Remarques sur les groupes et les corps métriques

par

S. BANACH †

(D'après une notice posthume[1]).

1. Soit E un groupe. Si $x \epsilon E$ et $H \subset E$, on désigne par xH l'ensemble des éléments de E de la forme xy où $y \epsilon H$. On a évidemment

$$x(E-H)=E-xH \tag{1}$$

et, quel que soit l'ensemble des valeurs de l'indice ι,

$$x\sum_{\iota} H_{\iota}=\sum_{\iota} xH_{\iota}. \tag{2}$$

Admettons qu'une convergence est définie dans le groupe E et considérons les conditions suivantes:

(3) $\lim x_n = x$ entraîne $\lim x_n y = xy$,

(4) $\lim x_n = u$ et $\lim x_n^{-1} = v$ entraînent $u = v^{-1}$,

(5) $\lim x_n = x$ entraîne $\lim x_n^{-1} = x^{-1}$,

(6) $\lim x_n = x$ et $\lim y_n = y$ entraînent $\lim x_n y_n = xy$.

Lemme. *La convergence dans le groupe E étant assujettie à la condition (3) et l'ensemble $H \subset E$ ou l'ensemble $E-H$ étant de I^e catégorie, il en est respectivement de même des ensembles xH et $E-xH$ pour tout $x \epsilon E$.*

Démonstration. H' désignant l'ensemble dérivé de H, on a en vertu de (3)

$$(xH)'=xH'. \tag{7}$$

[1]) Préparé pour l'impression par S. Hartman.

Rappelons que pour H non-dense dans E, on a par définition $(E-H')'=E$. En appliquant (7), (2) et ensuite (1), on aboutit facilement à la thèse du lemme, c. q. f. d.

Remarque. L'égalité (7) implique que si $H \subset E$ est fermé, il en est de même de xH et réciproquement. On en déduit aisé ment à l'aide de (1), (2) et (7) que si $H \subset E$ est un ensemble borelien, l'ensemble xH est borelien de la même classe et réciproquement.

2. Admettons à présent qu'une distance $\varrho(x,y)$ est définie dans le groupe E. Entendons-y désormais la convergence comme celle qui est déterminée par $\varrho(x,y)$.

Théorème I. *Si le groupe E est un espace métrique complet satisfaisant aux conditions (3) et (4), la condition (5) y est également satisfaite.*

Démonstration. Considérons d'abord le cas où le groupe E est un espace complet séparable.

Désignons par C l'ensemble des couples ordonnés $[x,y]$ où $x \epsilon E$ et $y \epsilon E$. Métrisons C de la manière suivante:

$$\varrho([x,y],[u,v])=\varrho(x,u)+\varrho(y,v). \tag{8}$$

Il est facile de voir que

(i) l'espace métrique C est complet séparable.

Nous allons montrer qu'aussi

(ii) l'espace métrique $E_1 \subset C$ composé de tous les couples $[x,x^{-1}]$ est complet séparable.

En effet, si une suite $\{[x_n,x_n^{-1}]\}$ satisfait à la condition de Cauchy, il existe dans C en vertu de (i) un couple $[u,v]=\lim[x_n,x_n^{-1}]$. Il en résulte en vertu de (8) que $u=\lim x_n$ et $v=\lim x_n^{-1}$, d'où $v=u^{-1}$ en vertu de (4) et par conséquent $[u,v]\epsilon E_1$. La propriété (ii) se trouve ainsi établie.

Pour en déduire (5), considérons la fonction

$$y=F(x)=[x,x^{-1}].$$

On a évidemment $y \epsilon E_1$ et la fonction $F(x)$ est inverse de la fonction $x=F^{-1}(y)$ qui transforme de façon biunivoque et continue E_1 en E. Il en résulte que la fonction $F(x)$ satisfait à la condition de Baire. Elle est donc continue sur un ensemble $H \subset E$ tel que $E-H$ est de I[e] catégorie dans E. Considérons dans E une suite convergente quelconque $\{x_n\}$ et soit $x_0 = \lim x_n$. En vertu du lemme, les ensembles $E - x_n^{-1}H$ et $E - x_0^{-1}H$ sont de I[e] catégorie. E étant par hypothèse un espace complet séparable, la partie commune $\prod_{n=0}^{\infty} x_n^{-1} H$ n'est pas vide. Il existe donc des $u_n \epsilon H$ et $u \epsilon H$ tels que $x_n^{-1} u_n = x_0^{-1} u$ pour $n=1,2,\ldots$ Soit $z = x_0^{-1} u$. Par conséquent $x_n z = u_n$ pour $n = 1,2,\ldots$ et $x_0 z = u$, d'où $\lim u_n = u$ en vertu de (3).

Il en résulte par suite de la continuité de $F(x)$ dans H que $\lim u_n^{-1} = u^{-1}$, donc $\lim z u_n^{-1} = z u^{-1}$, c'est-à-dire $\lim x_n^{-1} = x_0^{-1}$, de sorte que le théorème se trouve établi dans le cas considéré.

Reste à l'établir dans le cas où le groupe E n'est pas un espace séparable.

Soit $x_0 = \lim x_n$. Désignons par E_2 le plus petit sous-groupe de E qui y est un ensemble fermé et qui contient x_0 et x_n pour $n=1,2,\ldots$ Le groupe E_2 satisfait évidemment aux hypothèses du théorème et il est un espace séparable. Il suffit donc de lui appliquer le raisonnement qui précède pour conclure que $\lim x_n^{-1} = x_0^{-1}$, c. q. f. d.

Remarque. Les hypothèses (3) et (4) du théorème I peuvent être remplacées par la condition (6) qui les implique évidemment.

3. Soit à présent E un espace métrique complet avec une métrique $\varrho(x,y)$ assujettie à la condition (6) et dans lequel une multiplication associative et un élément-unité 1 sont définies:

$$(xy)z = x(yz), \tag{9}$$

$$x1 = 1x = x. \tag{10}$$

Appelons *inverse de x* et désignons par x^{-1} un élément de E tel que $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$. Il n'est pas supposé que tout élément de E admette un élément inverse; soit E^* l'ensemble de tous ceux dont les inverses existent.

Théorème II. *Pour que la fonction $f(x) = x^{-1}$ soit continue dans E, il faut et il suffit que l'ensemble E^* soit un G_δ.*

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, l'ensemble H des points de E dans lesquels l'oscillation de la fonction x^{-1} s'annule est un G_δ. En admettant donc que cette fonction est continue dans E^*, on a $E^* \subset H$. D'autre part, si $x \epsilon H$ et $x = \lim x_n$ où $x_n \epsilon E^*$ pour $n=1,2,\ldots$, la suite $\{x_n^{-1}\}$ converge elle aussi vers un $y \epsilon E$. En vertu de (6), on a donc $\lim x_n x_n^{-1} = xy$, c'est-à-dire $xy = 1$, d'où $y = x^{-1}$ et par conséquent $x \epsilon E^*$. On a donc $H \subset E^*$. Ainsi $E^* = H$, et E^* est un G_δ.

La condition est suffisante. Il existe donc dans E^* une métrique $\varrho^*(x,y)$ avec laquelle E^* est un espace complet et $\lim \varrho^*(x_n,x) = 0$ équivaut à $\lim \varrho(x_n,x) = 0$. On conclut donc en vertu de la condition (6) admise pour la métrique $\varrho(x,y)$ que $\lim \varrho^*(x_n,x) = 0$ et $\lim \varrho^*(y_n,y) = 0$ entraînent $\lim \varrho^*(x_n y_n, xy) = 0$. En appliquant donc à E^*, qui est un groupe, le théorème I et la remarque qui le suit, on conclut que, dans E^*, $\lim \varrho^*(x_n,x) = 0$ entraîne $\lim \varrho^*(x_n^{-1}, x^{-1}) = 0$ et, par suite de l'équivalence des métriques, $\lim \varrho(x_n,x) = 0$ entraîne $\lim \varrho(x_n^{-1}, x^{-1}) = 0$, c. q. f. d.

Remarque. Si, avec une métrique donnée, E est un corps complet et, en outre, l'opération de multiplication y est continue, $\lim x_n = x$ entraîne $\lim x_n^{-1} = x^{-1}$ pour $x_n \neq 0 \neq x$.

En effet, seul l'élément $x=0$ n'admet dans ce cas d'élément inverse.

(Reçu par la Rédaction le 5. 7. 1948).