Quelques remarques sur les fonctionnelles linéaires

par

M. EIDELHEIT †.

L'auteur de ce travail a été assasiné par les Allemands en mars de 1943. Le manuscrit qu'il fut parvenir à la Rédaction en 1941 a été retrouvé récemment entre les papiers laissés par S. BANACH.

Je vais établir d'abord un théorème concernant la distance [1] entre un point et une variété linéaire dans les espaces du type (B). Il en résulte facilement une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de fonctionnelles linéaires $\{f_n(x)\}$ admette une suite de combinaisons linéaires de ses termes qui converge au sens fort vers une fonctionnelle linéaire $g(x)$ donnée d'avance. Ce résultat sera ensuite appliqué au problème des moments et aux systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.

1. Soit E un espace du type (B). Nous entendons par *variété linéaire dans* E tout ensemble qui s'y obtient par translation d'un ensemble linéaire [2].

Théorème I. *La distance entre un point quelconque x_0 et une variété linéaire M dans E est égale à la plus grande distance entre ce point et les hyperplans qui passent par M.*

Démonstration. On peut évidemment admettre que x_0 n'appartient pas à M. Choisissons arbitrairement un point $x_1 \epsilon M$ et désignons par S l'ensemble de tous les points de la forme $x - x_1$ où $x \epsilon M$. Ainsi défini, S est un ensemble linéaire et on a

(1) $$(x_0, M) = (x_0 - x_1, S).$$

[1] La *distance* entre un point x_0 et un ensemble M dans un espace métrique, désignée ici par (x_0, M), est par définition la borne supérieure des distances entre le point x_0 et ceux de l'ensemble M.

[2] Cf. S. Mazur, *Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen*, Studia Mathematica 4 (1933), p. 70-84, en particulier p. 71.

Soit R l'ensemble des fonctionnelles linéaires $f(x)$ qui sont constantes sur M:

$$f(x) = c_f \qquad \text{pour tout } x \epsilon M \text{ et } f \epsilon R.$$

On a alors pour tout $y \epsilon S$ et $f \epsilon R$

$$|f(x_0) - c_f| = |f(x_0) - f(x_1)| = |f(x_0 - x_1 - y)| \leqslant |f| \cdot |x_0 - x_1 - y|,$$

donc aussi en vertu de (1)

(2) $$\sup_{f \epsilon R} \frac{|f(x_0) - c_f|}{|f|} \leqslant (x_0, M).$$

D'autre part, comme $x_0 - x_1$ n'appartient pas à S, il existe [3] une fonctionnelle linéaire $f_0(x) \epsilon R$ telle que

$$|f_0(x_0 - x_1)| = 1 \qquad \text{et} \qquad |f_0| = \frac{1}{(x_0 - x_1, S)}.$$

On a donc

$$\frac{|f_0(x_0) - c_{f_0}|}{|f_0|} = (x_0 - x_1, S)$$

et, par conséquent, en vertu de (1) et (2)

(3) $$\sup_{f \epsilon R} \frac{|f(x_0) - c_f|}{|f|} = (x_0, M).$$

Soit à présent H un hyperplan donné par l'équation $g(x) = k$, $g(x)$ étant une fonctionnelle linéaire dans E, non nulle. Posons en particulier $M = H$ dans la formule (3). L'ensemble R se compose alors de fonctionnelles de la forme $f(x) = ag(x)$ où a est un nombre réel arbitraire, et on a d'après (3) [4]

$$(x_0, H) = \sup_a \frac{|ag(x_0) - ak|}{|a| \cdot |g|} = \frac{|g(x_0) - k|}{|g|}.$$

En revenant à la formule (3) dans sa forme générale, nous voyons que $|f(x_0) - c_f|/|f|$ est, pour toute fonctionnelle $f \epsilon R$, la distance entre x_0 et l'hyperplan $f(x) = c_f$ qui passe par M.

Le théorème I se trouve ainsi démontré.

[3] Cf. le livre de S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Warszawa 1932, p. 51, Lemme.

[4] On reconnaît dans cette formule une généralisation de celle de Géométrie analytique pour la distance entre un point et un plan.

On démontre par un raisonnement tout à fait analogue [5]) le

Théorème II. *Soit $\overline{M}$ une variété linéaire transfiniment fermée* [6]) *dans l'espace $\overline{E}$ conjugué à E. La distance entre une fonctionnelle linéaire quelconque $f_0(x)\in\overline{E}$ et la variété $\overline{M}$ est égale à la plus grande distance entre cette fonctionnelle et les hyperplans de $\overline{E}$ qui passent par $\overline{M}$ et sont de la forme $f(x)=c$ où $x\in E$ est fixe et c ne dépend pas de f.*

Remarque. La formule (3) et celle qui lui correspond en vertu du théorème II ne seront appliquées dans la suite que dans le cas où M et $\overline{M}$ sont des ensembles linéaires. Ces formules prennent alors la forme plus simple [7]):

$$(4)\qquad (x_0, M)=\sup_{f\in R}\frac{|f(x_0)|}{|f|},\qquad (f_0,\overline{M})=\sup_{x\in\overline{R}}\frac{|f_0(x)|}{|x|}=|f_0|_{\overline{R}},$$

où R et $\overline{R}$ sont des ensembles orthogonaux à M et $\overline{M}$ respectivement [8]).

2. Soient dans E: $\{f_n(x)\}$ une suite de fonctionnelles linéaires et $g(x)$ une fonctionnelle linéaire arbitrairement donnée.

Théorème III. *Pour qu'il existe une suite de combinaisons linéaires des fonctionnelles $f_n(x)$ qui converge au sens fort vers la fonctionnelle $g(x)$, il faut et il suffit que*

$$\lim_{k\to\infty} f_n(x_k)=0 \quad \textit{où} \quad n=1,2,\ldots \quad \textit{entraîne} \quad \lim_{k\to\infty} g(x_k)=0$$

pour toute suite bornée $\{x_k\}$ de points de E.

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, en admettant que $g(x)$ est la limite d'une suite $\{\varphi_n(x)\}$ de combinaisons linéaires des fonctionnelles $f_n(x)$ convergeant au sens fort et que $\|x_k\|\leqslant A$ pour $k=1,2,\ldots$, on a

$$\lim_{n\to\infty}|g-\varphi_n|=0 \quad \text{et} \quad \lim_{k\to\infty}\varphi_n(x_k)=0 \quad \text{pour } n=1,2,\ldots$$

Par conséquent

$$|g(x_k)|\leqslant|g(x_k)-\varphi_n(x_k)|+|\varphi_n(x_k)|\leqslant|g-\varphi_n|\cdot\|x_k\|+|\varphi_n(x_k)|\leqslant$$
$$\leqslant|g-\varphi_n|\cdot A+|\varphi_n(x_k)|,$$

d'où $\overline{\lim_{k\to\infty}}|g(x_k)|\leqslant|g-\varphi_n|\cdot A$, donc $\lim_{k\to\infty}|g(x_k)|=0$.

La condition est suffisante. Désignons, en effet, par $\overline{S}_n$ la fermeture linéaire [9]) de l'ensemble des fonctionnelles $f_1(x), f_2(x),\ldots,f_n(x)$ et par $\overline{R}_n$ l'ensemble de tous les points $x\in E$ satisfaisant aux équations $f_i(x)=0$ pour $i=1,2,\ldots,n$. L'ensemble $\overline{S}$ est transfiniment fermé; on a par conséquent en vertu de (4)

$$(5)\qquad (g,\overline{S}_n)=|g|_{\overline{R}_n}.$$

Etant donnée une suite $\{\varepsilon_n\}$ de nombres positifs tendant vers 0, il existe une suite $\{x_k\}$ de points tels que

$$(6)\qquad x_k\in\overline{R}_k,\qquad |x_k|\leqslant 1,\qquad |g|_{\overline{R}_k}<|g(x_k)|+\varepsilon_k.$$

Évidemment, on a alors $\lim_{k\to\infty} f_n(x_k)=0$ pour $n=1,2,\ldots$, d'où par hypothèse et en tenant compte de (6), $\lim_{n\to\infty}|g|_{\overline{R}_n}=0$. Il s'en suit d'après (5) que $\lim_{n\to\infty}(g,\overline{S}_n)=0$, c. q. f. d.

3. Passons à quelques applications des théorèmes qui viennent d'être établis.

Théorème IV. *Soit $\varphi(t)$ une fonction intégrable au sens de Lebesgue dans l'intervalle $-1<t<+1$, assujettie à la condition*

$$(7)\qquad \int_{-1}^{+1}\varphi(t)t^k dt=0 \quad \textit{pour } k=0,1,\ldots,n-1.$$

[5]) en appliquant au lieu du lemme précité de S. Banach son théorème 8, op. cit., p. 149.

[6]) Nous entendons par là que l'ensemble linéaire qui s'obtient de $\overline{M}$ par translation est transfiniment fermé. Pour la définition de cette notion voir S. Banach, op. cit., p. 119.

[7]) où $|f|_{\overline{R}}$ désigne la norme de la fonctionnelle linéaire f par rapport à l'ensemble linéaire $\overline{R}$.

[8]) On appelle *orthogonal* à M l'ensemble R de toutes les fonctionnelles $f\in\overline{E}$ telles que $f(x)=0$ pour chaque $x\in M$. De même, l'ensemble de tous les points $x\in E$ tels que $f(x)=0$ pour chaque $f\in\overline{M}$ est dit *orthogonal* à $\overline{M}$.

[9]) On appelle *fermeture linéaire* d'un ensemble le plus petit ensemble linéaire qui le contient.

On a alors

$$\left|\int_{-1}^{+1}\varphi(t)\,t^n\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\int_{-1}^{+1}|\varphi(t)|\,dt$$

et la constante $1/2^{n-1}$ *ne peut être remplacée par aucune plus petite.*

D é m o n s t r a t i o n. Considérons toute fonction $\varphi(t)$ comme un point de l'espace L des fonctions intégrables dans l'intervalle $-1<t<+1$ et les fonctions

$$F_k(\varphi)=\int_{-1}^{+1}\varphi(t)\,t^k\,dt \quad \text{où} \quad k=0,1,\dots,n-1$$

comme des fonctionnelles linéaires dans cet espace. La fermeture linéaire de leur ensemble est transfiniment fermée. Désignons-la par $\overline{S}_n$. On a donc en vertu de la formule (4)

$$(F_n,\overline{S}_n)=\sup_{\varphi}\frac{|F_n(\varphi)|}{|\varphi|}=\sup_{\varphi}\frac{\left|\int_{-1}^{+1}\varphi(t)\,t^n\,dt\right|}{\int_{-1}^{+1}|\varphi(t)|\,dt},$$

où l'on a tenu compte de toutes les fonctions $\varphi(t)\in L$ assujetties à (7).

Or, on a d'après un théorème connu de Tschebyscheff

$$(F_n,\overline{S}_n)=\min_{a_0,a_1,\dots,a_{n-1}}\left[\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|t^n-(a_0+a_1t+\dots+a_{n-1}t^{n-1})|\right]=\frac{1}{2^{n-1}},$$

d'où

$$\sup_{\varphi}\frac{\left|\int_{-1}^{+1}\varphi(t)\,t^n\,dt\right|}{\int_{-1}^{+1}|\varphi(t)|\,dt}=\frac{1}{2^{n-1}}, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

4. Envisageons un système infini d'équations linéaires

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}\,\xi_k=c_i \tag{8}$$

telles que

$$\lim_{k\to\infty}a_{ik}=0 \quad \text{pour } i=1,2,\dots \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|<\infty.$$

Admettons de plus que le déterminant D_n formé de n premières lignes et colonnes de la matrice (a_{ik}) ne s'annule pour aucun $n=1,2,\dots$ et posons

$$b_{ik}^{(n)}=-\frac{1}{D_n}\begin{vmatrix} a_{11}\dots a_{1\,i-1} & a_{1k} & a_{1\,i+1}\dots a_{1n}\\ a_{21}\dots a_{2\,i-1} & a_{2k} & a_{2\,i+1}\dots a_{2n}\\ \dots\dots & \dots & \dots\dots\\ a_{n1}\dots a_{n\,i-1} & a_{nk} & a_{n\,i+1}\dots a_{nn}\end{vmatrix}.$$

T h é o r è m e V. *Lorsque le système* (8) *admet pour tout* c_i *au plus une solution* [10], *c'est-à-dire que le système homogène* $\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}\,\xi_k=0$ *n'admet que la solution triviale* $\xi_k=0$ *pour* $k=1,2,\dots$, *il existe pour tout* $\varepsilon>0$ *un* $N=N(m,\varepsilon)$ *naturel tel que*

$$\frac{|b_{mk}^{(n)}|}{1+\sum_{i=1}^{n}|b_{ik}|}<\varepsilon \qquad \textit{pour } n=N+1,N+2,\dots \quad \textit{et} \quad k=1,2,\dots$$

D é m o n s t r a t i o n. Désignons par a_i la suite $\{a_{i1},a_{i2},\dots\}$ et considérons-la comme un point de l'espace (c_0) des suites numériques convergentes vers 0, la suite $\{\xi_k\}$ étant regardée comme représentant une fonctionnelle linéaire définie dans cet espace. En vertu du lemme de Banach (cité dans la démonstration du théorème I), il est facile de voir que la solubilité univoque du système (8) équivaut à la densité dans (c_0) de la fermeture linéaire S de l'ensemble des termes de la suite $\{a_i\}$.

Choisissons un $m=1,2,\dots$ quelconque et désignons par e_m la suite numérique dont le m-ième terme est égal à 1, tous les autres termes étant des zéros. On a alors $(e_m,S)=0$.

Désignons enfin par S_n la fermeture linéaire de l'ensemble de n premiers termes de la suite $\{a_i\}$ et par R_n celui des séries

---

[10]) On trouvera des conditions suffisantes pour la solubilité univoque du système (8) dans divers espaces dans mon travail. *O rozwiązywaniu układów równań liniowych o nieskończenie wielu niewiadomych,* Wiadomości Matematyczne 46 (1938), p. 1-23 (en polonais); pour le résumé de ce travail voir Comptes rendus de l'Acad. des Sc. Paris 205 (1937), p. 206-208.

absolument convergentes $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ où $\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k=0$ pour $i=1,2,\ldots,n$. Il vient $\lim_{n\to\infty}(e_m,S_n)=0$ et l'on a d'après la formule (4)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{\{\xi_k\}\epsilon R_n}\frac{|\xi_m|}{\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|}\right)=0. \tag{9}$$

Mais on retrouve R_n en soumettant les ξ_i (d'ailleurs arbitraires) pour $i=n+1,n+2,\ldots$ à la seule condition $\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|<\infty$ et en posant

$$\xi_i=\sum_{k=n+1}^{\infty}b_{ik}^{(n)}\xi_k \quad \text{pour } i=1,2,\ldots,n.$$

Il existe alors en vertu de (9) un $N=N(m,\varepsilon)$ tel que

$$\frac{\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}b_{mk}^{(n)}\xi_k\right|}{\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}b_{ik}^{(n)}\xi_k\right|+\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|}<\varepsilon$$

pour $n=N+1,N+2,\ldots$ et pour n'importe quelle série absolument convergente $\sum_{i=n+1}^{\infty}\xi_i$. Si l'on pose en particulier $\xi_k=1$ pour un $k>n$ donné et $\xi_i=0$ pour tout $i\neq k$, la démonstration se trouve achevée.

Remarque. On obtient des conditions nécessaires analogues pour la solubilité univoque du système (8) dans d'autres espaces. Ainsi par exemple les conditions

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^p<\infty \quad \text{pour } i=1,2,\ldots \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^q<\infty$$

où $1/p+1/q=1$ entraînent

$$\frac{|b_{mk}^{(n)}|^q}{1+\sum_{i=1}^{\infty}|b_{ik}^{(n)}|^q}<\varepsilon \quad \text{pour } k=1,2,\ldots \quad \text{et} \quad n=N+1,N+2,\ldots$$

Si

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|<\infty \quad \text{pour } i=1,2,\ldots$$

et la suite $\{\xi_k\}$ est bornée, on a

$$\frac{|b_{mk}^{(n)}|}{d_k^{(m)}}<\varepsilon \quad \text{pour } k=1,2,\ldots \quad \text{et} \quad n=N+1,N+2,\ldots$$

où $d_k^{(n)}=\max[1,|b_{1k}^{(n)}|,|b_{2k}^{(n)}|,\ldots,|b_{nk}^{(n)}|]$.

(Reçu par la Rédaction le 4. 5. 1948).