Sur quelques propriétés des fonctions de Baire périodiques

par

W. ORLICZ (Poznań).

Les *fonctions de Baire* sont entendues dans ce travail comme celles de la classification de BAIRE dans laquelle la classe des fonctions continues est prise pour classe de départ.

L'intervalle fondamental sur lequel portent les considérations est toujours $(-\infty,+\infty)$ et c'est par rapport à lui que sont à entendre les notions d'ensembles de I^e^ et de II^e^ catégorie (au sens de BAIRE), d'ensembles mesurables (au sens de LEBESGUE) etc.

Nous désignerons par $\{\vartheta_n\}$ une suite quelconque de nombres réels et par $\{\omega_n\}$ une telle que $\omega_n\to+\infty$ et $\omega_n\neq 0$ pour $n=1,2,\ldots$

Ce travail [1]) a pour but de transporter aux fonctions de Baire périodiques les problèmes concernant les fonctions mesurables périodiques, étudiés par M. MAZUR et moi-même dans un travail commun [2]).

1. Soit $f(x)$ une fonction de Baire. Désignons par $\sup_B f(x)$ le plus petit nombre k tel que l'ensemble $\underset{x}{E}\{f(x)>k\}$ est de I^e^ catégorie et posons $\sup_B f(x)=\infty$ dans les cas où cet ensemble est de II^e^ catégorie pour tout k. Si la fonction $f(x)$ est continue et périodique, on a évidemment $\sup_B f(x)=\max f(x)$.

[1]) dont les résultats datent de 1941, mais à cause de la guerre n'ont été communiqués qu'en 1945 à la Société Polonaise de Mathématique (Section de Cracovie); voir Annales de la Soc. Polon. de Math. 19 (1946), p. 222, séance du 20. 11. 1945.

[2]) S. Mazur et W. Orlicz, *Sur quelques propriétés des fonctions périodiques et presque périodiques*, Studia Math. 9 (1940), p. 1-16.

Théorème 1. *Quelle que soit la fonction de Baire périodique $f(x)$, on a*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f(\omega_n x+\vartheta_n)=\sup_B f(x) \tag{1}$$

pour tout x sauf un ensemble borelien de I^e^ catégorie.

Démonstration. Il suffit évidemment d'établir le théorème pour les fonctions de période 1.

Admettons d'abord que $\sup_B f(x)<\infty$. Posons:

$$E_k^n=\underset{x}{E}\left\{\sup\left[f(\omega_n x+\vartheta_n), f(\omega_{n+1}x+\vartheta_{n+1}),\ldots\right]\leqslant \sup_B f(x)-\frac{1}{k}\right\}, \tag{2}$$

$$E=\underset{x}{E}\left\{f(x)>\sup_B f(x)-\frac{1}{2k}\right\}. \tag{3}$$

$f(x)$ étant par hypothèse une fonction de Baire, les ensembles E_k^n et E sont évidemment boreliens.

Désignons, pour $n=1,2,\ldots$ et $l=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$, par $G_l^n(\Xi)$ l'ensemble des x de la forme

$$x=\frac{\xi-\vartheta_n}{\omega_n}+\frac{l}{\omega_n} \quad \text{où} \quad \xi\in\Xi.$$

Supposons que, pour un couple d'indices k,n, l'ensemble E_k^n soit de II^e^ catégorie. Comme ensemble borelien de II^e^ catégorie, E_k^n satisfait donc à la condition de Baire, de sorte qu'il existe un segment I_1 dans lequel l'ensemble $I_1-E_k^n$ est de I^e^ catégorie. De même, l'ensemble E étant borelien de II^e^ catégorie, il existe un segment I_2 dans lequel l'ensemble I_2-E est de I^e^ catégorie. Il est facile de voir que l'ensemble $G_l^n(I_2)$ est toujours un segment et que l'ensemble $G_l^n(I_2-E)$ y est également de I^e^ catégorie. Mais la définition des ensembles $G_l^n(I_2)$ implique l'existence d'un indice $i\geqslant n$ tel que l'on a $G_{l(i)}^i(I_2)\subset I_1$ pour un indice $l(i)$ convenablement choisi. L'ensemble $G_{l(i)}^i(I_2-E)+(I_1-E_k^n)$ est de I^e^ catégorie; en tenant compte de l'identité

$$G_{l(i)}^i(I_2\cdot E)=G_{l(i)}^i(I_2)-G_{l(i)}^i(I_2-E),$$

on arrive en vertu du théorème de Baire à la conclusion que l'ensemble $P=E_k^n\cdot G_{l(i)}^i(I_2\cdot E)$ n'est pas vide. Mais, pour $x_0\epsilon P$, on aurait d'une part en vertu de (2)

$$f(\omega_i x_0+\vartheta_i)\leqslant \sup_B f(x)-\frac{1}{k}$$

et d'autre part en vertu de (3)

$$f(\omega_i x_0+\vartheta_i)>\sup_B f(x)-\frac{1}{2k}$$

— donc une contradiction.

Il est ainsi démontré que tous les ensembles E_k^n sont de I^e catégorie. Il en est donc de même de l'ensemble $H=\sum_{k,n=1}^{\infty}E_k^n$. Or, on a d'après (2) pour tout x non ϵH

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}f(\omega_n x+\vartheta_n)=\lim_{n\to\infty}\sup\,[f(\omega_n x+\vartheta_n),f(\omega_{n+1}x+\vartheta_{n+1}),\ldots]\geqslant \sup_B f(x)$$

et, d'après la définition de $\sup_B f(x)$, pour tout x sauf un certain ensemble C_n de I^e catégorie,

$$\sup\,[f(\omega_n x+\vartheta_n),\ f(\omega_{n+1}x+\vartheta_{n+1}),\ldots]\leqslant \sup_B f(x),\qquad n=1,2,\ldots,$$

de sorte que l'égalité (1) se présente en dehors d'un ensemble de I^e catégorie qui — comme le montre la marche du raisonnement — est borelien.

Admettons ensuite que $\sup_B f(x)=\infty$. Alors, le raisonnement est analogue: on n'a qu'à remplacer dans (2) et (3) les différences $\sup_B f(x)-1/k$ et $\sup_B f(x)-1/2k$ par k et $2k$ respectivement.

On peut aussi réduire le cas de $\sup_B f(x)$ infini à celui fini à l'aide d'une substitution convenable.

2. Soit $f(x)$ une fonction périodique mesurable (au sens de Lebesgue). Désignons par $\sup_L f(x)$ le plus petit nombre k tel que l'ensemble $\underset{x}{E}\{f(x)>k\}$ est de mesure nulle et posons $\sup_L f(x)=\infty$ dans le cas où cet ensemble est de mesure positive pour tout k.

On a alors l'analogue métrique suivant [3]) du théorème 1:

[3]) et qui est connu (voir S. Mazur et W. Orlicz, loco cit., p. 5, théorème 1), mais qui sera établi ici par une méthode analogue à celle du théorème précédent.

Théorème 1'. *Quelle que soit la fonction mesurable périodique $f(x)$, on a*

$$(1')\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}f(\omega_n x+\vartheta_n)=\sup_L f(x)$$

pour tout x sauf un ensemble de mesure nulle.

Démonstration. Remarquons au préalable que Ξ étant un ensemble mesurable de mesure positive, il existe un $\xi\epsilon\Xi$ qui n'est pas un entier et dans lequel la densité de Ξ est égale à 1: en désignant par I un intervalle variable contenant ξ, on a $|\Xi\cdot I|/|I|\to 1$ lorsque $|I|\to 0$.

Soit à présent $0<\vartheta<1$. Choisissons un entier $l(i)$ de manière que l'on ait

$$\frac{l(i)-1}{\omega_i}\leqslant\xi\leqslant\frac{l(i)}{\omega_i}$$

et désignons par $I_{l(i)}$ l'intervalle $\left(\frac{l(i)-1}{\omega_i},\ \frac{l(i)+1}{\omega_i}\right)$. On a alors $|\Xi\cdot I_{l(i)}|\geqslant\vartheta\cdot|I_{l(i)}|$ à partir d'un i suffisamment grand.

Il suffit de se borner au cas où la fonction $f(x)$ est de période 1.

Admettons tout d'abord que $\sup_L f(x)<\infty$ et assignons à E_k^n, E, $G_l^n(\Xi)$ et H le même sens que dans la démonstration du théorème 1, en remplaçant toutefois B par L dans les définitions (2) et (3). Posons enfin $\bar{E}=E\cdot\langle 0,1\rangle$.

Supposons que $|E_k^n|>0$ pour un couple d'indices k,n et choisissons la valeur de ϑ et celles des indices i et $l(i)$ de façon à avoir $\vartheta>1-|\bar{E}|/2$, $i\geqslant n$ et

$$(4)\qquad |E_k^n\cdot I_{l(i)}|\geqslant\vartheta\cdot|I_{l(i)}|.$$

Evidemment, l'ensemble $G_l^n(\bar{E})$ est situé sur le segment $\left\langle\frac{l-[\vartheta_n]-1}{\omega_n},\ \frac{l-[\vartheta_n]+1}{\omega_n}\right\rangle$, de sorte que l'on a pour $\bar{l}(i)=l(i)+[\vartheta_i]$

$$G_{\bar{l}(i)}^i(\bar{E})\subset I_{l(i)}.$$

Comme

$$|G_{\bar{l}(i)}^i(\bar{E})\cdot I_{l(i)}|=\frac{1}{\omega_i}|\bar{E}|=\frac{1}{2}|I_{l(i)}|\cdot|\bar{E}|,$$

on conclut en vertu de (4) que la somme des complémentaires des ensembles $G^i_{\bar{I}(i)}(\bar{E})$ et E^n_k dans l'intervalle $I_{l(i)}$ est de mesure inférieure à la sienne, d'où

$$|E^n_k \cdot G^i_{\bar{I}(i)}(\bar{E})| > 0.$$

En posant $P = E^n_k \cdot G^i_{\bar{I}(i)}(\bar{E})$, on aboutit — tout comme dans la démonstration du théorème 1 — aux mêmes inégalités contradictoires (avec L au lieu de B), ce qui montre que $|E^n_k| = 0$. Par conséquent, on a aussi $|H| = 0$; il en résulte aussitôt que l'égalité (1′) se présente presque partout.

Pour $\sup_L f(x) = \infty$ la démonstration est analogue.

3. Les théorèmes 1 et 1′ entraînent le suivant

Théorème 2. *Soit E un ensemble situé dans l'intervalle* $(0,1)$. *Suivant que*

(5) *E est borelien de II^e catégorie,*

(5′) *E est mesurable de mesure positive* [4]),

il existe pour tout x, sauf un ensemble qui est respectivement

borelien de I^e catégorie,

de mesure nulle,

une suite $\{n_i\}$ d'indices pour lesquels on a

$$\omega_{n_i} x + \vartheta_{n_i} - [\omega_{n_i} x + \vartheta_{n_i}] \in E. \tag{6}$$

Démonstration. Soit $f(x)$ une fonction de période 1, identique dans l'intervalle $(0,1)$ à la fonction caractéristique de l'ensemble E. Les hypothèses (5) et (5′) entraînent respectivement $\sup_B f(x) = 1$ et $\sup_L f(x) = 1$, de sorte qu'il suffit d'appliquer encore le théorème 1 ou 1′ respectivement.

Il est à noter que, réciproquement, le théorème 2 entraîne les théorèmes 1 et 1′. La démonstration est facile.

Ajoutons que les hypothèses (5) et (5′) ne résultent point l'une de l'autre, pas plus que *les thèses qui leur correspondent ne s'impliquent mutuellement.*

[4]) Pour ce cas, le théorème a été établi dans le travail précité de S. Mazur et W. Orlicz, p. 7, théorème 1′.

Soit, en effet, $f(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble $E \subset (0,1)$ prolongée périodiquement comme dans la démonstration du théorème 2. Si E est borelien de II^e catégorie, mais de mesure nulle, on a $\sup_L f(x) = 0$ et il existe alors, en vertu des théorèmes 1′ et 2, un ensemble $R \subset (0,1)$ résiduel, mais de mesure nulle et tel qu'il existe pour tout $x \in R$ une suite $\{n_i\}$ satisfaisant à (6). Si E est un ensemble borelien de mesure positive, mais de I^e catégorie, on a $\sup_B f(x) = 0$ et il existe alors, en vertu des théorèmes 1 et 2, un ensemble $R' \subset (0,1)$ de mesure 1, mais de I^e catégorie et tel qu'il existe pour tout $x \in R'$ une suite $\{n_i\}$ vérifiant (6).

4. Soit $0 < a < b < 1$. Appelons *ensemble H* appartenant aux nombres a, b et aux suites $\{\omega_n\}, \{\vartheta_n\}$ données tout ensemble de la forme

$$\underset{x}{E}\{\omega_n x + \vartheta_n - [\omega_n x + \vartheta_n] \text{ non } \epsilon\, (a,b) \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots\}. \tag{7}$$

Toute somme au plus dénombrable d'ensembles H sera dite *ensemble H_σ* [5]).

Les ensembles H sont fermés, et comme il sont de I^e catégorie en vertu du théorème 2, ils sont non-denses. De plus, ils sont de mesure nulle d'après le même théorème.

Théorème 3. *Si $f(x)$ est une fonction périodique continue, on a l'égalité* (1) *pour tout x sauf un ensemble H_σ.*

Démonstration. Admettons que la fonction $f(x)$ est de période 1. On a évidemment, en vertu des hypothèses, $\sup_B f(x) = \max f(x)$. Soit x_0 un point du segment $\langle 0,1 \rangle$ pour lequel $\max f(x) = f(x_0)$.

Si $0 < x_0 < 1$, désignons par k_0 le plus petit nombre naturel dépassant $1/x_0$ et $1/(1-x_0)$, et par H_k, pour tout $k \geqslant k_0$ naturel, l'ensemble H appartenant aux nombres $a = x_0 - 1/k$, $b = x_0 + 1/k$ et aux suites $\{\omega_{k+i}\}$, $\{\vartheta_{k+i}\}$.

[5]) Les définitions des ensembles H et H_σ sont des généralisations au cas des nombres ω_n pas nécessairement entiers de celles introduites par A. Rajchman dans son travail *Sur l'unicité du développement trigonométrique*, Fundam. Math. 3 (1922), p. 287-302, en particulier p. 289 et 290; voir aussi A. Zygmund, *Trigonometrical Series*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Lwów 1935, p. 268.

Si $x_0=0$ ou 1, posons $k_0=3$ et désignons par H_k, pour tout $k\geqslant k_0$ naturel, l'ensemble H appartenant aux nombres $a=1/k$, $b=1/(k-1)$ et aux suites $\{\omega_{k+i}\}, \{\vartheta_{k+i}\}$.

L'ensemble $H_{k_0}+H_{k_0+1}+\ldots$ est un H_σ est l'égalité (1) est satisfaite pour tous les $x\,\epsilon\langle 0,1\rangle$ qui ne lui appartiennent pas.

Théorème 4. *Soit $\{f_n(x)\}$ une suite de fonctions continues [fonctions de Baire] de période l satisfaisant à la condition suivante de compacité: toute suite $\{n_i\}$ d'indices contient une suite partielle $\{k_i\}$ pour laquelle il existe une fonction continue [fonction de Baire] $f(x)$ telle que*

$$\lim_{i\to\infty}\sup_B|f_{k_i}(x)-f(x)|=0. \tag{8}$$

Sous ces hypothèses, on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n(\omega_n x+\vartheta_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sup_B f_n(x) \tag{9}$$

pour tout x sauf un ensemble H_σ [ensemble borelien de I^e catégorie].

Démonstration. Admettons d'abord que $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\sup_B f_n(x)<\infty$. Il existe une fonction continue [fonction de Baire] de période l et une suite d'indices $\{k_i\}$ qui satisfont à l'égalité (8) et à la suivante:

$$\lim_{i\to\infty}\sup_B f_{k_i}(x)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sup_B f_n(x)=\sup_B f(x)<\infty. \tag{10}$$

Soit $\varepsilon>0$. À partir d'un i suffisamment élevé, on a

$$|f_{k_i}(\omega_{k_i}x+\vartheta_{k_i})-f(\omega_{k_i}x+\vartheta_{k_i})|<\varepsilon$$

pour tout x sauf un ensemble A_ε qui est vide [borelien de I^e catégorie] lorsque toutes les fonctions $f_n(x)$ sont continues [des fonctions de Baire].

On a par conséquent

$$|\overline{\lim_{i\to\infty}}\, f_{k_i}(\omega_{k_i}x+\vartheta_{k_i})-\overline{\lim_{i\to\infty}}\, f(\omega_{k_i}x+\vartheta_{k_i})|\leqslant\varepsilon$$

pour tout x non $\epsilon\, A_\varepsilon$, c'est-à-dire

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n(\omega_n x+\vartheta_n)\geqslant\overline{\lim_{i\to\infty}}\, f_{k_i}(\omega_{k_i}x+\vartheta_{k_i})=\overline{\lim_{i\to\infty}}\, f(\omega_{k_i}x+\vartheta_{k_i})$$

partout ou sauf un ensemble borelien de I^e catégorie, suivant que les fonctions $f_n(x)$ sont continues ou des fonctions de Baire. Il suffit maintenant d'appliquer le théorème 1 ou 3 respectivement et de tenir compte des relations (10) et $\sup_B f_n(x)\geqslant f_n(\omega_n x+\vartheta_n)$ que l'on a partout ou en dehors d'un ensemble de I^e catégorie, suivant que $f_n(x)$ est fonction continue ou fonction de Baire.

Admettons à présent que $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\sup_B f_n(x)=\infty$. Ce cas embrasse aussi celui où l'on a $\sup_B f_n(x)=\infty$ pour une infinité de valeurs de n et se laisse réduire au précédent comme il suit. Posons:

$$\varphi_n(x)=u(f_n(x)) \quad \text{où} \quad u(t)=\frac{t}{1+|t|},\quad u(-\infty)=-1 \quad \text{et} \quad u(+\infty)=1.$$

La fonction $u(t)$ étant uniformément continue, les fonctions $\varphi_n(x)$ satisfont aux hypothèses du théorème et tombent sous le cas déjà établi, puisque $-1\leqslant\sup_B\varphi_n(x)\leqslant+1$. Elles satisfont donc à (8). La fonction $u(t)$ étant monotone, on a:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\varphi_n(x)=u\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n(x)\right),$$

$$\sup_B\varphi_n(x)=u\left(\sup_B f_n(x)\right),$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sup_B\varphi_n(x)=u\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sup_B f_n(x)\right)$$

et ces trois formules subsistent encore dans le cas où les arguments de la fonction $u(t)$ dans leurs membres droits prennent les valeurs $-\infty$ et $+\infty$. En appliquant donc la relation (8) aux fonctions $\varphi_n(x)$, on en déduira la validité de cette relation pour les fonctions $f_n(x)$ dans le cas considéré.

Théorème 5. *Soit $f(x)$ une fonction continue [fonction de Baire]. Quelle que soit la suite numérique $\{a_n\}$, on a*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n f(\omega_n x+\vartheta_n)|=\sup_B|f(x)|\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n|$$

pour tous les x sauf un ensemble H_σ [ensemble borelien de I^e catégorie], à moins que l'un des facteurs du membre droit ne soit nul et l'autre infini.

Démonstration. Soit $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,|a_n|=\lim\limits_{i\to\infty}|a_{n_i}|$. On a en vertu du théorème 3 [du théorème 1]

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\,|f(\omega_{n_i}x+\vartheta_{n_i})|=\sup_B|f(x)|,$$

donc

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n f(\omega_n x+\vartheta_n)|\geqslant\sup_B|f(x)|\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n|$$

pour tout x sauf un ensemble H_σ [un ensemble borelien de 1^e catégorie].

Comme on a aussi l'inégalité inverse partout ou sauf un ensemble de 1^e catégorie, suivant que la fonction $f(x)$ est continue ou fonction de Baire, le théorème se trouve démontré.

Remarque [6]). Si $\sup_B f(x)=\sup_B(-f(x))$, on a sous les hypothèses du théorème 5

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n f(\omega_n x+\vartheta_n)=\sup_B|f(x)|\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n|$$

pour tout x, sauf un ensemble H_σ [ensemble borelien de 1^e catégorie].

Théorème 6. *Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions continues [fonctions de Baire pour lesquelles $\sup_B|f(x)|<\infty$ et $\sup_B|g(x)|<\infty$] de période commune. En posant*

$$c=\min_{|k|+|l|=1}\sup_B|k\cdot f(x)+l\cdot g(x)|, \tag{11}$$

on a, quelles que soient les suites numériques $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n f(\omega_n x+\vartheta_n)+b_n g(\omega_n x+\vartheta_n)|\geqslant c\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(|a_n|+|b_n|)$$

pour tout x sauf un ensemble H_σ [ensemble borelien de I^e catégorie], à moins que l'un des facteurs du membre droit ne soit nul et l'autre infini.

Démonstration. Posons $c_n=|a_n|+|b_n|$. On peut admettre que $c_n>0$ pour $n=1,2,\ldots$ Soit:

$$\overline{\lim_{u\to\infty}}\,c_n=\lim_{i\to\infty}c_{n_i},\qquad f_i(x)=\left|\frac{a_{n_i}}{c_{n_i}}f(x)+\frac{b_{n_i}}{c_{n_i}}g(x)\right|.$$

[6]) Cf. S. Mazur et W. Orlicz, loco cit., p. 8, Remarque.

Comme $\sup_B f_i(x)\geqslant c$ et les fonctions $f_i(x)$ satisfont aux hypothèses du théorème 4, on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n f(\omega_n x+\vartheta_n)+b_n g(\omega_n x+\vartheta_n)|\geqslant\overline{\lim_{i\to\infty}}\,f_i(\omega_{n_i}x+\vartheta_{n_i})\cdot\lim_{i\to\infty}c_{n_i}=$$

$$=\overline{\lim_{i\to\infty}}\,\sup_B f_i(x)\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\,c_n\geqslant c\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\,c_n$$

pour tous les x sauf un ensemble H_σ [ensemble borelien de 1^e catégorie].

5. Deux fonctions de Baire $f(x)$ et $g(x)$ sont dites *linéairement indépendantes* lorsque l'égalité $k\cdot f(x)+l\cdot g(x)=0$ n'est satisfaite pour tout x sauf, au plus, un ensemble de 1^e catégorie que si $k=l=0$.

Pour que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ soient linéairement indépendantes, il faut et il suffit que la constante c définie par la formule (11) *soit positive.*

En effet, la suffisance de la condition est évidente, puisque (11) entraîne $\sup_B|k\cdot f(x)+l\cdot g(x)|\geqslant c\cdot(|k|+|l|)$. Pour démontrer que la condition est nécessaire, admettons que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont linéairement indépendantes et supposons que $c=0$. Il existe des suites $\{k_i\}$ et $\{l_i\}$ telles que $|k_i|+|l_i|=1$ pour tout $i=1,2,\ldots$ et $\sup_B|k_i\cdot f(x)+l_i\cdot g(x)|\to 0$. En remplaçant au besoin ces suites par des suites partielles convergentes convenablement choisies, on peut admettre que $k_i\to k_0$ et $l_i\to l_0$. On a donc $k_i\cdot f(x)+l_i\cdot g(x)\to k_0\cdot f(x)+l_0\cdot g(x)=0$ pour tout x sauf un ensemble de 1^e catégorie, en même temps que $|k_0|+|l_0|=1$ — en contradiction avec l'hypothèse.

Soit en particulier:

$$f(x)=\cos x,\qquad g(x)=\sin x.$$

On a alors $c=\sqrt{2}/2$ et

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n\cos\omega_n x+b_n\sin\omega_n x|\geqslant c\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(|a_n|+|b_n|) \tag{12}$$

partout à l'exception d'un ensemble H_σ. Comme

$$a_n\cos\omega_n x+b_n\sin\omega_n x=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\cos(\omega_n x+\vartheta_n),$$

on a en vertu du théorème 5

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x| = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

partout sauf un ensemble H_σ [7]), ce qui montre que la constante c dans la formule (12) est la meilleure possible.

6. L'hypothèse admise dans toutes les considérations de ce travail, à savoir que les fonctions envisagées sont des fonctions de Baire, n'est pas essentielle.

Le lecteur aura remarqué aisément qu'elle peut être remplacée aussi bien dans la définition de $\sup_B f(x)$ que dans les énoncés des théorèmes 1, 4, 5 et 6 par l'hypothèse que les fonctions en question satisfont à la condition de Baire. On n'a pas besoin de modifier la marche des démonstrations. Il faut seulement supprimer dans les thèses des théorèmes l'affirmation que les ensembles de I^e catégorie dont il s'agit dans ces théorèmes sont boreliens.

[7]) C'est un théorème connu de H. Steinhaus; voir par exemple A. Zygmund, op. cit., p. 269.

(Reçu par la Rédaction le 10. III. 1948).

On measures in independent fields

by

S. BANACH †

Edited by S. HARTMAN.

Among the papers left by BANACH was found the incomplet Polish manuscript of this paper, written in 1940. § 1 is almost literally translated from the manuscript. The details of farther reasonings were elaborated by S. HARTMAN, who also supplied the paper with Appendices and adapted it for print, with some help of HENRY HELSON.

§ 1. Let T be an arbitrary space. A family $\mathfrak{K}$ of fields [1]) of sub-sets of T is said to be a family of *independent* fields if any finite number of non-empty sets, belonging to different fields of $\mathfrak{K}$, has a non-empty intersection. That is, $\mathfrak{K}$ is an independent family if the conditions $0 \neq H_i \in A_i \in \mathfrak{K}$ and $A_i \neq A_j$ for $i \neq j$ $(i,j=1,...,n)$ always imply $\prod_{i=1}^{n} H_i \neq 0$.

The family $\mathfrak{K}$ is called a family of *denumerably independent* fields if any sequence of non-empty sets, belonging to different fields of $\mathfrak{K}$, has a non-empty intersection; i. e. if $0 \neq H_i \in A_i \in \mathfrak{K}$ and $A_i \neq A_j$ for $i \neq j$ $(i,j=1,2,...)$ always imply $\prod_{i=1}^{\infty} H_i \neq 0$.

The concept of independence of fields of sets was introduced by MARCZEWSKI [2]), who also proved the following theorem [3]):

[1]) The class A of sub-sets of a space T is called a *field* if A contains with any set its complement and with any finite number of sets their sum. The field A is a *Borel field* if the sum of any denumerable number of sets of A belongs to A.

[2]) Cf. E. Marczewski, *Indépendance d'ensembles et prolongement de mesures (Résultats et problèmes)*, Colloquium Mathematicum I. 2, Wrocław 1948, p. 122-132, especially p. 125-127.

[3]) Ibidem, Théorème II, p. 126-127. For the proof of this theorem see E. Marczewski, *Mesures dans les corps presque indépendants*, Fundamenta Mathematicae 36 (to appear).