Sur les espaces métriques linéaires (I)

par

S. MAZUR (Łódź) et W. ORLICZ (Poznań).

Ce mémoire contient l'exposé des résultats de recherches concernant la théorie des espaces métriques linéaires et poursuivies par les auteurs depuis l'année 1933 [1]). Elles ont eu pour but d'étendre les principaux résultats de la théorie de BANACH concernant les espaces B aux ainsi dits *espaces* B_0 qui en constituent une généralisation naturelle.

L'emploi des nouvelles méthodes a permis, entre autres, d'étendre la théorie des équations linéaires à celle des inégalités linéaires, qui sera exposée dans les parties ultérieures de ce mémoire. Aussi bien la théorie des inégalités linéaires que divers théorèmes liés à la notion d'*ensembles normants* d'éléments et de fonctionnelles linéaires sont nouveaux, même dans le cas des espaces B. La classe des espaces B_0 est plus vaste que celle des espaces B, mais plus restreinte que celle des espaces F.

La première partie de ce mémoire est consacrée à la discussion des rapports mutuels entre ces classes d'espaces.

[1]) Les principaux résultats ont été présentés aux séances du 17 et du 28 octobre 1933 de la Société Polonaise de Mathématique (Section de Lwów); voir Annales de la Soc. Polon. de Math. 12 (1933), p. 119 et 120. Ils ont été l'objet de la communication des auteurs au III Congrès Polonais de Mathématique à Varsovie en 1937; voir Annales de la Soc. Polon. de Math. 16 (1938), p. 195. Les résultats acquis pendant les années de la dernière guerre ont été présentés à la séance du 6 mai 1947 de la même Société (Section de Łódź); voir Annales de la Soc. Polon. de Math. 20 (1948), p. 396. Certains résultats, communiqués par les auteurs dans les entretiens personnels, ont été cités et utilisés, entre autres, dans les publications suivantes: S. Kaczmarz et H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Lwów, 1935, M. Eidelheit, *Über lineare Gleichungen in separablen Räumen*, Studia Math. 6 (1936), p. 117-138 et *Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen*, ibidem, p. 139-148, A. Alexiewicz, *Linear Operations among bounded measurable functions, I*, Annales de la Soc. Polon. de Math. 19 (1946), p. 140-160.

§ 1.

1. Soit X un espace linéaire avec les opérations x_1+x_2 et tx [2]). Les fonctionnelles dont il sera question dans la suite seront entendues comme définies dans X, sauf mention expresse.

Si la fonctionnelle $|x|$ satisfait aux conditions

(α) $|0|=0$, (β) $|x_1+x_2|\leqslant|x_1|+|x_2|$, (γ) $|-x|=|x|$,

(δ) $t_n\to t$ et $|x_n-x|\to 0$ entraînent $|t_nx_n-tx|\to 0$,

elle s'appelle une *pseudonorme*. Toute pseudonorme qui ne s'annule que pour l'élément zéro est dite une *norme*. Il est facile de voir que si la fonctionnelle $|x|$ satisfait aux conditions

(α_0) $|x_1+x_2|\leqslant|x_1|+|x_2|$, (β_0) $|tx|=|t||x|$,

elle est une pseudonorme; nous l'appelons dans ce cas pseudonorme *homogène*. Nous disons que deux pseudonormes $|x|$ et $|x|^*$ sont *équivalentes* lorsque $|x_n|\to 0$ entraîne $|x_n|^*\to 0$ et réciproquement.

Si la fonctionnelle $|x|$ est une norme, X est un espace métrique avec la distance $(x_1,x_2)=|x_1-x_2|$; nous l'appelons *espace* F^* (plus précisément: *espace* F^* *avec la norme* $|x|$). Nous l'appelons en particulier *espace* B^* (*avec la norme* $|x|$) lorsque cette norme est homogène.

Lorsque X est un espace F^* avec la norme $|x|$ et qu'il y existe des pseudonormes homogènes $|x|_k$ $(k=1,2,\ldots)$ telles que $|x_n|\to 0$ entraîne $|x_n|_k\to 0$ pour tous les $k=1,2,\ldots$ et réciproquement, X est dit *espace* B_0^* (plus précisément: *espace* B_0^* *avec la norme* $|x|$). En particulier, lorsque les pseudonormes homogènes $|x|_k$ sont telles que $|x|_k=0$ pour tous les $k=1,2,\ldots$ entraîne $x=0$, X est un espace B_0^* avec la norme

$$(*)\qquad |x|=\sum_k\frac{1}{2^k}\frac{|x|_k}{1+|x|_k}.$$

Si X est respectivement un espace F^*, B_0^* ou B^* complet (avec la norme $|x|$), il est dit respectivement *espace* F, B_0 ou B (avec cette norme).

[2]) Pour la terminologie que nous employons, voir S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Warszawa 1932.

X et Y étant des espaces F^*, nous disons que X est *isomorphe* à Y s'il existe une transformation isomorphe, c'est-à-dire à la fois homéomorphe et additive, de X en Y; s'il en existe qui est une équivalence, c'est-à-dire à la fois isométrique et additive, X est dit *équivalent* à Y.

Si X est un espace F^* (avec la norme $|x|$) isomorphe à un espace B_0^*, il est lui-même un espace B_0^* (avec la norme $|x|$). De même, l'espace F^* équivalent à un espace B^* est toujours un espace B^* (avec la même norme). Pour qu'un espace F^* avec la norme $|x|$ soit isomorphe à un espace B^*, il faut et il suffit que cette norme soit équivalente à une norme homogène.

1.1. *Tout espace F^*, B_0^* et B^* est équivalent à un sous-espace linéaire d'un espace F, B_0 et B respectivement.*

Pour le démontrer, appliquons la méthode cantorienne connue de complétement.

Une suite finie ou infinie de pseudonormes $|x|_k$ étant donnée, considérons l'ensemble de toutes les suites $\{x_m\}$ de points de X telles que $|x_p-x_q|_k\to 0$ avec $p\to\infty$ et $q\to\infty$ pour tout $k=1,2,\ldots$ Partageons cet ensemble en sous-ensembles, en faisant entrer dans un sous-ensemble y deux suites $\{x_{1m}\}$ et $\{x_{2m}\}$ lorsque $|x_{1m}-x_{2m}|_k\to 0$ pour tout $k=1,2,\ldots$, et seulement dans ce cas.

L'ensemble $Y=X(|x|_1,|x|_2,\ldots,|x|_k,\ldots)$ de tous les y en question est un espace linéaire avec les opérations définies comme il suit: y_1+y_2 est l'ensemble des suites $\{x_{1m}+x_{2m}\}$ où $\{x_{1m}\}\in y_1$ et $\{x_{2m}\}\in y_2$; ty est l'ensemble des suites $\{tx_m\}$ où $\{x_m\}\in y$. La formule $|y|_k=\lim\limits_{m\to\infty}|x_m|_k$ définit des pseudonormes dans Y; la condition ($\bar{o}$) est satisfaite, c'est-à-dire que $t_n\to t$ et $|y_n-y|_k\to 0$ entraînent $|t_ny_n-ty|_k\to 0$ pour tout $k=1,2,\ldots$

En effet, un k et deux suites $\{x_{nm}\}\in y_n$ et $\{x_m\}\in y$ étant données, il existe une suite croissante d'indices $\{i_n\}$ telle que

$$|x_{ni_n}-x_{i_n}|_k<|y_n-y|_k+1/n \quad\text{et}\quad |t_nx_{ni_n}-tx_{i_n}|_k>|t_ny_n-ty|_k-1/n,$$

de sorte que $|x_{ni_n}-x_{i_n}|_k\to 0$ et par conséquent $|t_n(x_{ni_n}-x_{i_n})|_k\to 0$. Il suffit donc de vérifier, vu l'inégalité

$$|t_ny_n-ty|_k<|t_n(x_{ni_n}-x_{i_n})|_k+|(t_n-t)x_{i_n}|_k+1/n,$$

que $|(t_n-t)x_{i_n}|_k\to 0$. Comme $|x_{i_p}-x_{i_q}|_k\to 0$ avec $p\to\infty$ et $q\to\infty$, donc aussi $|(t_n-t)(x_{i_p}-x_{i_q})|_k\to 0$ avec $n\to\infty$, $p\to\infty$ et $q\to\infty$, il existe pour tout $\varepsilon>0$ donné un indice q tel que

$$|(t_n-t)(x_{i_n}-x_{i_q})|_k<\varepsilon/2$$

à partir d'un n suffisamment élevé. Comme

$$|(t_n-t)x_{i_n}|_k\leqslant|(t_n-t)(x_{i_n}-x_{i_q})|_k+|(t_n-t)x_{i_q}|_k,$$

on a aussi $|(t_n-t)x_{i_n}|_k<\varepsilon$ à partir d'un n convenable.

En particulier, si les pseudonormes $|x|_k$ sont homogènes, les pseudonormes $|y|_k$ le sont évidemment aussi. Il est en outre manifeste que si $|y|_k=0$ pour tout $k=1,2,\ldots$, on a $y=0$.

Nous allons montrer à présent que si $|y_p-y_q|_k\to 0$ avec $p\to\infty$ et $q\to\infty$ pour tout $k=1,2,\ldots$, il existe un $y\in Y$ tel que $|y_n-y|_k\to 0$ pour tout $k=1,2,\ldots$

En effet, si $\{x_{nm}\}\in y_n$, on a $|x_{np}-x_{nq}|_k\to 0$ avec $p\to\infty$ et $q\to\infty$, quel que soit k; il existe donc, pour tout n donné, un i_n tel que $|x_{nm}-x_{ni_n}|_k<1/n$ pour $k=1,2,\ldots,n$ à partir d'un m suffisamment grand; on a

$$|x_{pi_p}-x_{qi_q}|_k\leqslant|x_{pm}-x_{pi_p}|_k+|x_{pm}-x_{qm}|_k+|x_{qm}-x_{qi_q}|_k,$$

ce qui donne par le passage à la limite avec $m\to\infty$

$$|x_{pi_p}-x_{qi_q}|_k\leqslant 1/p+|y_p-y_q|_k+1/q \qquad \text{pour } k=1,2,\ldots,\min(p,q)$$

et par conséquent $|x_{pi_p}-x_{qi_q}|_k\to 0$ avec $p\to\infty$ et $q\to\infty$ pour tout $k=1,2,\ldots$; soit y celui des éléments de Y auquel appartient la suite $\{x_{mi_m}\}$; on a donc pour $k=1,2,\ldots,\min(m,n)$

$$|x_{nm}-x_{mi_m}|_k\leqslant|x_{nm}-x_{ni_n}|_k+|x_{ni_n}-x_{mi_m}|_k,$$

d'où $|y_n-y|_k\to 0$ pour tout $k=1,2,\ldots$

Ceci établi, soit X un espace F^* ou B^* avec la norme $|x|$. En partant de cette norme, nous définissons l'espace linéaire $Y=X(|x|)$ et la norme $|y|$. Alors Y est respectivement, comme nous venons de montrer, un espace F ou B avec la norme $|y|$.

Enfin, si X est un espace B_0^* avec la norme $|x|$, $X=Y(|x|)$ est non seulement un espace F, mais même un espace B_0 avec la norme $|y|$.

En effet, il existe par hypothèse des pseudonormes $|x|_k$ $(k=1,2,\ldots)$ telles que $|x_n|\to 0$ entraîne $|x_n|_k\to 0$ pour tous les k

et réciproquement. En partant donc de la suite des pseudonormes $|x|_k$, la construction qui a été employée conduit à l'espace linéaire $Y=X(|x|_1,|x|_2,\dots,|x|_k,\dots)$ et aux pseudonormes homogènes $|y|_k$. On a $X(|x|)=X(|x|_1,|x|_2,\dots,|x|_k,\dots)$, et $|y_n|\to 0$ entraîne $|y_n|_k\to 0$ pour $k=1,2,\dots$ et réciproquement, car une suite $\{x_{nm}\}\epsilon y_n$ étant donnée, il existe pour tout n un i_n pour lequel

$$|y_n|-{}^1/_n<|x_{ni_n}|<|y_n|+{}^1/_n$$

et

$$|y_n|_k-1/n<|x_{ni_n}|_k<|y_n|_k+1/n \quad \text{pour } k=1,2,\dots,n.$$

Reste à ajouter que, dans tous ces cas, X est trivialement équivalent au sous-espace de Y composé de tous les y tels que $\{x\}\epsilon y$ pour un x — et la démonstration est achevée.

1.2. Banach a employé pour définir les espaces F, au lieu des conditions (α), (β), (γ) et (δ), les conditions (β), (γ) et deux conditions suivantes, qui résultent de (α) et (δ):

(δ_1) $\qquad t_n\to 0$ entraîne $|t_nx|\to 0,$

(δ_2) $\qquad |x_n|\to 0$ entraîne $|tx_n|\to 0.$

On sait que cette définition équivaut à la nôtre[3]); or, il en est en outre de même pour les espaces F^*, car on a le théorème:

1.21. *Toute fonctionnelle $|x|$ qui satisfait aux conditions (β), (δ_1) et (δ_2) satisfait à la condition (δ).*

Comme $|t_nx_n-tx|\leqslant|(t_n-t)x|+|t(x_n-x)|+|(t_n-t)(x_n-x)|$, il suffit de vérifier que $t_n\to 0$ et $|x_n|\to 0$ entraînent $|t_nx_n|\to 0$.

Un $\varepsilon>0$ étant donné, soit R_k l'ensemble des t tels que $|tx_n|\leqslant{}^\varepsilon/_2$ pour $n=k,k+1,\dots$ Comme

$$\big||t'x_n|-|t''x_n|\big|\leqslant\sup\big(|(t'-t'')x_n|,|(t''-t')x_n|\big),$$

les fonctions $|tx_n|$ de la variable t sont continues. Par conséquent, les ensembles R_k sont fermés et, leur somme contenant tous les nombres réels, l'un d'eux, R_{k_0} par exemple, contient un intervalle $\langle t_0-r,t_0+r\rangle$. Il en résulte que $|(t_0+t)x_n|\leqslant{}^\varepsilon/_2$, donc que $|tx_n|\leqslant{}^\varepsilon/_2+|-t_0x_n|$ pour $|t|\leqslant r$ et pour tout $n=k_0,k_0+1,\dots$, d'où $|t_nx_n|<\varepsilon$ à partir d'un n suffisamment grand.

[3]) Voir S. Banach, op. cit., p. 232.

1.3. Nous allons donner une série d'exemples des espaces B_0, en définissant à chaque reprise un ensemble X qui est un espace linéaire avec les opérations définies de manière usuelle, et une suite de pseudonormes $|x|_k$ telles que X devienne un espace B_0 avec la norme définie par la formule (*).

1.31. Soit X_k, où $k=1,2,\dots$, un espace B avec la norme $|x|_k$. Admettons que $X_{k+1}\subset X_k$, que $x_n\epsilon X_{k+1}$ et $|x_n|_{k+1}\to 0$ entraînent $|x_n|_k\to 0$, et désignons par X la partie commune $X_1X_2\dots$ de tous les espaces X_k.

1.311. Soient $a_{k\,m}$ des nombres positifs tels que

$$\sup_m\frac{a_{k\,m}}{a_{k+1\,m}}<\infty.$$

Désignons par X_k l'espace B que forme l'ensemble de toutes les suites numériques $x=\{t_m\}$ tels que $a_{k\,m}t_m\to 0$, avec la norme

$$|x|_k=\sup_m a_{k\,m}|t_m|.$$

L'espace X se compose alors de toutes les suites numériques $x=\{t_m\}$ telles que $a_{k\,m}t_m\to 0$ pour tous les k.

1.312. Soit $\{p_k\}$ une suite décroissante de nombres convergeant vers un $p\geqslant 1$. Désignons par X_k l'espace l^{p_k}. L'espace X se compose alors de toutes les suites numériques $\{t_m\}$ telles que la série $\sum\limits_m|t_m|^r$ est convergente pour tout $r>p$.

1.313. Soit $\{p_k\}$ une suite croissante de nombres dépassant 1 et convergeant vers une limite finie ou vers l'infini. Désignons par X_k l'espace L^{p_k}. L'espace X se compose alors de toutes les fonctions $x(t)$ définies pour $0\leqslant t\leqslant 1$ et telles que l'intégrale $\int\limits_0^1|x(t)|^r dt$ est finie pour tout $r<p$ positif.

1.314. Soit X_k l'espace C^k, c'est-à-dire l'espace B formé de toutes les fonctions $x=x(t)$ définies pour $0\leqslant t\leqslant 1$ et admettant leurs k-ièmes dérivées continues, avec la norme

$$|x|_k=\sup\big[|x(0)|,|x'(0)|,\dots,|x^{(k-1)}(0)|,\sup_t|x^{(k)}(t)|\big].$$

L'espace X se compose alors de toutes les fonctions définies pour $0\leqslant t\leqslant 1$ et admettant les dérivées de tous les ordres.

1.32. Les X_k, où $k=1,2,\ldots$, étant — comme auparavant — des espaces B, soit à présent X leur produit $X_1\times X_2\times\ldots$, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les suites $x=\{x_k\}$ où $x_k\epsilon X_k$; prenons la norme de x_k dans l'espace X_k pour pseudonorme $|x|_k$ de x dans l'espace X.

Alors — par exemple — X_k étant pour tout $k=1,2,\ldots$ l'espace des nombres réels, l'espace X se compose de toutes les suites numériques.

1.33. X étant l'ensemble de toutes les suites numériques doubles $x=\{t_{km}\}$ pour lesquelles il existe le nombre $\lim\limits_k \lim\limits_m t_{km}$ fini, soit

$$|x|_1=\sup_k |\lim_m t_{km}|, \qquad |x|_{k+1}=\sup_m |t_{km}|.$$

1.34. X étant l'ensemble de toutes les fonctions $x=x(t)$ continues pour $-\infty<t<\infty$, soit $|x|_k=\sup\limits_{-k\leqslant t\leqslant k}|x(t)|$.

1.35. X étant l'ensemble de toutes les fonctions continues pour $0\leqslant t<1$ et pour lesquelles il existe l'intégrale

$$\int_0^1 x(t)\,dt=\lim_{s\to 1-0}\int_0^s x(t)\,dt,$$

soit

$$|x|_1=\sup_{0\leqslant s<1}\left|\int_0^s x(t)\,dt\right|, \qquad |x|_{k+1}=\sup_{0\leqslant t\leqslant k/(k+1)}|x(t)|.$$

1.36. Fixons un $p\geqslant 1$. X étant l'ensemble de toutes les fonctions $x=x(t)$ définies pour $-\infty<t<\infty$ et pour lesquelles l'intégrale

$$\int_{s_1}^{s_2}|x(t)|^p\,dt$$

est finie dans tout intervalle d'intégration, soit

$$|x|_k=\left(\int_{-k}^{k}|x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.4. Nous allons établir à présent un procédé qui facilite l'examen des espaces B_0^* donnés, pour reconnaître s'ils sont séparables.

Z étant un ensemble arbitraire, nous appelons *pseudométrique* toute fonctionnelle (z_1,z_2) définie pour $z_1\epsilon Z$ et $z_2\epsilon Z$ de façon que les conditions suivantes soient satisfaites:

(a) $(z,z)=0$, (b) $(z_1,z_2)=(z_2,z_1)$,

(c) $(z_1,z_2)\leqslant(z_1,z_3)+(z_3,z_2)$.

Il existe alors une subdivision de l'ensemble Z en parties dont chacune contient z_1 et z_2 parmi ses éléments lorsque $(z_1,z_2)=0$, et seulement dans ce cas. L'ensemble $W=Z((z_1,z_2))$ de toutes ces parties est un espace métrique avec la distance

$$(w_1,w_2)=(z_1,z_2) \quad \text{où} \quad z_1\epsilon w_1 \quad \text{et} \quad z_2\epsilon w_2,$$

ce qui a pour effet que divers théorèmes sur les espaces métriques se laissent transmettre facilement aux espaces *pseudométriques*, c'est-à-dire aux ensembles Z dans lesquels une pseudométrique (z_1,z_2) a été définie, les autres notions y étant formées d'une façon analogue.

C'est ainsi que la notion de *convergence* dans Z est à entendre comme si (z_1,z_2) était une métrique: $z_n\to z$ veut dire que $(z_n,z)\to 0$; la *fermeture* d'un ensemble $A\subset Z$ est par définition celui de tous les z pour lesquels il existe des $z_n\epsilon A$ tels que $z_n\to z$; l'ensemble A est dit *fermé* lorsqu'il coïncide avec sa fermeture; il est dit *ouvert* lorsque l'ensemble $Z-A$ est fermé. Nous nous dispensons de répéter ici les autres définitions connues.

Or, pour démontrer par exemple — ce dont nous ferons l'usage dans la suite — qu'une partie d'un ensemble séparable dans l'espace pseudométrique Z est un ensemble séparable, nous nous appuyons sur la validité de ce théorème dans l'espace métrique W et faisons la déduction suivante: $z_n\to z$ entraîne $w_n\to w$ (pour $z_n\epsilon w_n$ et $z\epsilon w$) et réciproquement; il s'ensuit que pour qu'un ensemble $Z_0\subset Z$ soit séparable, il faut et il suffit qu'il en soit de même de l'ensemble $W_0=Z_0((z_1,z_2))$, c'est-à-dire de celui de tous les w qui contiennent les éléments z de Z_0 parmi les leurs.

1.41. *Si les pseudométriques* (z_1,z_2) *et* $(z_1,z_2)_k$ *où* $k=1,2,\ldots$ *sont telles que* $(z_n,z)\to 0$ *entraîne* $(z_n,z)_k\to 0$ *pour tout* $k=1,2,\ldots$ *et réciproquement, alors pour que l'espace* Z *avec la pseudométrique* (z_1,z_2) *soit séparable, il faut et il suffit qu'il le soit avec les pseudométriques* $(z_1,z_2)_k$ *pour* $k=1,2,\ldots$

Seule, la suffisance de la condition n'est pas triviale.

Soit V l'ensemble de toutes les suites $v=\{z_k\}$ d'éléments de Z. La fonctionnelle

$$(v_1,v_2)=\sum_k \frac{1}{2^k}\frac{(z_{1k},z_{2k})_k}{1+(z_{1k},z_{2k})_k} \quad \text{où} \quad v_1=\{z_{1k}\} \quad \text{et} \quad v_2=\{z_{2k}\}$$

est évidemment une pseudométrique dans V. Il existe par hypothèse, pour tout $k=1,2,\ldots$, un ensemble au plus dénombrable $Z_k \subset Z$ qui est dense dans Z en pseudométrique $(z_1,z_2)_k$. L'ensemble des suites $v=\{z_k\}$ dont m premiers termes (m variable) satisfont à la condition $z_k \epsilon Z_k$ $(k=1,2,\ldots,m)$ et dont tous les termes suivants coïncident avec le m-ième, est donc encore au plus dénombrable et il est évidemment dense dans V en pseudométrique (v_1,v_2). Ainsi l'espace V est séparable et il en est par conséquent de même de son sous-ensemble S composé de toutes les suites $v=\{z\}$ où $z \epsilon Z$. Soit $V_0 \subset S$ un ensemble au plus dénombrable et dense dans S; alors l'ensemble Z_0 composé de tous les $z \epsilon Z$ tels que $\{z\} \epsilon V_0$ est au plus dénombrable et dense dans Z en pseudométriques $(z_1,z_2)_k$ où $k=1,2,\ldots$, ce qui entraîne en raison de l'hypothèse sa densité dans Z en pseudométrique (z_1,z_2).

1.42. Admettons de nouveau que X est un espace linéaire et que la fonctionnelle $|x|$ y est une pseudonorme ou une pseudonorme homogène respectivement. Alors $(x_1,x_2)=|x_1-x_2|$ y est évidemment une pseudométrique.

On constate aisément que l'ensemble $Y=X(|x|)=X((x_1,x_2))$ est un espace linéaire avec les opérations définies comme suit: y_1+y_2 est l'ensemble des éléments de la forme x_1+x_2 où $x_1 \epsilon y_1$ et $x_2 \epsilon y_2$, et ty est celui de la forme tx où $x \epsilon y$. La formule $|y|=|x|$ définit respectivement une norme ou une norme homogène dans Y. Grâce à cela, divers théorèmes sur les espaces F^* et B^* se transmettent facilement aux espaces pourvus d'une pseudonorme ou d'une pseudonorme homogène respectivement.

En vertu de 1.41, la séparabilité de l'espace X avec la pseudonorme $|x|$ équivaut à celle de l'espace Y avec la norme $|y|$, ce qui ramène l'étude de la question, si un espace donné B_0^* est séparable ou non, à celle de la question analogue pour certains espaces B^*. En effet, X étant un espace B_0^* avec la norme $|x|$, et les pseudonormes homogènes $|x|_k$ étant telles que $|x_n|\to 0$ entraîne $|x_n|_k\to 0$ pour tout $k=1,2,\ldots$ et réciproquement, la séparabilité de l'espace X avec la norme $|x|$ équivaut par suite du théorème 1.41 à celle du même espace avec les pseudonormes $|x|_k$ pour $k=1,2,\ldots$

1.43. En transmettant par ce procédé aux espaces B_0 les théorèmes connus sur la séparabilité de certains espaces B, on constate que *tous les espaces B_0 qui ont été définis dans 1.3 sont séparables*. En effet:

Ad 1.31. L'espace X est séparable lorsque chacun des espaces X_k l'est. Les exemples 1.311-1.314 satisfont à cette condition. En particulier, elle est réalisée pour l'exemple 1.311 parce que les espaces X_k y sont équivalents à l'espace c_0; l'opération $U(x)=\{a_{kp}t_p\}$ où $x=\{t_m\}$ transforme X_k en c_0 par équivalence.

Ad 1.32. L'espace X est séparable lorsque chacun des espaces X_k l'est, et seulement dans ce cas. Cette condition est satisfaite dans l'exemple qui y est considéré.

Ad 1.33. L'espace X avec la pseudonorme $|x|_k$ est séparable, car l'espace $X(|x|_k)$ est équivalent à l'espace c; la transformation en question s'effectue par l'opération

$$U(y)=\begin{cases}\{\lim\limits_m t_{pm}\} & \text{pour } k=1\\ \{t_{k-1\,p}\} & \text{pour } k=2,3,\ldots\end{cases} \quad \text{où} \quad \{t_{km}\}\epsilon y$$

Ad 1.34. L'espace X avec chacune des pseudonormes $|x|_k$ est séparable, car l'espace $X(|x|_k)$ est équivalent à l'espace C; la formule

$$U(y)=x(2ks-k) \quad \text{où} \quad x(t)\,\epsilon\, y$$

définit une transformation par équivalence de $X(|x|_k)$ en C.

Ad 1.35. L'espace X avec la norme $|x|_1$ est séparable, car il est équivalent à un sous-espace linéaire de l'espace C; l'opération

$$U(x)=\int_0^s x(t)\,dt \quad \text{où} \quad x=x(t)$$

transforme par équivalence l'espace X avec la norme $|x|_1$ en un sous-espace de C. L'espace X avec la pseudonorme $|x|_k$, où $k=2,3,\ldots$, est séparable, car l'espace $X(|x|_k)$ est équivalent à l'espace C par la transformation

$$U(y)=x\left(\frac{k}{k+1}s\right) \quad \text{où} \quad x(t)\in y.$$

Ad 1.36. La séparabilité de l'espace X avec la norme $|x|_k$ résulte de l'équivalence de l'espace $X(|x|_k)$ à l'espace L^p donnée par la formule

$$U(y)=(2k)^{1/p}x(2ks-k) \quad \text{où} \quad x(t)\in y.$$

1.5. Nous allons établir à présent un simple critère pour qu'un espace donné B_0^* soit isomorphe à un espace B^*. Notons d'abord le lemme suivant:

1.51. *Si les pseudonormes homogènes $|x|^*$ et $|x|_k$ où $k=1,2,\ldots$ sont telles que $|x_n|_k\to 0$ (l'indice k parcourant toutes ses valeurs) entraîne $\varliminf_n |x_n|^*<\infty$, il existe un indice k_0 et un nombre N tels que l'on a*

$$|x|^*\leqslant N\sup(|x|_1,|x|_2,\ldots,|x|_{k_0}) \quad \textit{pour tout } x.$$

En effet, il existerait en cas contraire des x_n tels que

$$|x_n|^*>n\sup(|x_n|_1,|x_n|_2,\ldots,|x_n|_n).$$

En posant $x_n'=\frac{\sqrt{n}}{|x_n|^*}x_n$, on aurait donc $|x_n'|_k<1/\sqrt{n}$ pour $n\geqslant k$ et par conséquent $|x_n'|_k\to 0$ pour $k=1,2,\ldots$, malgré que $|x_n'|^*=\sqrt{n}\to\infty$.

Il en résulte ce cas particulier:

1.511. *Si les pseudonormes homogènes $|x|^*$ et $|x|_0$ sont telles que $|x_n|_0\to 0$ entraîne $\varliminf_n |x_n|^*<\infty$, il existe un nombre N tel que l'on a*

$$|x|^*\leqslant N|x|_0 \quad \textit{pour tout } x.$$

1.52. Nous tirons de 1.51 le critère cherché:

X étant un espace B_0^* avec la norme $|x|$ et les pseudonormes homogènes $|x|_k$ où $k=1,2,\ldots$ étant telles que $|x_n|_k\to 0$ (k parcourant toutes ses valeurs) entraîne $|x_n|\to 0$ et réciproquement, pour que l'espace X soit isomorphe à un espace B^*, il faut et il suffit qu'il existe un indice k_0 tel que la norme $|x|$ soit équivalente à la pseudonorme $\sup(|x|_1,|x|_2,\ldots,|x|_{k_0})$.

Seule, la nécessité de la condition n'est pas triviale.

Admettons que la norme $|x|$ est équivalente à la norme homogène $|x|^*$; alors, $|x_n|_k\to 0$ (où $k=1,2,\ldots$) entraîne $|x_n|^*\to 0$, et il existe par conséquent un indice k_0 tel que déjà $|x_n|_k\to 0$ où $k=1,2,\ldots,k_0$ entraîne $|x_n|^*\to 0$, donc aussi $|x_n|\to 0$; la réciproque étant également vraie, l'équivalence entre la norme $|x|$ et la pseudonorme $\sup(|x|_1,|x|_2,\ldots,|x|_{k_0})$ se trouve établie.

1.53. On constate aisément à l'aide du critère 1.52 qu'*aucun des espaces B_0 définis dans 1.3 n'est isomorphe à un espace B*, sauf l'exemple 1.311 de l'espace B_0 dans le cas où il existe un k_0 tel que

$$(**) \qquad \sup_m \frac{a_{km}}{a_{k_0m}}<\infty \quad \text{pour } k=1,2,\ldots$$

En effet:

Ad 1.31. Pour que l'espace X soit isomorphe à un espace B, il faut et il suffit qu'il existe un indice k_0 tel que $|x_n|_{k_0}\to 0$ entraîne $|x_n|_k\to 0$ pour tout $k=1,2,\ldots$ Dans l'exemple 1.311, cette condition équivaut à (**) en vertu de 1.511. Dans les exemples 1.312-1.314, elle est en défaut, car en posant dans 1.312

$$x_n=\{t_{nm}\} \quad \text{où} \quad t_{nm}=\begin{cases} n^{-1/p_{k_0+1}} & \text{pour } m=1,2,\ldots,n \\ 0 & \text{pour } m=n+1,n+2,\ldots, \end{cases}$$

dans 1.313

$$x_n(t)=\begin{cases} n^{1/p_{k_0+1}} & \text{pour } t\leqslant 1/n \\ 0 & \text{pour } t>1/n \end{cases}$$

et dans 1.314

$$x_n(t)=\frac{(n-1)!}{(n+k_0)!}t^{n+k_0},$$

on a $|x_n|_{k_0}\to 0$, tandis que $|x_n|_{k_0+1}=1$.

Ad 1.32. Pour que l'espace X soit isomorphe à un espace B, il faut et il suffit qu'il existe un indice k_0 tel que chacun des espaces X_k, où $k>k_0$, se réduise à l'élément 0, ce qui n'est pas réalisé dans l'exemple en question [4].

[4]) L'absence d'isomorphie entre l'espace s et les espaces B a été aperçue par P. Urysohn; voir M. Fréchet, *Espaces abstraits*, Paris 1928, p. 82.

Ad 1.33, 1.34 et 1.36. L'espace X n'est isomorphe à aucun espace B, car il n'existe aucun indice k_0 tel que $|x|_k=0$ pour $k=1,2,\ldots,k_0$ entraîne $x=0$.

Ad 1.35. L'espace X n'est isomorphe à aucun espace B, car en posant pour un k_0 quelconque

$$x_n(t)=(1+|t-k_0/(k_0+1)|)^{-n},$$

on a $|x_n|_k\to 0$ pour $k=1,2,\ldots,k_0$, tandis que $|x_n|_{k_0+1}=1$.

1.6. X étant un espace F^* avec la norme $|x|$, soit U un entourage convexe de l'élément 0.

Désignons, pour tout $x\,\epsilon\,X$, par $|x|_U$ la borne inférieure de l'ensemble de tous les nombres $s>0$ tels que $\pm x/s\,\epsilon\,U$. Ainsi définie, la fonctionnelle $|x|_U$ est une pseudonorme homogène et $|x_n|\to 0$ entraîne $|x_n|_U\to 0$. La condition (α_0) est satisfaite, car en choisissant, pour $\varepsilon>0$ donné, deux nombres $s_i>0$, où $i=1$ et 2, de manière à avoir $\pm{}^{x_i}/_{s_i}\,\epsilon\,U$ et $s_i<|x_i|_U+{}^{\varepsilon}/2$, on a

$$\pm\frac{1}{s_1+s_2}(x_1+x_2)=\frac{s_1}{s_1+s_2}\left(\pm\frac{x_1}{s_1}\right)+\frac{s_2}{s_1+s_2}\left(\pm\frac{x_2}{s_2}\right)\epsilon\,U,$$

d'où $|x_1+x_2|_U\leqslant s_1+s_2$ et par conséquent

$$|x_1+x_2|_U<|x_1|_U+|x_2|_U+\varepsilon.$$

Or, si $|x_n|\to 0$, il existe des $t_n>0$ tels que $t_n\to\infty$ et $|t_nx_n|\to 0$, de sorte que $\pm t_nx_n\,\epsilon\,U$ et par suite $|x_n|_U\leqslant{}^1/t_n$ à partir d'un n suffisamment grand.

En profitant de cette propriété, nous allons démontrer le théorème suivant:

1.61. *Pour qu'un espace X qui est un espace F^* avec la norme $|x|$ soit un espace B_0^* avec la même norme, il faut et il suffit que pour tout $m=1,2,\ldots$ la sphère $|x|\leqslant{}^1/m$ contienne un entourage convexe U_m de l'élément* 0 [5]).

[5]) Ce théorème est contenu dans les résultats présentés par S. Mazur à la séance du 9 février 1935 de la Société Polonaise de Mathématique (Section de Lwów) — cf. Annales de la Soc. Polon. de Math. 15 (1936), p. 180 — et publiés en polonais dans son mémoire *O zbiorach i funkcjonałach wypukłych (Sur les ensembles et les fonctionnelles convexes)*, Lwów 1936. Le même théorème a été établi indépendamment aussi par M. J. von Neumann et publié dans son mémoire *On complete topological spaces*, Transactions of the American Math. Soc. 37 (1935), p. 1-20.

La condition est nécessaire. En effet, si les pseudonormes homogènes $|x|_k$ où $k=1,2,\ldots$ sont telles que $|x_n|\to 0$ entraîne $|x_n|_k\to 0$ pour tout $k=1,2,\ldots$ et réciproquement, il existe pour tout $m=1,2,\ldots$ un indice k_m et un nombre $\delta_m>0$ tels que

$$|x|_0=\sup(|x|_1,|x|_2,\ldots,|x|_{k_m})<\delta_m \text{ entraîne } |x|\leqslant{}^1/m;$$

l'ensemble U_m des $x\,\epsilon\,X$ pour lesquels on a $|x|_0<\delta_m$ est un entourage convexe de l'élément 0 et il est contenu dans la sphère en question.

La condition est suffisante. En effet, les pseudonormes homogènes $|x|_{U_k}$ où $k=1,2,\ldots$ sont telles que $|x_n|\to 0$ entraîne $|x_n|_{U_k}\to 0$ pour tout $k=1,2,\ldots$ et réciproquement, car $|x_n|_{U_k}\to 0$ entraîne $|x_n|_{U_k}<1$, d'où $x_n\,\epsilon\,U_k$ et à plus forte raison $|x_n|\leqslant{}^1/k$ à partir d'un n suffisamment élevé.

1.62. Nous allons envisager deux exemples suivants des espaces F qui ne sont pas des espaces B_0.

1.621. Soit X l'espace l^p, où $0<p<1$, composé de toutes les suites numériques $x=\{t_m\}$ pour lesquels la série $\sum\limits_m|t_m|^p$ converge; les opérations étant entendues dans le sens usuel, posons

$$|x|=\sum_m|t_m|^p.$$

1.622. Soit X l'espace L^p, où $0<p<1$, composé de toutes les fonctions $x=x(t)$ définies pour $0\leqslant x\leqslant 1$ et pour lesquelles l'intégrale $\int\limits_0^1|x(t)|^p\,dt$ est finie; les opérations étant entendues dans le sens usuel, posons

$$|x|=\int_0^1|x(t)|^p\,dt.$$

Ad 1.621. Il résulte de 1.61 que cet espace F n'est pas un espace B_0. En effet, tout ensemble convexe $W\subset X$ qui a des points intérieurs est de diamètre infini, car en supposant que W contienne une sphère $|x|\leqslant\varepsilon$ et en posant $e_n=\{t_{nm}\}$ où

$$t_{nm}=\begin{cases}0 & \text{pour } m\neq n\\ 1 & \text{pour } m=n,\end{cases}$$

il vient $\sqrt[p]{\varepsilon}\, e_n \epsilon W$ et par conséquent

$$x_n = \frac{\sqrt[p]{\varepsilon}}{n} \sum_{i=1}^{n} e_i \epsilon W;$$

cependant $|x_n| = \varepsilon n^{1-p} \to \infty$.

Ad 1.622. Cet espace F n'est pas un espace B_0, à savoir en vertu du théorème 1.61, car tout ensemble $W \subset X$ qui a des points intérieurs coïncide avec X tout entier. En effet, en supposant que W contienne une sphère $|x| \leqslant \varepsilon$, choisissons, pour l'élément donné $x_0 = x_0(t)$, un n naturel et les nombres

$$0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = 1$$

de manière à avoir $|x_0|/n^{1-p} \leqslant \varepsilon$ et

$$\int_{s_{k-1}}^{s_k} |x_0(t)|^p dt = |x_0|/n \qquad \text{pour } k = 1, 2, \ldots, n.$$

En posant $x_k = x_k(t)$, où

$$x_k(t) = \begin{cases} n x_0(t) & \text{pour } s_{k-1} \leqslant t < s_k, \\ 0 & \text{pour } t < s_{k-1} \text{ et } t \geqslant s_k, \end{cases}$$

on a $|x_k| = |x_0|/n^{1-p}$, d'où $x_k \epsilon W$ et par conséquent

$$x_0 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \epsilon W.$$

1.63. Une suite $\{x_n\}$ d'élements de X est dite *bornée* lorsque $t_n \to 0$ entraîne $t_n x_n \to 0$. Un ensemble $Z \subset X$ s'appelle *borné* lorsque toute suite d'éléments de Z est bornée.

En particulier, si X est un espace B_0^* avec la norme $|x|$ et les pseudonormes homogenès $|x|_k$, où $k = 1, 2, \ldots$, sont telles que $|x_n| \to 0$ entraîne $|x_n|_k \to 0$ pour tout $k = 1, 2, \ldots$ et réciproquement, la condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble Z soit borné est que $\sup_{x \epsilon Z} |x|_k < \infty$ pour tout $k = 1, 2, \ldots$ Toute suite convergente d'éléments, et partant tout ensemble compact, est borné. Plus généralement, toute suite satisfaisant à la condition de Cauchy, et par conséquent tout ensemble compactifiable [6]), c'est-à-dire dont toute suite d'éléments contient une suite satisfaisant à la condition de Cauchy, est borné. En effet, si $t_n \to 0$ et $|x_p - x_q| \to 0$ pour $p \to \infty$ et $q \to \infty$, on a $|t_n(x_p - x_q)| \to 0$ pour $n \to \infty$, $p \to \infty$ et $q \to \infty$, de sorte qu'en fixant, pour $\varepsilon > 0$, l'indice q d'une façon convenable, on arrive à avoir $|t_n(x_n - x_q)| \leqslant \varepsilon/2$ à partir d'un n suffisamment grand; comme

$$|t_n x_n| \leqslant |t_n(x_n - x_q)| + |t_n x_q|,$$

on aura donc aussi $|t_n x_n| \leqslant \varepsilon$ à partir d'un n approprié.

Si un espace F^* contient un ensemble compactifiable dont l'intérieur n'est pas vide, la dimension de cet espace est finie [7]). En conséquence, tout espace B^* dans lequel tout ensemble borné est compactifiable, est de dimension finie.

Il n'en est pas de même des espaces B_0^*. Ainsi, parmi les espaces B_0 envisagés dans 1.3, *l'exemple 1.311, sauf quand*

($\overset{*}{*}$) *il existe un indice k_0 et une suite croissante d'indices $\{m_p\}$ tels que*

$$\sup_p \frac{a_{k m_p}}{a_{k_0 m_p}} < \infty,$$

ainsi que l'exemple 1.314 et celui de 1.32, sont des espaces dans lesquels tout ensemble borné est compact.

Ad 1.311. Si la condition ($\overset{*}{*}$) est satisfaite, l'ensemble X_0 de toutes les suites $x = \{t_m\}$ telles que $t_m = 0$ pour tout $m \neq m_p$ où $p = 1, 2, \ldots$ est un sous-espace linéaire isomorphe à l'espace c_0, l'opération $U(x) = \{a_{k_0 m_p} t_{m_p}\}$ établissant cette isomorphie. Dans ce cas, l'espace X contient donc des ensembles bornés non-compacts.

Admettons à présent que la condition ($\overset{*}{*}$) n'est pas satisfaite. Nous allons montrer que si les éléments $x_n = \{t_{nm}\}$ constituent une suite bornée et si les limites $t_m = \lim_n t_{nm}$ existent pour tout $m = 1, 2, \ldots$, on a $x = \{t_m\} \epsilon X$ et $|x_n - x| \to 0$.

[6]) „bedingt kompakt" au sens de F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin-Leipzig 1927, p. 107. Les ensembles métriques compactifiables coïncident avec ceux dits *totalement bornés* (voir ibidem, p. 108, II), c'est-à-dire recouvrables par un nombre fini d'ensembles de diamètre arbitrairement petit.

[7]) Pour les espaces F, ce théorème est démontré dans la note: M. Eidelheit et S. Mazur, *Eine Bemerkung über die Räume vom Typus (F)*, Studia Math. 7 (1937), p. 159-161. La démonstration pour les espaces F^* s'y réduit en vertu du théorème 1.1.

Comme $a_{km}|t_m| \leqslant a_{km}|t_{nm}-t_m| + a_{km}|t_{nm}|$, on a en tout cas $\overline{\lim\limits_m}\, a_{km}|t_m| \leqslant \sup\limits_m a_{km}|t_{nm}-t_m|$, de sorte qu'il suffit de vérifier que

$$\lim_n \sup_m a_{km}|t_{nm}-t_m| = 0 \qquad \text{pour } k=1,2,\ldots$$

Or, en supposant le contraire, il existerait un indice k_0 et deux suites croissantes d'indices $\{n_p\}$ et $\{m_p\}$ telles que

$$a_{k_0 m_p}|t_{n_p m_p} - t_{m_p}| \geqslant \varepsilon \qquad \text{pour un } \varepsilon > 0.$$

En posant $N_k = \sup\limits_n \sup\limits_m a_{km}|t_{nm}|$, on aurait

$$a_{k_0 m_p}|t_{n_p m_p} - t_{m_p}| = a_{km_p}|t_{n_p m_p} - t_{m_p}| \frac{a_{k_0 m_p}}{a_{km_p}} \leqslant 2N_k \frac{a_{k_0 m_p}}{a_{km_p}},$$

d'où

$$\sup_p \frac{a_{km_p}}{a_{k_0 m_p}} \leqslant \frac{2N_k}{\varepsilon} \qquad \text{pour } k=1,2,\ldots,$$

contrairement à l'hypothèse admise.

Ceci établi, on en conclut aussitôt que si les éléments $x_n = \{t_{nm}\}$ constituent une suite bornée, il y existe une suite partielle convergente: il suffit de former une suite croissante $\{n_p\}$ d'indices telle que les limites $\lim\limits_p t_{n_p m}$ existent pour tout $m=1,2,\ldots$

Ad 1.314. Admettons que la suite d'éléments $x_n = x_n(t)$ est bornée, c'est-à-dire que

$$M_i = \sup_n \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x_n^{(i)}(t)| < \infty \qquad \text{pour } i=0,1,\ldots$$

Quel que soit i, la suite $\{x_n^{(i)}(t)\}$ contient une suite partielle uniformément convergente, car

$$|x_n^{(i)}(t)| \leqslant M_i, \qquad |x_n^{(i+1)}(t)| \leqslant M_{i+1},$$

de sorte que les fonctions $x_n^{(i)}(t)$ sont bornées dans leur ensemble et équicontinues. Il en résulte cependant l'existence d'une suite croissante d'indices $\{n_p\}$ telle que la suite $\{x_{n_p}^{(i)}(t)\}$ est, pour tout $i=0,1,\ldots$, uniformément convergente. En conséquence, la fonction

$$x(t) = \lim_p x_{n_p}(t)$$

admet les dérivées de tous les ordres et, pour tout $i=1,2,\ldots$, la suite $\{x_{n_p}^{(i)}(t)\}$ converge uniformément vers $x^{(i)}(t)$. En posant donc $x = x(t)$, il vient $x \in X$ et $|x_{n_p} - x| \to 0$.

Ad 1.32. Trivial.

1.64. *La condition suivante est nécessaire et suffisante pour que l'espace X qui est un espace F^* avec la norme $|x|$ soit un espace B_0^*:*

(⁂) *Si $|x_n| \to 0$ et la série $\sum\limits_n t_n$ de nombres non-négatifs est convergente, la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_n t_n x_n$ est bornée.*

La nécessité de la condition (⁂) est triviale; plus encore, si la suite $\{x_n\}$ est bornée et la série $\sum\limits_n t_n$ est absolument convergente, la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_n t_n x_n$ satisfait à la condition de Cauchy.

Nous allons montrer que la condition (⁂) est suffisante. Il existe pour tout $m=1,2,\ldots$ un $\delta_m > 0$ tel que l'ensemble U_m de tous les éléments de X de la forme $\sum\limits_{n=1}^{p} t_n x_n$, où les $x_n \in X$ et les nombres $t_n \geqslant 0$ ($p=1,2,\ldots$ et $n=1,2,\ldots,p$) satisfont aux conditions

$$|x_n| < \delta_m, \qquad \sum_{n=1}^{p} t_n < \delta_m,$$

est contenu dans la sphère $|x| \leqslant 1/m$. Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi, c'est-à-dire qu'il existe un m_0, une suite $\{x_{kn}\}$ d'éléments de X et une suite $\{t_{kn}\}$ de nombres non-négatifs ($k=1,2,\ldots$ et $n=1,2,\ldots,p_k$) tels que

$$|x_{kn}| < \varepsilon_k, \qquad \sum_{n=1}^{p_k} t_{kn} < \varepsilon_k \quad \text{où} \quad \varepsilon_k \to 0,$$

et que l'on ait pourtant

$$\left|\sum_{n=1}^{p_k} t_{kn} x_{kn}\right| > \frac{1}{m_0}.$$

On peut, évidemment, admettre que $\varepsilon_k \leqslant 1/4^k$ et que

$$\left|\sqrt{\varepsilon_{k+1}} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_i}} \sum_{n=1}^{p_i} t_{in} x_{in}\right| \leqslant \frac{1}{2m_0}.$$

En posant

$$x_n = x_{kq} \quad \text{et} \quad t_n = t_{kq}/\sqrt{\varepsilon_k}$$

pour

$$n = q_{k-1} + q, \quad \text{où} \quad q_0 = 0, \quad q_k = \sum_{i=1}^{k} p_i \quad \text{et} \quad q = 1, 2, \ldots, p_k,$$

on aurait donc $|x_n| \to 0$ et la série $\sum\limits_n t_n$ serait convergente, car

$$\sum_{n=q_{k-1}+1}^{q_k} t_n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_k}} \sum_{n=1}^{p_k} t_{kn} < \frac{1}{2^k};$$

pourtant la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_n t_n x_n$ ne serait pas bornée, car

$$\left| \sqrt{\varepsilon_{k+1}} \sum_{n=1}^{q_{k+1}} t_n x_n \right| = \left| \sqrt{\varepsilon_{k+1}} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_i}} \sum_{n=1}^{p_i} t_{in} x_{in} \right| \geqslant$$

$$\geqslant \left| \sum_{n=1}^{p_{k+1}} t_{k+1\,n} x_{k+1\,n} \right| - \left| \sqrt{\varepsilon_{k+1}} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_i}} \sum_{n=1}^{p_i} t_{in} x_{in} \right|,$$

d'où

$$\left| \sqrt{\varepsilon_{k+1}} \sum_{n=1}^{q_{k+1}} t_n x_n \right| > \frac{1}{2m_0},$$

de sorte que la condition (⁂) serait en défaut, contrairement à l'hypothèse.

Ceci établi, et U_m étant évidemment un entourage convexe de l'élément 0, il suffit de faire appel au théorème 1.61 pour achever la démonstration.

1.641. Z étant un ensemble situé dans un espace linéaire X, désignons par $\operatorname{conv} Z$ l'*enveloppe convexe de* Z, c'est-à-dire l'ensemble de tous les éléments de X de la forme $\sum\limits_{n=1}^{p} t_n x_n$ où $x_n \in Z$, $t_n \geqslant 0$ et $\sum\limits_{n=1}^{p} t_n = 1$ pour $p = 1, 2, \ldots$ et $n = 1, 2, \ldots, p$.

Soit X un espace B_0^* avec la norme $|x|$. Admettons que les pseudonormes homogènes $|x|_k$, où $k = 1, 2, \ldots$, sont telles que $|x_n| \to 0$ entraîne $|x_n|_k \to 0$ pour tout $k = 1, 2, \ldots$ et réciproquement. Evidemment, si l'ensemble Z est borné, il en est de même de l'ensemble $\operatorname{conv} Z$. Il est moins évident que Z étant compactifiable, $\operatorname{conv} Z$ l'est également. Ce théorème, qui est connu pour les espaces B^* [8]), se laisse généraliser aux espaces B_0^* en vertu de la propriété suivante des espaces X linéaires: pour qu'un ensemble $W \subset X$ soit compactifiable (avec la norme $|x|$), il faut et il suffit qu'il le soit avec les pseudonormes $|x|_k$ pour $k = 1, 2, \ldots$ Cette propriété entraîne, entre autres, la première partie du théorème suivant que nous allons établir:

1.642. *Pour qu'un espace X qui est un espace F^* avec la norme $|x|$ soit un espace B_0^*, il faut et il suffit que pour tout ensemble compact en soi $Z \subset X$, l'enveloppe convexe de Z soit bornée.*

La condition est suffisante, car la condition (⁂) du théorème 1.64 est satisfaite: si $|x_n| \to 0$ et la série $\sum\limits_n t_n$ de nombres non-négatifs converge, l'ensemble Z composé d'élément 0 et de termes de la suite $\{x_n\}$ est compact en soi; comme

$$t = \sum_n t_n > 0 \quad \text{entraîne} \quad \sum_{n=1}^{p} \frac{t_n}{t} x_n \in \operatorname{conv} Z \quad \text{pour tout } p = 1, 2, \ldots,$$

la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_n \frac{t_n}{t} x_n$, donc aussi de la série $\sum\limits_n t_n x_n$, est bornée.

Si X est un espace F^* avec la norme $|x|$ dans lequel $|x_n| \to 0$ a pour conséquence que la suite $\left\{ \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \right\}$ est bornée, alors — comme il sera démontré tout à l'heure — X est un espace B_0^*. Ce théorème implique la seconde partie du théorème 1.642, car si $|x_n| \to 0$, l'ensemble Z composé d'élément 0 et de termes de la suite $\{x_n\}$ est compact en soi et on a $\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \in \operatorname{conv} Z$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$

La suite de premières moyennes arithmétiques $\left\{ \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \right\}$ peut

---

[8]) S. Mazur, *Über die kleinste konvexe Menge, die eine gegebene kompakte Menge enthält*, Studia Math. 2 (1930), p. 7-9.

d'ailleurs être remplacée par celle des moyennes arbitraires $\{\sum_i a_{ni}x_i\}$, les nombres a_{ni} étant assujettis à certaines conditions, à la suivante par exemple: qu'ils soient non-négatifs, s'annulent pour chaque $n=1,2,\ldots$ à partir d'un i convenable, et que l'on ait $\sum_i a_{ni}=1$, en même temps que $\sup_i a_{ni}\to 0$.

1.65. *Pour qu'un espace X qui est un espace F^* avec la norme $|x|$ soit un espace B_0^*, il faut et il suffit que $|x_n|\to 0$ ait pour conséquence que la suite $\{\sum_i a_{ni}x_i\}$ soit bornée.*

La nécessité de la condition est triviale; plus encore, la suite $\{x_n\}$ étant bornée ou tendant vers 0, il en est de même de la suite $\{\sum_i a_{ni}x_i\}$.

Reste à montrer que la condition est suffisante. On peut admettre en vertu de 1.1 que X est un ensemble linéaire dense dans un Y qui est un espace F. Or, $|y_n|\to 0$ a pour conséquence que la suite $\{\sum_i a_{ni}y_i\}$ est bornée. En effet, en choisissant la suite $\{x_n\}$ de manière à avoir $|t(y_n-x_n)|\leqslant 1/2^n$ pour $|t|\leqslant 1$, d'une part $|x_n|\to 0$ entraîne alors que la suite $\{\sum_i a_{ni}x_i\}$ est bornée, et d'autre part $t_n\to 0$ entraîne alors que $|t_n a_{ni}(y_i-x_i)|\to 0$ avec $n\to\infty$ et que $|t_n a_{ni}(y_i-x_i)|\leqslant 1/2^i$ pour tout $i=1,2,\ldots$ à partir d'un n convenable, d'où

$$\sum_i |t_n a_{ni}(y_i-x_i)|\to 0$$

et à plus forte raison

$$|t_n\sum_i a_{ni}(y_i-x_i)|\to 0,$$

ce qui prouve que la suite $\{\sum_i a_{ni}(y_i-x_i)\}$ est aussi bornée.

Soit Z l'espace F que constituent les suites $z=\{y_n\}$ où $|y_n|\to 0$, les opérations avec elles étant définies comme d'habitude et la norme étant donnée par la formule $|z|=\sup_n |y_n|$. La formule $V_n(z)=\sum_i a_{ni}y_i$ définit alors dans Z, pour tout $n=1,2,\ldots$, une opération linéaire dont les valeurs appartiennent à Y. Comme

pour tout $z\in Z$ la suite $\{V_n(z)\}$ est — nous venons de le montrer — bornée, on peut faire correspondre à tout $m=1,2,\ldots$ un $\delta_m>0$ tel que $|z|\leqslant\delta_m$ entraîne $|V_n(z)|\leqslant 1/m$ pour tout $n=1,2,\ldots$ [9]).

En conséquence, l'ensemble U_m de tous les éléments de X qui sont, pour tout $p=1,2,\ldots$, de la forme

$$\sum_{r=1}^{p} t_r x_r \quad \text{où} \quad t_r>0, \qquad \sum_{r=1}^{p} t_r=1 \qquad \text{et} \qquad |x_r|<\delta_m$$

est contenu dans la sphère $|x|\leqslant 1/m$.

En effet, désignons, pour $r=1,2,\ldots,p$, par k_{nr} le plus petit indice k tel que

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ni}\geqslant\sum_{i=1}^{r} t_i.$$

On a alors $k_{nr-1}<k_{nr}$ à partir d'un n suffisamment grand $(k_{n0}=0)$ et

$$\sum_{i=k_{nr-1}+1}^{k_{nr}} a_{ni}\to t_r,$$

de sorte que la relation

$$\left|\sum_{r=1}^{p}\ \sum_{i=k_{nr-1}+1}^{k_{nr}} a_{ni}x_r\right|\leqslant\frac{1}{m}$$

entraîne aussitôt la relation

$$\left|\sum_{r=1}^{p} t_r x_r\right|\leqslant\frac{1}{m}$$

par le passage à la limite avec $n\to\infty$. L'ensemble U_m étant par définition un entourage convexe de l'élément 0, on n'a encore qu'à appliquer le théorème 1.61 pour achever la démonstration.

1.7. Le critère fondamental pour qu'un espace F^* soit isomorphe à un espace B^* est le suivant:

1.71. *Pour qu'un espace X qui est un espace F^* avec la norme $|x|$ soit isomorphe à un espace B^*, il faut et il suffit que l'élément 0 ait dans X un entourage U borné et convexe* [10]).

---

[9]) S. Mazur et W. Orlicz, *Über Folgen linearer Operationen*, Studia Math. 4 (1933), p. 152-157.

[10]) A. Kolmogoroff, *Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen Raumes*, Studia Math. 5 (1934), p. 29-39.

Il le faut, car si la norme $|x|$ est équivalente à une norme homogène $|x|^*$, l'ensemble U de tous les $x \in X$ tels que $|x|^* < 1$ est un entourage borné et convexe de l'élément 0.

Il le suffit, car — en notation de 1.6 — la pseudonorme homogène $|x|_U$ est telle que $|x_n| \to 0$ entraîne $|x_n|_U \to 0$; aussi réciproquement, car en posant

$$t_n = \begin{cases} 1/n & \text{si } |x_n|_U = 0 \\ \sqrt{|x_n|_U} & \text{si } |x_n|_U \neq 0 \end{cases}$$

et en admettant que $|x_n|_U \to 0$, on a $|x_n/t_n|_U = \sqrt{|x_n|_U} < 1$, c'est-à-dire $x_n/t_n \in U$, à partir d'un n suffisamment grand; comme U est un ensemble borné et $t_n \to 0$, il vient $|x_n| = |t_n(x_n/t_n)| \to 0$.

Il est à noter que *chacun des espaces F^* définis dans 1.62 contient un entourage borné de l'élément* 0 (composé de tous les x tels que $|x| < 1$, par exemple), *bien qu'aucun d'eux ne soit isomorphe à un espace B^*.*

On a cependant le théorème:

1.72. *Pour qu'un espace X qui est un espace B_0^* avec la norme $|x|$ soit isomorphe à un espace B^*, il faut et il suffit que l'élément* 0 *ait dans X un entourage borné.*

En effet, il le faut en vertu de la première partie du théorème 1.71, et il le suffit, car U contient en vertu du théorème 1.61 un entourage convexe U_m de l'élément 0, qui est donc à la fois borné et convexe, de sorte qu'on n'a à appliquer que la seconde partie du théorème 1.71.

Le théorème suivant correspond à 1.64 par analogie:

1.73. *Pour qu'un espace X qui est un espace F^* avec la norme $|x|$ soit isomorphe à un espace B^*, il faut et il suffit qu'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que si $|x_n| < \varepsilon$ et si la série de nombres $\sum\limits_n t_n$ aux termes non-négatifs converge, la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_n t_n x_n$ est bornée.*

La condition est nécessaire. En effet, si la norme $|x|$ est équivalente à une norme homogène $|x|^*$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $|x| < \varepsilon$ entraîne $|x|^* < 1$; en admettant que $|x_n| < \varepsilon$ et que la série numérique $\sum\limits_n t_n$ est absolument convergente, la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_n t_n x_n$ satisfait manifestement à la condition de Cauchy.

La condition est suffisante. En effet, il résulte de 1.64 que X est un espace B_0^* et partant, en vertu de 1.72, qu'il est isomorphe à un espace B^*, puisque — comme nous montrerons tout à l'heure — l'ensemble U de tous les $x \in X$ tels que $|x| < \varepsilon$ est un entourage borné de l'élément 0.

A savoir, si l'on suppose le contraire, il existe une suite $\{x_n\}$ d'éléments de X et une suite $\{t_n\}$ de nombres telles que $|x_n| < \varepsilon$ pour $n = 1, 2, \ldots$, $t_n \to 0$ et

$$(\divideontimes) \qquad \overline{\lim_n}\, |t_n x_n| > 0;$$

mais $\{k_n\}$ étant une suite croissante d'indices telle que la série $\sum\limits_n \sqrt{|t_{k_n}|}$ est convergente, la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_n \sqrt{|t_{k_n}|}\, x_{k_n}$ est bornée d'après l'hypothèse du théorème; la suite des termes de cette série est donc bornée à plus forte raison, d'où

$$|t_{k_n} x_{k_n}| = \left| \sqrt{|t_{k_n}|} \left(\sqrt{|t_{k_n}|}\, x_{k_n} \right) \right| \to 0,$$

contrairement à $(\divideontimes)$.

1.74. Envisageons l'exemple suivant de l'espace F:

Soit $X = S$ l'espace composé de toutes les fonctions $x = x(t)$ définies pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, les opérations y étant définies de manière usuelle et la norme étant donnée par la formule

$$|x| = \int_0^1 \frac{|x(t)|}{1 + |x(t)|}\, dt.$$

Il résulte du théorème 1.61 que S n'est pas un espace B_0, car tout ensemble convexe $W \subset S$ qui a des points intérieurs coïncide avec l'espace tout entier.

Supposons, en effet, que W contienne une sphère $|x| \leqslant \varepsilon$ et considérons un élément arbitraire $x_0 = x_0(t)$ de S. Choisissons un $n \geqslant 1/\varepsilon$ et posons

$$x_k = x_k(t) = \begin{cases} nx_0(t) & \text{pour } (k-1)/n \leqslant t < k/n, \\ 0 & \text{pour } t < (k-1)/n \text{ et } t \geqslant k/n. \end{cases}$$

On a évidemment $|x_k| \leqslant \varepsilon$, donc $x_k \in W$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$ et par conséquent

$$x_0 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \in W.$$

En même temps, par opposition aux exemples des espaces F envisagés dans 1.62, l'espace S ne contient aucun entourage borné de l'élément 0, de sorte que tout ensemble borné y est non-dense.

Soit, en effet, $\varepsilon > 0$. Posons

$$x_k = x_k(t) = \begin{cases} k & \text{pour } t \leqslant \varepsilon, \\ 0 & \text{pour } t > \varepsilon. \end{cases}$$

On a évidemment $|x_k| \leqslant \varepsilon$ pour tout $k = 1, 2, \ldots$, mais la suite $\{x_k\}$ n'est pas bornée, car $|x_k/k| = \varepsilon/2$.

(Reçu par la Rédaction le 16. X. 1948).