varphi(0)|\geqslant \frac{1}{2}r.$$

Posons:
$$\bar{h}_x=\begin{cases} l-x & \text{pour } x\in E \\ \xi-x & \text{pour } x \text{ non } \in E.\end{cases}$$

Le nombre $\bar{h}_x$ ainsi défini satisfait évidemment aux inégalités (9) pour tout x réel avec les mêmes nombres τ et σ pour toutes les valeurs de x.

Lemme 2. *La fonction $\varphi(x)$ non constante et de période l satisfaisant pour $-\infty<x<+\infty$ à la condition de Lipschitz avec une constante K, posons:*

$$r=\max|\varphi(x)-\varphi(0)|, \qquad a=\lambda\omega_1(l\beta^{-1}) \quad \text{où} \quad \lambda>0 \quad \text{et} \quad \beta\geqslant 1$$

et admettons la condition (3). Alors la fonction

$$f(x)=a\varphi(\beta x)$$

jouit pour tout x des propriétés suivantes:

1^0 *il existe un h_x tel que*

$$\tau\beta^{-1}\leqslant|h_x|\leqslant\sigma\beta^{-1}, \tag{10}$$

où τ et σ satisfont aux conditions (8) et (9), et pour lequel on a

$$\frac{|f(x+h_x)-f(x)|}{\omega_1(|h_x|)}\geqslant\frac{r}{2}\lambda\frac{\omega_1(l\beta^{-1})}{\omega_1(\sigma\beta^{-1})}; \tag{11}$$

2^0 *pour tout h tel que $0<|h|\leqslant l$, on a*

$$\frac{|f(x+h)-f(x)|}{\omega(|h|)}\leqslant Kl\lambda\frac{\omega_1(l\beta^{-1})}{l\beta^{-1}}\gamma(l\beta^{-1}). \tag{12}$$

Démonstration. Posons:

$$\boldsymbol{(}u\boldsymbol{)}=u-\mathrm{E}(u), \qquad y=l\boldsymbol{(}\beta xl^{-1}\boldsymbol{)} \qquad \text{et} \qquad h_x=\bar{h}_y\beta^{-1}.$$

Alors $0\leqslant y\leqslant l$, la propriété (10) se trouve réalisée et on a

$$\frac{|f(x+h_x)-f(x)|}{\omega_1(|h_x|)}=a\frac{|\varphi(l\boldsymbol{(}\beta xl^{-1}\boldsymbol{)}+\beta h_x)-\varphi(l\boldsymbol{(}\beta xl^{-1}\boldsymbol{)})|}{\omega_1(|h_x|)}=$$
$$=a\frac{|\varphi(y+\bar{h}_y)-\varphi(y)|}{\omega_1(|h_x|)}\geqslant\frac{r}{2}\lambda\frac{\omega_1(l\beta^{-1})}{\omega_1(\sigma\beta^{-1})},$$

c'est-à-dire la propriété (11).

On démontre (12) comme il suit. On a pour $0<h\leqslant l$:

$$\frac{|f(x+h)-f(x)|}{\omega(h)}=a\frac{|\varphi[\beta x+l\boldsymbol{(}\beta hl^{-1}\boldsymbol{)}]-\varphi(\beta x)|}{l\boldsymbol{(}\beta hl^{-1}\boldsymbol{)}}\,\frac{l\boldsymbol{(}\beta hl^{-1}\boldsymbol{)}}{\omega(h)}\leqslant Kal\frac{\boldsymbol{(}\beta hl^{-1}\boldsymbol{)}}{\omega(h)}$$

(la fonction $f(x)$ étant de période $l\beta^{-1}$, cette inégalité se présente aussi pour $h=nl\beta^{-1}$).

On a, de plus, pour $0<h<l\beta^{-1}$:

$$Kal\frac{\boldsymbol{(}\beta hl^{-1}\boldsymbol{)}}{\omega(h)}=Kl\lambda\frac{\omega_1(l\beta^{-1})}{l\beta^{-1}}\,\frac{h}{\omega(h)}\leqslant Kl\lambda\frac{\omega_1(l\beta^{-1})}{l\beta^{-1}}\gamma(l\beta^{-1})$$

et pour $l\beta^{-1}\leqslant h\leqslant l$:

$$Kal\frac{\boldsymbol{(}\beta hl^{-1}\boldsymbol{)}}{\omega(h)}\leqslant Kl\lambda\frac{\omega_1(l\beta^{-1})}{\omega(l\beta^{-1})}\leqslant Kl\lambda\frac{\omega_1(l\beta^{-1})}{l\beta^{-1}}\gamma(l\beta^{-1}).$$

Pour vérifier cette inégalité aussi dans le cas où $-l\leqslant h<0$, il suffit de remplacer x par $x-h$.

Remarque. On peut admettre toujours $h_x>0$ dans l'inégalité (11). Il suffit, en effet, de définir $\bar{h}_x$ pour $x\in E$ comme précédemment et de poser pour x non $\in E$:

$$\bar{h}_x=\begin{cases}\xi-x & \text{si } 0\leqslant x<\xi \\ \xi-x+l & \text{si } \xi\leqslant x\leqslant l.\end{cases}$$

Lemme 3. *Dans les hypothèses du lemme 2, la fonction $f(x)=a\varphi(\beta x)$ satisfait pour tout x et pour tout $|h|\leqslant l$ à l'inégalité*

$$\frac{|f(x+h)-f(x)|}{\omega_1(|h|)}\leqslant L(|h|)\lambda\beta\,\omega_1(l\beta^{-1}) \tag{13}$$

où $L(h)=K\sup\limits_{0<k\leqslant h}\dfrac{k}{\omega_1(k)}$.

Démonstration. L'hypothèse que $\varphi(x)$ satisfait à la condition de Lipschitz avec la constante K entraîne pour $0<h\leqslant l$

$$\frac{|f(x+h)-f(x)|}{\omega_1(h)}\leqslant Ka\beta\frac{h}{\omega_1(h)}=K\lambda\beta\,\omega_1(l\beta^{-1})\frac{h}{\omega_1(h)}\leqslant L(h)\lambda\beta\,\omega_1(l\beta^{-1})$$

et il suffit de remplacer x par $x-h$ pour $-l\leqslant h<0$.

Théorème 2. *En admettant (3), on peut construire d'une manière effective une fonction $f(x)$ de période l assujettie pour tout x à la condition (2) et telle que l'on ait*

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant M\omega(|h|) \qquad \textit{pour tout } |h|\leqslant l. \tag{14}$$

À savoir:

(I) *Si* $\overline{\lim\limits_{h\to+0}}\,\dfrac{h}{\omega_1(h)}=+\infty$, *il suffit de prendre pour* $f(x)$ *une fonction de période* l *satisfaisant à la condition de Lipschitz et telle que l'on ait pour tout* x

$$\underline{\lim_{h\to 0}}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|>0; \tag{15}$$

(II) *Si* $\overline{\lim\limits_{h\to+0}}\,\dfrac{h}{\omega_1(h)}<+\infty$, *on n'a qu'à considérer une fonction non constante* $\varphi(x)$ *de période* l *satisfaisant à la condition de Lipschitz avec une constante* $K>0$ *et deux suites numériques,* $\{\alpha_n\}$ *et* $\{\beta_n\}$, *telles que*

$$\alpha_n>0,\qquad \beta_n<\beta_{n+1},\qquad \beta_n\to\infty$$

et que

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\alpha_n}{\omega_1(l\beta_n^{-1})}=+\infty, \tag{16}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n\gamma(l\beta_n^{-1})<+\infty, \tag{17}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,L(l\beta_n^{-1})\,\omega_1(l\beta_u^{-1})\,\alpha_n^{-1}\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\beta_i<(1-c)\,\frac{r}{2}\,\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\omega_1(l\beta_n^{-1})}{\omega_1(\sigma\beta_n^{-1})}, \tag{18}$$

$$2\max|\varphi(x)|\;\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\omega_1(l\beta_n^{-1})}{\omega_1(\tau\beta_n^{-1})}\,\alpha_n^{-1}\sum_{i=n+1}^{\infty}\alpha_i<c\,\frac{r}{2}\,\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\omega_1(l\beta_n^{-1})}{\omega_1(\sigma\beta_n^{-1})}, \tag{19}$$

où $0<c<1$ *et* r, σ, τ, $L(l\beta_n^{-1})$ *sont les mêmes constantes que dans les énoncés des lemmes, et de prendre pour* $f(x)$ *la fonction*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varphi(\beta_n x). \tag{20}$$

Alors, si l'on choisit les nombres β_n *entiers, la fonction* (20) *est de période* l.

Démonstration. Cas (I). On a d'après (3)

$$\frac{h}{\omega(h)}\leqslant\frac{h_0}{\omega_1(h_0)}\qquad\text{pour } 0<h\leqslant h_0\leqslant l.$$

La fonction $f(x)$ étant de période l et satisfaisant à la condition de Lipschitz avec une constante $K>0$ ainsi qu'à l'inégalité (15) pour tout x (soit p. ex. $f(x)=\dfrac{l}{2}-\left|x-\dfrac{l}{2}\right|$ pour $0\leqslant x\leqslant l$ et $f(x+l)=f(x)$), on a pour $0<h\leqslant h_0$:

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{\omega(h)}\right|\leqslant K\frac{h}{\omega(h)}\leqslant K\frac{h_0}{\omega_1(h_0)},$$

et pour $h_0<h\leqslant l$:

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{\omega(h)}\right|\leqslant K\frac{l}{\omega(h_0)}.$$

Il en résulte l'inégalité (14) avec la constante

$$M=\max\left(\frac{Kh_0}{\omega_1(h_0)},\ \frac{Kl}{\omega(h_0)}\right).$$

On a en même temps pour tout x la relation (2); en effet:

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|=\frac{|f(x+h)-f(x)|}{\omega_1(|h|)}\,\frac{\omega_1(|h|)}{|h|},$$

de sorte que l'inégalité $\overline{\lim\limits_{h\to 0}}\,\dfrac{|f(x+h)-f(x)|}{\omega_1(|h|)}<+\infty$ entraînerait $\underline{\lim\limits_{h\to 0}}\left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|=0$ — ce qui est impossible en vertu de (15).

Cas (II). On a $\sup\limits_{0<h\leqslant l}\dfrac{h}{\omega_1(h)}=A<+\infty$. Pour établir l'existence des suites $\{\alpha_n\}$ et $\{\beta_n\}$ assujetties aux conditions (16)-(19), posons:

$$\lambda_1=1,\qquad \beta_1>1,\qquad \alpha_1=\lambda_1\omega_1(l\beta_1^{-1}),$$

et procédons par l'induction. Les nombres α_i et β_i étant définis pour $i=1,2,\ldots,n-1$, choisissons d'abord un $\lambda_n>n$ tel que l'on ait;

$$KA\lambda_n^{-1}\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\beta_i<\frac{1}{n},$$

puis un $\beta_n>\beta_u^{-1}$ tel que l'on ait:

$$\lambda_n\omega_1(l\beta_n^{-1})\,\beta_n\gamma(l\beta_n^{-1})<\frac{1}{2^n},$$

$$\lambda_n\omega_1(\tau\beta_n^{-1})<\frac{\alpha_{n-1}}{\omega_1(l\beta_{n-1}^{-1})}\,\omega_1(\tau\beta_{n-1}^{-1}),$$

$$\lambda_n\omega_1(l\beta_n^{-1})<\frac{1}{2^{n-1}}\,\frac{\alpha_{n-1}}{\omega_1(l\beta_{n-1}^{-1})}\,\omega_1(\tau\beta_{n-1}^{-1}),$$

et enfin posons $\alpha_n=\lambda_n\omega_1(l\beta_n^{-1})$.

Les conditions (16) et (17) sont évidemment remplies et il en résulte que $\beta_n \to +\infty$. Pour démontrer (18) et (19), remarquons que:

$$L(l\beta_n^{-1}) \leqslant AK \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i < \frac{a_n}{2^{n-1}} \, \frac{\omega_1(\tau\beta_n^{-1})}{\omega_1(l\beta_n^{-1})}.$$

Il s'en suit que les membres gauches de (18) et (19) s'annulent et les membres droits sont positifs pour chaque $0 < c < 1$.

Ceci établi, soient: $\varphi(x)$ une fonction non constante de période l, satisfaisant à la condition de Lipschitz avec une constante K, $\{a_n\}$ et $\{\beta_n\}$ deux suites assujetties aux conditions (16)-(19) et λ_n des nombres tels que $a_n = \lambda_n \omega_1(l\beta_n^{-1})$.

Il résulte de (17) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty; \tag{21}$$

la fonction $f(x)$ est donc continue et uniformément bornée.

D'après le lemme 2, on a pour $|h| \leqslant l$:

$$a_n |\varphi[\beta_n(x+h)] - \varphi(\beta_n x)| \leqslant K\lambda_n \omega_1(l\beta_n^{-1})\beta_n \gamma(l\beta_n^{-1})\omega(|h|) = \\ = K a_n \beta_n \gamma(l\beta_n^{-1})\omega(|h|).$$

Il en résulte la propriété (14), car

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant K\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta_n \gamma(l\beta_n^{-1})\right]\omega(|h|) = M\omega(|h|). \tag{22}$$

Pour démontrer la propriété (2), remarquons d'abord que, d'après le lemme 2, il existe pour tout x un h_x^m tel que

$$\tau\beta_m^{-1} \leqslant |h_x^m| \leqslant \sigma\beta_m^{-1}$$

et que

$$a_m \frac{|\varphi(\beta_m(x+h_x^m)) - \varphi(\beta_m x)|}{\omega_1(|h_x^m|)} \geqslant \frac{r}{2} \, \frac{\omega_1(l\beta_m^{-1})}{\omega_1(\sigma\beta_m^{-1})} \lambda_m \qquad \text{pour } m = 1, 2, \ldots$$

En vertu de lemme 3, on a

$$a_n \frac{|\varphi(\beta_n(x+h_x^m)) - \varphi(\beta_n x)|}{\omega_1(|h_x^m|)} \leqslant \begin{cases} L(|h_x^m|)\lambda_n\beta_n\omega_1(l\beta_n^{-1}) \leqslant L(l\beta_m^{-1})a_n\beta_n \\ \qquad\qquad \text{pour } n = 1, 2, \ldots, (m-1) \\ 2\max|\varphi(x)| \dfrac{1}{\omega_1(\tau\beta_m^{-1})} a_n \\ \qquad\qquad \text{pour } n = m+1, m+2, \ldots \end{cases}$$

Comme

$$\frac{f(x+h_x^m) - f(x)}{\omega_1(|h_x^m|)} = \sum_{n=1}^{m-1} a_n \frac{\varphi(\beta_n(x+h_x^m)) - \varphi(\beta_n x)}{\omega_1(|h_x^m|)} + \\ + a_m \frac{\varphi(\beta_m(x+h_x^m)) - \varphi(\beta_m x)}{\omega_1(|h_x^m|)} + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \frac{\varphi(\beta_n(x+h_x^m)) - \varphi(\beta_n x)}{\omega_1(|h_x^m|)},$$

il vient

$$\frac{|f(x+h_x^m) - f(x)|}{\omega_1(|h_x^m|)} \geqslant \frac{r}{2} \, \frac{\omega_1(l\beta_m^{-1})}{\omega_1(\sigma\beta_m^{-1})} \lambda_m - L(l\beta_m^{-1}) \sum_{i=1}^{m-1} a_i\beta_i - \\ - 2\max|\varphi(x)| \frac{1}{\omega_1(\tau\beta_m^{-1})} \sum_{i=m+1}^{\infty} a_i = \\ = \lambda_m \left(\frac{r}{2} \, \frac{\omega_1(l\beta_m^{-1})}{\omega_1(\sigma\beta_m^{-1})} - L(l\beta_m^{-1}) \sum_{i=1}^{m-1} a_i\beta_i \frac{\omega_1(l\beta_m^{-1})}{a_m} - \right. \\ \left. - 2\max|\varphi(x)| \frac{\omega_1(l\beta_m^{-1})}{\omega_1(\tau\beta_m^{-1})} \frac{1}{a_m} \sum_{i=m+1}^{\infty} a_i \right).$$

On a d'après (18) et (19) pour m suffisamment grand:

$$\frac{|f(x+h_x^m) - f(x)|}{\omega_1(|h_x^m|)} \geqslant a\lambda_m,$$

où a est une constante positive. Il en résulte en vertu de (16) que

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{\omega_1(|h|)} = +\infty \qquad \text{pour tout } x,$$

ce qui entraîne la propriété (2).

Remarques. 1. On peut admettre en vertu de la remarque au lemme 2, en choisissant σ et τ d'une manière convenable, que $h_x^m > 0$.

On obtient ainsi au lieu de (2) la condition

$$\overline{\lim_{h\to +0}} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{\omega_1(h)} = +\infty \qquad \text{pour tout } x. \tag{2*}$$

2. On aperçoit, en suivant la marche de la démonstration relative au cas (II), que la condition (17), imposée à a_n et β_n, ne sert que pour obtenir l'inégalité (14). Par conséquent, si les suites $\{a_n\}$ et $\{\beta_n\}$ satisfont aux conditions $a_n > 0$, $\beta_n < \beta_{n+1}$, $\beta_n \to +\infty$, (18), (19) et (16), et si l'on remplace (17) par la condition plus simple (21), la fonction (20) est continue et satisfait à (2).

3. Désignons par (p) l'espace métrique composé de toutes les suites $q \equiv \{q_n\}$ où $q_n = 0$ ou 1, la distance entre les éléments $q^{(1)} \equiv \{q_n^{(1)}\}$ et $q^{(2)} \equiv \{q_n^{(2)}\}$ étant définie par la formule

$$d(q^{(1)}, q^{(2)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |q_n^{(1)} - q_n^{(2)}|.$$

Cet espace est évidemment complet, la relation $\lim_{p\to\infty} q^{(p)} = q^{(0)}$ équivaut à partir d'un $p = p_0(n)$ à la relation $q_n^{(p)} = q_n^{(0)}$ pour tout n.

Théorème 3. *Admettons que $\omega(h)$ et $\omega_1(h)$ satisfont à la condition* (3) *et que*

$$\overline{\lim_{h\to+0}} \frac{h}{\omega_1(h)} < +\infty.$$

$\varphi(x)$ étant une fonction non constante de période l satisfaisant à la condition de Lipschitz, soient $\{\alpha_n\}$ et $\{\beta_n\}$ deux suites numériques telles que $\alpha_n > 0$, $\beta_n < \beta_{n+1}$, $\beta_n \to \infty$ et qui satisfont aux conditions (16) *et* (17).

Sous ces hypothèses, la fonction

$$f_q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \alpha_n \varphi(\beta_n x) \tag{23}$$

satisfait à la condition (14) *et jouit de la propriété* (2*) *pour tout $q \in (p)$ appartenant à un ensemble résiduel* [5]).

Démonstration. L'inégalité (17) impliquant, comme auparavant, l'inégalité (21), il en résulte que la série (23) représente une fonction continue. Comme dans la démonstration du théorème 2, on prouve qu'il existe une constante positive M telle que

$$|f_q(x+h) - f_q(x)| \leqslant M\omega(h) \qquad \text{pour } 0 < h \leqslant l.$$

Soit E_m l'ensemble des suites $q \equiv \{q_n\}$ pour chacune desquelles la fonction correspondante $f_q(x)$ satisfait, au moins pour un x de l'intervalle $a \leqslant x \leqslant b$, à l'inégalité

$$\frac{|f_q(x+h) - f_q(x)|}{\omega_1(h)} \leqslant m \qquad \text{où } 0 < h \leqslant l.$$

La relation $q^{(p)} \to q^{(0)}$ entraînant la convergence uniforme des fonctions $f_{q^{(p)}}(x)$ vers la fonction $f_{q^{(0)}}(x)$ dans l'intervalle

---

[5]) Un ensemble (situé dans un espace métrique) est dit *résiduel* si son complémentaire (relatif à cet espace) est de I^e catégorie de Baire.

$-\infty < x < +\infty$, les ensembles E_m sont fermés. Nous allons montrer qu'ils sont non-denses.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi pour un E_{m_0}. Comme fermé, cet ensemble contiendrait donc une sphère S. Soit ϱ le rayon et $q^0 \equiv \{q_n^{(0)}\}$ le centre de S. Choisissons un i tel que $\sum_{n=i+1}^{\infty} 2^{-n} < \varrho/2$; alors toute suite de la forme

$$q^* \equiv q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \ldots, q_i^{(0)}, 0, 0, \ldots, q_k, 0, 0, \ldots \qquad \text{où } q_k = 1$$

appartient à la sphère S. A la suite q^* vient correspondre la fonction

$$f_{q^*}(x) = g_0(x) + \alpha_k \varphi(\beta_k x)$$

où

$$g_0(x) = \sum_{n=1}^{i} q_n^{(0)} \alpha_n \varphi(\beta_n x),$$

qui satisfait pour un x_k de l'intervalle $a \leqslant x \leqslant b$ à l'inégalité

$$\frac{|f_{q^*}(x_k+h) - f_{q^*}(x_k)|}{\omega_1(h)} \leqslant m_0 \qquad \text{pour } 0 < h < l. \tag{24}$$

D'après le lemme 3, on a pour x arbitraire

$$\frac{|g_0(x+h) - g_0(x)|}{\omega_1(|h|)} \leqslant L \qquad \text{pour } |h| \leqslant l.$$

Posons $\alpha_n = \lambda_n \omega_1(l\beta_n^{-1})$ et choisissons l'indice $k > i$ de façon que

$$\frac{r}{2}\lambda_k > m_0 + L.$$

Appliquons le lemme 2 (remarque) avec $\sigma = l$ à la fonction $f(x) = \alpha_k \varphi(\beta_k x)$. On obtient pour x arbitraire

$$\frac{|f_{q^*}(x+h_x) - f_{q^*}(x)|}{\omega_1(h_x)} \geqslant m_0.$$

contrairement à (24).

Ainsi, l'ensemble $E_1 + E_2 + \ldots$ étant de I^e catégorie pour un intervalle $a \leqslant x \leqslant b$ quelconque, le théorème 3 est démontré.

Remarque. Si les nombres α_n et β_n satisfont aux conditions (16) et (21) au lieu de (17), la fonction (23) est continue pour tout q et satisfait à la condition (2) pour tout x et pour tout q appartenant à un ensemble résiduel dans (p).

4. Nous allons examiner maintenant quelques cas particuliers. Dans ce qui suit, $\varphi(x)$ désignera la même fonction que dans les théorèmes 2 et 3.

(i) Soit d'abord $\omega_1(h)=h$. Dans ce cas, la condition (3) équivaut à $\lim\limits_{h\to+0}\dfrac{h}{\omega(h)}=0$ et les théorèmes 1 et 2 impliquent le suivant:

Pour qu'il existe une fonction continue de période l satisfaisant pour tout x à l'inégalité (1) *et telle que*

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\left|\frac{f(x+h-f(x)}{h}\right|=+\infty, \tag{2_{i}}$$

il faut et il suffit que $\lim\limits_{h\to+0}\dfrac{h}{\omega(h)}=0$ [6]).

(ii) Soit maintenant $h/\omega(h)$ une fonction croissante. Pour obtenir dans ce cas une fonction de la forme (20) satisfaisant pour tout x à (14) et à (2_{i}), il suffit de construire les suites $\{\alpha_n\}$ et $\{\beta_n\}$, où $\alpha_n>0$, $\beta_n<\beta_{n+1}$ et $\beta_n\to+\infty$, de manière que l'on ait:

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n\beta_n=+\infty, \tag{16_{ii}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\frac{1}{\omega(l\beta_n^{-1})}<+\infty, \tag{17_{ii}}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\alpha_n\beta_n}\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\beta_i<(1-c)\frac{r}{2K\sigma}, \tag{18_{ii}}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\alpha_n}\sum_{i=n+1}^{\infty}\alpha_i<c\frac{r\tau}{4\sigma}\frac{1}{\max|\varphi(x)|}\qquad \text{où } 0<c<1. \tag{19_{ii}}$$

Si l'on exige seulement que la fonction $f(x)$ soit continue et satisfasse pour tout x à la condition (2_{i}), on peut remplacer (17_{ii}) par (21).

Soit p. ex.

$$\alpha_n=2^{-n^2}\quad\text{et}\quad\beta_n=2^{sn^2}\quad\text{où}\quad s>1.$$

On a les relations:

$$\frac{1}{\alpha_n\beta_n}\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\beta_i=\frac{1}{2^{(s-1)n^2}}\sum_{i=1}^{n-1}2^{(s-1)i^2}<\frac{n-1}{2^{(s-1)n^2}}2^{(s-1)(n-1)^2}\to 0,$$

[6]) Ce théorème est connu; voir A. Zygmund, *Uwaga o funkcjach ciągłych nieróżniczkowalnych*, Mathesis Polska 4 (1929) p. 1-7 (en polonais) et S. Steckel, *O funkcjach ciągłych nieróżniczkowalnych*, ibidem, p. 123-127 (en polonais).

$$\frac{1}{\alpha_n}\sum_{i=n+1}^{\infty}\alpha_i=\frac{1}{2^{(n+1)^2-n^2}}\sum_{i=n+1}^{\infty}2^{(n+1)^2-i^2}<\frac{1}{2^{2n}}\cdot 2\to 0.$$

Alors les conditions (16_{ii})-(19_{ii}) sont satisfaites et on conclut:

La fonction

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n^2}}\varphi(2^{sn^2}x)\qquad \text{où } s>1, \tag{25}$$

est continue et partout dépourvue de dérivée.

D'un façon plus générale, on peut démontrer ceci:

Si $0<\alpha<1$ *et* $\alpha\beta>1$, *la fonction continue*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n^2}\varphi(\beta^{n^2}x)$$

est partout dépourvue de dérivée.

(iii) Soit $\omega(h)=h^{\gamma}$ où $0<\gamma<1$. La condition (17_{ii}) équivaut alors à l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n^{\gamma}<+\infty. \tag{17_{iii}}$$

Soit $0<\gamma<1/s$. On a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n^2}}2^{s\gamma n^2}<+\infty.$$

La fonction (25) satisfait donc à la condition de Hölder avec l'exposant γ. Soit

$$\alpha_n=\frac{1}{q^{n^2}}\quad\text{et}\quad\beta_n=q^{n(n+1)}\quad\text{où}\quad q>1+\frac{2\sigma}{r}K.$$

On a

$$\frac{1}{\alpha_n\beta_n}\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\beta_i=\frac{1}{q^n}\sum_{i=1}^{n-1}q^i\to\frac{1}{q-1},$$

et la condition (18_{ii}), qui équivaut dans ce cas à l'inégalité

$$\frac{1}{q-1}<(1-c)\frac{r}{2K\sigma},$$

est vérifiée pour tout $c>0$ suffisamment petit; de plus, on a:

$$\frac{1}{\alpha_n}\sum_{i=n+1}^{\infty}\alpha_i\to 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n^{\gamma}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{q^{n^2}}q^{\gamma n(n+1)}<+\infty.$$

On obtient ainsi la proposition suivante:

Si $q>1+\frac{2\sigma}{r}K$, *la fonction*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{q^{n^2}}\varphi(q^{n(n+1)}x)$$

est dépourvue partout de dérivée et satisfait à la condition de Hölder avec tout exposant γ *où* $0<\gamma<1$ [7]).

(iv) Soient:

$$\alpha_n=\alpha^n,\quad \beta_n=\beta^n,\quad 0<\alpha<1 \quad \text{et} \quad \alpha\beta>1.$$

La condition (18_{ii}) conduit dans ces hypothèses à la suivante:

$$(18_{\text{iv}})\qquad \frac{1}{\alpha\beta-1}<(1-c)\frac{r}{2K\sigma},$$

et la condition (19_{ii}) à

$$(19_{\text{iv}})\qquad \frac{\alpha}{1-\alpha}<c\frac{r\tau}{4\sigma}\frac{1}{\max|\varphi(x)|}\qquad \text{où}\quad 0<c<1.$$

En posant p. ex. $c={}^1/_2$, on obtient par conséquent la proposition:

Si les coefficients α *et* β *satisfont aux inégalités:*

$$(26)\qquad \alpha\beta>1+\frac{4\sigma}{r}K \qquad \textit{et} \qquad 0<\alpha<\frac{\eta}{1+\eta}$$

où $\eta=\frac{r\tau}{8\sigma}\frac{1}{\max|\varphi(x)|}$, *la fonction*

$$(27)\qquad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\varphi(\beta^n x)$$

est partout dépourvue de dérivée.

Si l'on pose p. ex. $\varphi(x)=\cos\pi x$, on obtient la bien connue fonction de Weierstrass: en posant dans ce cas $l=2$, $r=2$, $K=\pi$ et en considérant la courbe $y=\cos\pi x$, on remarque aussitôt qu'il suffit de prendre $\sigma=1$ et $\tau={}^1/_2$. La première des inégalités (26) est vérifiée lorsque $\alpha\beta>1+2\pi$ (ce qui est une

[7]) On connaît plusieurs exemples des telles fonctions; voir p. ex. S. Ruziewicz, *Sur les fonctions satisfaisant à la condition de Lipschitz généralisée*, Annales de la Soc. Polon. de Math. 7 (1928) p. 68-74; H. Auerbach et S. Banach, *Über die Höldersche Bedingung*, Studia Math. 3 (1931) p. 180-184.

condition un peu plus restrictive que l'hypothèse classique $\alpha\beta>1+\frac{3}{2}\pi$); de plus la condition $\alpha<\frac{\eta}{1+\eta}=\frac{1}{9}$ (seconde égalité) doit être remplie. Si l'on pose $c={}^1/_3$ dans (18_{iv}) et (19_{iv}), on obtient les inégalités $\alpha\beta>1+\frac{3}{2}\pi$ et $\alpha<\frac{1}{13}$.

Remarque. Le fait que nous n'obtenons pas, dans le cas de la fonction de Weierstrass, les inégalités bien connues $0<\alpha<1$ et $\alpha\beta>1+\frac{3}{2}\pi$ s'explique par la nature de nos considérations, dans lesquelles la fonction $\varphi(x)=\cos\pi x$ n'est pas examinée en tout détail: nos résultats sont, en effet, déduits des propriétés très générales de la fonction $\varphi(x)$. Or, d'autre part, l'hypothèse que β_n soit un nombre impair, admise par Weierstrass, n'intervient pas dans notre raisonnement.

(v) Soit $\varphi(x)$ la fonction considérée par M. Faber, à savoir égale à la différence entre x et le nombre entier le plus proche de x.

On choisit $r={}^1/_2$, $K=1$, $\sigma={}^1/_2$ et $\tau={}^1/_4$. La première des inégalités (26) donne alors $\alpha\beta>5$ et la seconde $\alpha<{}^1/_{17}$. Remarquons qu'il serait possible, aussi dans ce cas, d'obtenir pour α et β des évaluations plus précises [8]).

(vi) Soit à présent $\omega_1(h)$ une fonction arbitraire.

Admettons d'abord que $\overline{\lim}_{h\to+0}\frac{\omega_1(h)}{h}<+\infty$. Alors en choisissant comme $\omega(h)$ une fonction telle que $\lim_{h\to+0}\frac{h}{\omega(h)}=0$, la condition (3) est vérifiée; si $\lim_{h\to+0}\frac{\omega_1(h)}{h}=0$, on peut même poser $\omega(h)=h$.

Admettons maintenant que $\overline{\lim}_{h\to+0}\frac{\omega_1(h)}{h}=+\infty$. Alors on peut définir $\omega(h)$ comme il suit pour que la condition (3) soit vérifiée:

Soit $\{h_n\}$ une suite décroissante, tendant vers 0 et telle que

$$\frac{\omega_1(h_n)}{h_n}=k_n\to+\infty,\qquad k_n>k_{n+1},\qquad n\,\omega_1(h_n)\to 0,$$
$$(n+1)\,\omega_1(h_{n+1})<n\,\omega_1(h_n)\qquad \text{pour}\quad n=1,2,\dots$$

[8]) G. Faber, *Über stetige Funktionen I.*, Math. Ann. 69 (1910) p. 372-443; K. Knopp, *Ein einfaches Verfahren zur Bildung steiger nirgends differenzierbarer Funktionen*, Math. Zeitschr. 2 (1918) p. 1-26, en particulier p. 18.

Posons $\omega(h_{n+1}) = n\omega_1(h_n)$ et prolongeons la fonction $\omega(h)$ linéairement de façon qu'elle soit continue. On a évidemment $\lim_{h\to+0} \omega(h) = 0$.

Si $0 < h \leqslant h_n$, on a pour un m:

$$h_{m+1} \leqslant h \leqslant h_m \leqslant h_n \qquad \text{et} \qquad \frac{\omega_1(h_n)}{h_n}\frac{h}{\omega(h)} \leqslant \frac{k_n h_m}{\omega(h_{m+1})} = \frac{k_n}{k_m}\frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{n},$$

d'où l'égalité (3). On obtient ainsi le théorème:

La fonction $\omega_1(h)$ étant donnée d'avance, on peut construire une fonction $\omega(h)$ de façon qu'il existe une fonction $f(x)$ de période l satisfaisant pour tout x aux conditions (1) *et* (2*) [9].

Notons que l'existence d'une fonction continue périodique satisfaisant à (2*) (en supposant que $\overline{\lim_{h\to+0}} \dfrac{h}{\omega_1(h)} < +\infty$) résulte aussi de la remarque 1 au théorème 2.

(vii) La remarque au théorème 3 donne la généralisation suivante du théorème qui vient d'être établi:

Soient $\omega_1(h)$, $\omega_2(h)$, ... des fonctions définies pour $0 \leqslant h \leqslant l$, non décroissantes, ne s'annulant que pour $h = 0$ et telles que

$$\lim_{h\to+0} \omega_i(h) = 0 \quad \textit{et} \quad \overline{\lim_{h\to+0}} \frac{h}{\omega_i(h)} < +\infty \qquad \textit{pour } i = 1, 2, \ldots$$

Choisissons les suites numériques $\{\alpha_n\}$ et $\{\beta_n\}$ de façon que $\alpha_n > 0$, $\beta_n < \beta_{n+1}$, $\beta_n \to +\infty$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty \quad \textit{et} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha_n}{\omega_i(l\beta_n^{-1})} = +\infty \qquad \text{pour } i = 1, 2, \ldots$$

Sous ces hypothèses, la fonction continue (23) *satisfait pour tout x à la condition*

$$\overline{\lim_{h\to+0}} \frac{|f_q(x+h) - f_q(x)|}{\omega_i(h)} = +\infty \qquad \textit{avec} \qquad i = 1, 2, \ldots$$

pour tout $q \in (p)$ appartenant à un ensemble résiduel dans (p).

[9]) Le premier exemple d'une telle fonction a été donné par G. Faber, *Über stetige Funktionen I*, Math. Ann. 66 (1909) p. 81-94; et aussi par S. Ruziewicz, *Ein Beispiel zur Hölderschen Bedingung*, Studia Math. 3 (1931) p. 185-188; l'existence d'une fonction ayant les propriétés en question a été établie par H. Auerbach et S. Banach, loc. cit.

De ce théorème, il résulte l'existence d'une fonction continue qui satisfait pour tout x réel et pour tout exposant $\delta > 0$ à la condition

$$\overline{\lim_{h\to+0}} \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h^\delta}\right| = +\infty. \tag{28}$$

En s'appuyant sur le théorème 2 et sur la remarque à ce théorème, on peut aisément construire un exemple effectif d'une telle fonction. Il suffit, en effet, de définir une fonction continue satisfaisant pour tout x à la condition (2*) avec $\omega_1(h) = \dfrac{1}{|\lg h|}$ pour $0 < h < 1$. On vérifie aisément que les hypothèses de la remarque au théorème 2 avec $\omega_1(h) = \dfrac{1}{|\lg h|}$ sont vérifiées si l'on choisit α_n et β_n de façon à avoir:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n \lg \beta_n = +\infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha_n\beta_n} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i\beta_i = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha_n} \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_n = 0.$$

On peut poser p. ex. $\alpha_n = \dfrac{1}{n!}$ et $\beta_n = 2^{(n+1)!}$. En effet, on a alors:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} \lg 2^{(n+1)!} = +\infty,$$

$$\frac{1}{\alpha_n\beta_n} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i\beta_i = \frac{n!}{2^{(n+1)!}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!} 2^{(i+1)!} < \frac{n!}{2^{(n+1)!}} (n-1) \frac{2^{n!}}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)}{2^{n!n}} \to 0,$$

$$\frac{1}{\alpha_n} \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i = n! \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i!} < \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \ldots\right) \to 0.$$

Par conséquent:

La fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \varphi(2^{(n+1)!} x)$$

satisfait à la condition (28) *pour tout x et pour tout exposant $\delta > 0$.*

(viii) Soit $\omega(h) = h^\gamma$ où $0 < \gamma < 1$. Il est évident que la condition (3) se réduit dans ce cas à $\lim\limits_{h\to+0} \dfrac{\omega_1(h)}{h^\gamma} = 0$. Ainsi:

Pour qu'il existe une fonction satisfaisant à la condition de Hölder avec l'exposant γ et à la condition (2*) *pour tout x, il faut et il suffit qu'on ait* $\lim\limits_{h\to+0} \dfrac{\omega_1(h)}{h^\gamma} = 0$.

(ix) Admettons à présent que $\overline{\lim\limits_{h\to+0}} \dfrac{h}{\omega_1(h)} < +\infty$. Pour construire une fonction de la forme (20) satisfaisant à la condition de Hölder avec l'exposant γ et, en même temps, à la condition (2*) pour tout x, il suffit de choisir α_n et β_n de façon que l'on ait les inégalités $\alpha_n > 0$, $\beta_n < \beta_{n+1}$ et $\beta_n \to \infty$, les relations (16), (18), (19) et enfin la relation suivante:

$$(17_{\text{ix}}) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n^\gamma < +\infty.$$

Dans le cas particulier où $\omega_1(h) = h^\delta$ avec $\delta > \gamma$, on peut réaliser les conditions en question en supposant, outre la condition (17_{ix}), les suivantes:

$$(16_{\text{ix}}) \qquad \lim_{n\to\infty} \alpha_n \beta_n^\delta = +\infty,$$

$$(18_{\text{ix}}) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\alpha_n \beta_n} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \beta_i < (1-c) \frac{r\, l^{\delta-1}}{2K\sigma^\delta},$$

$$(19_{\text{ix}}) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\alpha_n} \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i < c\, \frac{r}{4} \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^\delta \frac{1}{\max|\varphi(x)|} \quad \text{où } 0 < c < 1.$$

Pour la fonction définie par la formule (25), on a (16_{ix}) si $1/s < \delta$; de plus, les conditions (18_{ix}) et (19_{ix}) sont vérifiées car

$$\frac{1}{\alpha_n \beta_n} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \beta_i \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\alpha_n} \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i \to 0.$$

La condition (17_{ix}) est remplie, comme nous l'avons vu, pour $\gamma < 1/s$. On obtient ainsi le résultat suivant:

La fonction (25) *satisfait à la condition de Hölder avec tout exposant $\gamma < 1/s$, mais avec l'exposant $\delta > 1/s$ elle satisfait pour tout x à la relation* (28).

Dans le cas de la fonction (27), on peut vérifier aisément, que les conditions (16_{ix}), (17_{ix}), (18_{ix}) et (19_{ix}) sont satisfaites, si $0 < \gamma > \lg \dfrac{1}{\alpha} \cdot (\lg \beta)^{-1} < \delta$ et si l'on choisit α et β de façon à avoir:

$$\alpha\beta > 1 + \frac{4\sigma^\delta}{r} l^{1-\delta} K \quad \text{et} \quad 0 < \alpha < \frac{\eta}{1+\eta} \quad \text{où} \quad \eta = \frac{r}{8}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^\delta \frac{1}{\max|\varphi(x)|}.$$

(Reçu par la Rédaction le 2. 5. 1947).