Errata

Page, ligne	*Au lieu de*	*Lire*
39^3	$0<\gamma>$	$0<\gamma<$
128^6	$^{\varepsilon}/_5 m$	$^{\varepsilon}/_{5m}$
128_{12}	$B_k \sin \lambda_k$	$B_k \sin \lambda_k x$
144^{14}	TSCHEBYSCHEFF	TCHEBYCHEFF

Sur les fonctions indépendantes (VII)

(Un essaim de points à l'intérieur d'un cube)

par

H. STEINHAUS (Wrocław).

Cette Note[1]) a pour objet la description du mouvement d'un essaim de points enfermés dans un récipient cubique immobile et réfléchis par ses parois. Les forces extérieures étant nulles et la loi de réflexion étant celle des corps parfaitement élastiques, on obtient immédiatement une solution pour chaque point, donnée d'ailleurs par D. KÖNIG et A. SZÜCS[2]). Comme il n'y a pas des chocs, cette solution s'applique ici. Il s'agit d'étudier le mouvement du centre de la masse totale, supposant les masses de points égales entre elles. Moyennant une hypothèse bien simple sur les vitesses initiales, nous allons démontrer que le centre de masse obéit à la loi connue dans le calcul des probabilités comme *loi de Gauss-Laplace*. Il est évident d'autre part que l'on peut calculer effectivement la position de n'importe quel point particulier à n'importe quel moment particulier, à partir des positions et vitesses initiales qui sont données dans notre exemple comme fonctions de numéro du point. Notre modèle réunit donc deux propriétés que l'on pourrait croire incompatibles: le caractère déterministe avec l'allure statistique.

---

[1]) présentée par l'auteur dans sa communication à la séance du 23 mai 1946 de la Section des Sciences Mathématiques et Naturelles de la Société des Sciences et des Lettres de Wrocław.

[2]) D. König et A. Szücs, *Sur le mouvement d'un point abandonné à l'intérieur d'un cube*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 36 (1913), pp. 79-83.

Le sens de notre assertion sur le mouvement du centre de masse est le suivant: le temps relatif de séjour du centre de masse dans un voisinage cubique de centre du cube est donné par l'intégrale de Laplace (avec erreur majorée par une expression explicite tendant vers 0 avec l'inverse du nombre de points). On obtient le même résultat en traitant notre modèle par le calcul des probabilités classique; nous entendons par là la méthode, devenue célèbre par les modèles de Maxwell et Boltzmann, qui fait appel aux notions imprécises de chaos et d'indépendance pour en déduire une estimation de la probabilité de séjour du centre de masse dans le voisinage en question. Pour le physicien, le temps relatif et la probabilité signifient la même chose; il dira donc que nous ne faisons qu'exprimer un fait connu en termes nouveaux.

Or, il y a une différence essentielle entre notre modèle et celui qui lui correspond selon l'opinion du physicien; c'est que, dans le nôtre, l'hypothèse et la thèse ne contiennent que des notions bien définies, et les raisonnements sont ceux d'analyse pure. L'hypothèse fondamentale suppose les vitesses initiales arithmétiquement indépendantes. Dans l'espace à $3n$ dimensions, où les coordonnées sont les composantes des vitesses, cette hypothèse est réalisée presque partout; on ne peut donc lui reprocher d'être artificielle. La thèse parle du temps relatif; quand on se place au point de vue des empiristes, qui substituent à la notion de probabilité abstraite celle de fréquence relative des épreuves réussies, notre thèse permet d'éliminer les probabilités sans restreindre la portée du résultat pour le physicien.

Si simple qu'il soit, notre exemple peut donc servir pour réfuter un préjugé assez répandu, à savoir que l'ignorance de l'état initial ait la force magique nécessaire pour engendrer les formules désirées et qu'on ne peut pas faire de statistique sinon au dépens de la connaissance des trajectoires individuelles.

Quant aux moyens mathématiques, la Note tire parti d'une publication commune de M. Kac et de moi-même[3]), citée ici comme

[3]) M. Kac et H. Steinhaus, *Sur les fonctions indépendantes (IV)*, Studia Mathematica 7 (1938), pp. 1-15. Cf. A. Wintner, *Über die statistische Unabhängigkeit der asymptotischen Verteilungsfunktionen inkommensurabler Partialschwingungen*, Mathematische Zeitschrift 36 (1933), pp. 618-629.

„Comm. IV", et d'une Note due à H. Auerbach[4]), qui simplifie la déduction de la loi-limite de Laplace pour les variables aléatoires à probabilité uniforme.

Les notions et les théorèmes du §1 de la Note présente sont, en principe, ceux de Comm. IV, mais les démonstrations ont dû être modifiées en vue des applications qui exigeaient parfois de modifier les hypothèses. D'autre part, certains raisonnements qui sont à emprunter verbalement à Comm. IV ont été omis ici.

Le §2 est écrit en tout détail pour supprimer les doutes relatifs à la rigueur; les formules qui y sont établies doivent, en effet, être traitées avec précaution quand on les applique à l'intervalle infini.

Le §3 qui fait usage des calculs de H. Auerbach n'exige pas la connaissance de l'original.

§ 1. Intervalle infini.

Définition 1. $|E|$ désignant la mesure de Lebesgue de l'ensemble E, $|E|_R$ désigne la limite

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\,|E\cdot\langle 0,T\rangle| \tag{1}$$

supposée existante; on appelle $|E|_R$ la *mesure relative* de E dans $\langle 0,\infty)$ et on dit que E est *mesurable* (R) (c. à. d. relativement mesurable dans cet intervalle). Les mesures relatives: *supérieure* $|\overline{E}|_R$ et *inférieure* $|\underline{E}|_R$

$$|\overline{E}|_R = \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\,|E\cdot\langle 0,T\rangle|, \qquad |\underline{E}|_R = \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\,|E|\cdot\langle 0,T\rangle| \tag{2}$$

existent toujours; leur égalité équivaut à la mesurabilité (R) de l'ensemble E.

Définition 2. Une fonction $f(t)$ est dite *mesurable* (R) (relativement mesurable dans $\langle 0,\infty)$), si les deux ensembles

$$\underset{t}{E}\{f(t)<\alpha\}, \qquad \underset{t}{E}\{f(t)>\alpha\} \tag{3}$$

sont mesurables (R) quel que soit le nombre réel α.

[4]) H. Auerbach, *Über die Fehlerwahrscheinlichkeit einer Summe von Dezimalzahlen*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 13 (1933), pp. 386-388. Ce mathématicien distingué et homme de rares qualités d'esprit et de coeur a été assassiné par les Allemands à Lwów en 1942.

Définition 3. La fonction

$$F(\alpha)=|\underset{t}{E}\{f(t)<\alpha\}|_R, \tag{4}$$

où $f(t)$ est une fonction mesurable (R), sera appelée *distributrice* (R) (distributrice relative) de $f(t)$ ou sa *distributrice* tout court.

Définition 4. $M_R(f)$ désignera la *moyenne relative* de $f(t)$ dans $\langle 0,\infty)$, c.-à.-d. la limite

$$\lim_{j\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\bar{l}_k^{(j)}|\underset{t}{E}\{l_k^{(j)}\leqslant f(t)<l_{k+1}^{(j)}\}|_R \qquad (l_k^{(j)}\leqslant\bar{l}_k^{(j)}\leqslant l_{k+1}^{(j)}); \tag{5}$$

$\{l_k^{(j)}\}$ y est une séquence arithmétique à indice courant k et à différence $\Delta^{(j)}>0$, avec $\lim_{j\to\infty}\Delta^{(j)}=0$ et $l_0^{(j)}=0$.

Si la limite (5) existe pour tous les $\{\{l_k^{(j)}\}\}$ caractérisés ici, elle est unique. Nous admettons dans la suite que la fonction $f(t)$ est mesurable (R) et que la limite (5) existe.

Théorème 1. *Toute fonction $f(t)$ bornée dans $\langle 0,\infty)$ et mesurable (R) admet une moyenne relative et on a*

$$M_R\{f\}=\int_{-b}^{b}\alpha\,dF(\alpha), \tag{6}$$

b étant la borne supérieure de $|f(t)|$, $F(\alpha)$ la distributrice de $f(t)$ et l'intégrale étant prise aus sens de Riemann-Stieltjes.

Démonstration. $F(\alpha)$ étant monotone, l'intégrale de Riemann-Stieltjes existe et l'algorithme qui sert à la calculer est identique à celui qui donne $M_R\{f\}$.

Définition 5. $M_B\{f\}$ désignera la moyenne

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \tag{7}$$

en supposant l'intégrabilité (L) de $f(t)$ dans tout intervalle $\langle 0,T\rangle$ avec T positif, et l'existence de la limite (7).

L'intégrabilité implique l'existence des limites

$$\overline{M}_B\{f\}=\lim_{T\to\infty}\sup\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt, \qquad \underline{M}_B\{f\}=\lim_{T\to\infty}\inf\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt, \tag{8}$$

dont l'égalité équivaut à l'existence de (7).

Théorème 2. *Toute fonction $f(t)$ bornée dans $\langle 0,\infty)$ et mesurable (R) admet les moyennes $M_B\{f\}$ et $M_R\{f\}$, et l'on a*

$$M_B\{f\}=M_R\{f\}. \tag{9}$$

Pour la démonstration, voir Comm. IV, p. 3; elle porte sur l'intervalle $(-\infty,\infty)$, ce qui est une différence peu essentielle.

Définition 6. Les fonctions $f_k(t)$ seront dites *mutuellement indépendantes*, ce qui s'écrira en abrégé MI, et de même le système $\{f_k(t)\}$ sera appelé MI, si les deux termes de l'égalité

$$|\underset{t}{E}\{f_1\in I_1,\ f_2\in I_2,\ \ldots,\ f_n\in I_n\}|_R=\prod_{k=1}^{n}|\underset{t}{E}\{f_k\in I_k\}|_R \tag{10}$$

existent pour tout nombre naturel n, quels que soient les intervalles (ouverts ou fermés, finis ou infinis) I_k, où $k=1,2,\ldots,n$, et si cette égalité a lieu.

Définition 7. Toute fonction continue $g(x)$ sera dite *fonction de Dirichlet*, en abrégé *fonction D*, si l'intervalle où elle est définie peut être divisé en un nombre fini d'intervalles partiels dans lesquels elle est monotone.

Théorème 3. *La fonction $f(t)$ étant mesurable (R) et bornée, $b\leqslant f(t)\leqslant B$, et $g(x)$ étant une fonction D dans $\langle b,B\rangle$, la fonction $g(f(t))$ est mesurable (R) et bornée.*

Démonstration. Il est évident que $g(f(t))$ est bornée. Soit I un intervalle quelconque; la définition 2 implique la mesurabilité (R) de l'ensemble $\underset{t}{E}\{f(t)\in I\}$. La relation $g(f(t))\leqslant\alpha$ est équivalente à $f(t)=x$ avec $g(x)\leqslant\alpha$; la relation $g(x)\leqslant\alpha$ équivaut à $x\in\sum_{k=1}^{n}I_k$ où les I_k sont des intervalles fermés (déterminés par α) situés dans $\langle b,B\rangle$ et disjoints deux à deux. Il s'ensuit que

$$\underset{t}{E}\{g(f(t))\leqslant\alpha\}=\sum_{k=1}^{n}\underset{t}{E}\{f(t)\in I_k\},$$

la somme à droite ayant un nombre fini de termes disjoints et mesurables (R); cela implique la mesurabilité (R) du terme gauche, donc aussi de l'ensemble complémentaire $\underset{t}{E}\{g(f(t))>\alpha\}$. La mesurabilité (R) de l'ensemble $\underset{t}{E}\{g(f(t))<\alpha\}$ se déduit de la même manière.

Théorème 4. *Si le système* $\{f_k(t)\}$ *où* $b_k \leqslant f_k(t) \leqslant B_k$ $(0 \leqslant t < \infty)$ *est MI et* $g_k(x)$ *sont des fonctions D dans les intervalles respectifs* $\langle b_k, B_k \rangle$, *le système* $\{g_k(f_k(t))\}$ *est MI et ses termes sont bornés et mesurables* (*R*).

Démonstration. L'hypothèse implique, d'après la définition 6, la mesurabilité (*R*) de chaque $f_k(t)$; le théorème 3 fournit donc la deuxième partie de la thèse. Pour en établir la première, il faut, d'après la définition 6, démontrer la relation

$$|\prod_{k=1}^{n} \underset{t}{E}\{g_k(f_k(t)) \in I_k\}|_R = \prod_{k=1}^{n} |\underset{t}{E}\{g_k(f_k(t)) \in I_k\}|_R. \tag{11}$$

Or, $g_k(f_k(t)) \in I_k$ équivaut à $f_k(t) \in \sum_{r=1}^{m_k} J_k^{(r)}$, cette somme étant composée d'un nombre fini m_k d'intervalles de toute espèce, disjoints deux à deux. On peut donc remplacer dans (11) $\underset{t}{E}\{g_k(f_k(t))\}$ par

$$\sum_{r=1}^{m_k} \underset{t}{E}\{f_k(t) \in J_k^{(r)}\}.$$

Les $J_k^{(r)}$ étant disjoints, on peut écrire, au lieu du premier terme de (11), la somme des mesures des ensembles tels que

$$\underset{t}{E}\{f_1(t) \in J_1^{(r_1)},\ f_2(t) \in J_2^{(r_2)},\ \ldots,\ f_n(t) \in J_n^{(r_n)}\}, \tag{12}$$

et, au lieu du second terme, la somme des produits tels que

$$\prod_{k=1}^{n} |\underset{t}{E}\{f_k(t) \in J_k^{(r_k)}\}|_R. \tag{13}$$

D'après la definition 6, la mesure (*R*) de (12) est égale à (13) en vertu de l'hypothèse relative à $f(t)$, ce qui achève la démonstration.

Théorème 5. *Si les fonctions* $f_k(t)$, *où* $k=1, 2, \ldots, n$, *bornées et mesurables* (*R*), *sont MI, les deux termes de l'égalité*

$$M_B\{f_1^{p_1} f_2^{p_2} \ldots f_n^{p_n}\} = \prod_{k=1}^{n} M_B\{f_k^{p_k}\} \tag{14}$$

existent pour tous les p_k *naturels et on a* (14). *Si pour tous les* p_k *naturels où* $k=1, 2, \ldots, n$, *les deux termes de* (14) *existent, satisfont à cette égalité et, en outre, les distributrices des* $f_k(t)$ *sont continues, ces fonctions sont MI.*

Démonstration. La relation

$$M_B\{f_1 f_2 \ldots f_n\} = \prod_{k=1}^{n} M_B\{f_k\} \tag{15}$$

a été établie dans Comm. IV (pp. 5-7, th. 1) pour tout système $\{f_k\}$ de fonctions bornées qui est *MI*; l'existence de deux termes en question y fait partie de la thèse. En appliquant le théorème 4 avec $g_k(x) = x^{p_k}$, on vérifie que les $f_k^{p_k}$ jouissent des mêmes propriétés que les f_k, ce qui permet de déduire (14) de (15).

Pour en démontrer la réciproque, on peut profiter du raisonnement employé dans Comm. IV (pp. 7-10, th. 2) pour le cas $n=2$. On y utilise la continuité absolue des distributrices des $f_k(t)$; cependant, comme cette hypothèse n'y est employée que pour établir la mesurabilité (*R*) des fonctions $\Phi(f_1), \ldots, \varphi(f_2)$, le raisonnement subsiste sans cette hypothèse, pourvu que l'on choisisse les fonctions Φ, ψ, Ψ et φ parmi les fonctions *D*; le théorème 3 de la Note présente assure alors la mesurabilité (*R*) des fonctions composées. La généralisation pour $n > 2$ est immédiate.

Définition 8. Un système fini de nombres $\{\lambda_k\}$, où $k=1, 2, \ldots, n$, sera dit *arithmétiquement indépendant* si la relation

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \lambda_k = 0$$

aux coefficients entiers c_k implique toujours l'égalité

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0.$$

Théorème 6. *Si le système* $\{\lambda_k\}$ *est arithmétiquement indépendant, le système* $\{\cos \lambda_k t\}$ *est MI.*

Démonstration (Comm. IV, pp. 10-11, th. 3). On peut écrire le produit de puissances des cosinus comme une somme. En substituant dans (14) $\cos \lambda_k t$ à $f_k(t)$, on pourra calculer explicitement les deux membres de (14), qui sont égaux à

$$\frac{1}{2^{p_1+p_2+\ldots+p_n}} \binom{p_1}{p_1/2} \binom{p_2}{p_3/2} \ldots \binom{p_n}{p_n/2},$$

quand on convient que $\binom{p_k}{p_k/2} = 0$ pour p_k impair. Les distributrices des $\cos \lambda_k t$ étant évidemment continues, la deuxième partie du théorème 5 entraîne la thèse qui était à démontrer.

§ 2. Fonctions birégulières.

Définition 9. Soit

$$(16)\qquad F(\alpha)=\begin{cases}0 & \text{pour } \alpha<-1,\\ \dfrac{\alpha+1}{2} & \text{pour } -1\leqslant\alpha\leqslant 1,\\ 1 & \text{pour } \alpha>1.\end{cases}$$

On appelle *birégulière* toute fonction $f(t)$ dont $F(\alpha)$ est la distributrice.

En rendant arc sin x univoque par la convention $|\arc \sin x|\leqslant\pi/2$, on obtient une fonction D dans $\langle -1, 1\rangle$. D'autre part, le système $\{\pi\lambda_k\}$ est arithmétiquement indépendant en même temps que $\{\lambda_k\}$, donc le système $\{-\cos\pi\lambda_k t\}$ est MI d'après le théorème 6, et les fonctions

$$(17)\qquad x_k(t)=\frac{2}{\pi}\arcsin(-\cos\pi\lambda_k t)\qquad (k=1,2,\dots,n)$$

sont MI d'après le théorème 4. Il est aisé de voir que les fonctions $x_k(t)$ sont birégulières; ce sont d'ailleurs des fonctions continues périodiques et leurs images se composent de segments rectilignes.

Définition 10. Les fonctions $z_k(t)$, où $z_k(t)=\xi_k(t)+i\eta_k(t)$ et $i=\sqrt{-1}$, seront dites MI, et le système $\{z_k(t)\}$ sera appelé de-même, si tout système qui s'en obtient en remplaçant z_k tantôt par sa partie réelle ξ_k, tantôt par sa partie imaginaire η_k, est MI au sens de la définition 6.

Pour tout λ réel, les fonctions $\{x_k(t)\}$ forment un système MI; en outre, elles sont bornées par $\pm|\lambda|$; comme $\cos x$ et $\sin x$ sont des fonctions D dans $\langle -|\lambda|, |\lambda|\rangle$, le système $\{e^{i\lambda x_k(t)}\}$ est MI au sens de la définition 10 en vertu du théorème 4, car

$$e^{i\lambda x_k(t)}=\cos\lambda x_k(t)+i\sin\lambda x_k(t).$$

En appliquant le théorème 5 à chaque terme de la partie réelle et de la partie imaginaire de $\prod_{k=1}^{n} e^{i\lambda x_k(t)}$, on obtient par suite de l'additivité de l'opération M_B la relation

$$(18)\qquad M_B\{\prod_{k=1}^{n} e^{i\lambda x_k(t)}\}=\prod_{k=1}^{n} M_B\{e^{i\lambda x_k(t)}\}$$

et l'existence de ses termes. En écrivant $s_n(t)$ pour $\sum_{k=1}^{n} x_k(t)$, la relation (18) donne en vertu de (9)

$$(19)\qquad M_B\{e^{i\lambda s_n(t)}\}=(M_R\{e^{i\lambda x_1(t)}\})^n,$$

car les distributrices $F(\alpha)$ sont les mêmes pour tous les $x_k(t)$. Or, on a d'après le théorème 1

$$M_R\{e^{i\lambda x_1(t)}\}=\int_{-1}^{1} e^{i\lambda\alpha}\,dF(\alpha)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{i\lambda\alpha}\,d\alpha=\frac{\sin\lambda}{\lambda},$$

donc

$$(20)\qquad M_B\{e^{i\lambda s_n(t)}\}=\left(\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right)^n.$$

Pour démontrer la mesurabilité (R) des fonctions $s_n(t)$ et la continuité de leurs distributrices, nous nous servirons des deux théorèmes généraux suivants:

Théorème 7. *Soient $f(t)$ et $g(t)$ des fonctions mutuellement indépendantes, mesurables (R), bornées et à distributrices respectives $F(\alpha)$ et $G(\alpha)$ continues. Soit $S(\alpha)$ la distributrice de $f(t)+g(t)$. Alors on a*

$$(21)\qquad S(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} G(\alpha-\beta)\,dF(\beta),$$

l'existence de deux termes faisant partie de la thèse.

Théorème 8. *Sous les hypothèses du théorème 7, la fonction $S(\alpha)$ est continue.*

Démonstration du th. 7. Soit $\{l_i\}$ une séquence arithmétique avec la différence $l_{i+1}-l_i=\Delta>0$ et $i=\dots,-2,-1,0,1,2,\dots$

Posons:

$$Z=\underset{t}{E}\{f(t)+g(t)<\alpha\},\qquad F_i=\underset{t}{E}\{l_i\leqslant f(t)<l_{i+1}\},$$
$$G_i=\underset{t}{E}\{g(t)>\alpha-l_{i+1}\},\qquad G'_i=\underset{t}{E}\{g(t)<\alpha-l_i\}.$$

On a

$$(22)\qquad \sum_{i=-\infty}^{\infty} F_iG_i\subset Z\subset\sum_{i=-\infty}^{\infty} F_iG'_i;$$

la première de ces inclusions est évidente; la seconde résulte de ce que tout point t appartient à un F_i bien determiné, et que les relations $t\in Z$, $t\in F_i$ impliquent $t\in G'_i$, donc $t\in F_iG'_i$.

Les termes des sommes (22) sont disjoints, car les F_i le sont. Les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ étant bornées, on peut remplacer ces sommes par des sommes finies, les ensembles F_i étant vides pour i assez grand. D'après la définition 6, chaque F_i, G_i, G'_i, F_iG_i et $F_iG'_i$ est mesurable (R) et l'on a

$$|F_iG_i|_R = |F_i|_R \cdot |G_i|_R, \qquad |F_iG'_i|_R = |F_i|_R\, |G'_i|_R. \tag{23}$$

On peut donc écrire en vertu de (22) et (23):

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |F_iG_i|_R \leqslant |\underline{Z}|_R \leqslant |\overline{Z}|_R \leqslant \sum_{i=-\infty}^{\infty} |F_iG'_i|_R,$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |F_i|_R\, |G_i|_R \leqslant |\underline{Z}|_R \leqslant |\overline{Z}|_R \leqslant \sum_{i=-\infty}^{\infty} |F_i|_R\, G'_i|_R,$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} [F(l_{i+1})-F(l_i)]\, G(\alpha-l_{i+1}) \leqslant |\underline{Z}|_R \leqslant |\overline{Z}|_R \leqslant \sum_{i=-\infty}^{\infty} [F(l_{i+1})-F(l_i)]\, G(\alpha-l_i). \tag{24}$$

La différence entre le dernier et le premier membre de (24) est

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} [F(l_{i+1})-F(l_i)]\,[G(\alpha-l_i)-G(\alpha-l_{i+1})] \leqslant 0;$$

elle tend vers 0 avec Δ et les deux membres tendent vers l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\alpha-\beta)\, dF(\beta), \tag{25}$$

qui existe, car F et G sont par hypothèse bornées et continues, et par définition monotones. Il s'ensuit que $S(\alpha)=|Z|_R$ existe aussi et que l'égalité (21) est vraie.

Démonstration du th. 8. $F(\beta)$ étant constante pour $|\beta|$ assez grand, on peut remplacer les limites de l'intégrale (25) par des nombres finis; la continuité de G entraîne alors celle de $S(\alpha)$.

Les théorèmes 7 et 8 étant ainsi établis, il suffit de les appliquer aux fonctions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ pour voir que $s_2(t)=x_1(t)+x_2(t)$ est une fonction bornée, mesurable (R) et à distributrice continue.

En vue de montrer l'indépendance mutuelle de $s_2(t)$ et $x_3(t)$, qui nous sera utile dans la suite, nous pouvons employer le critère (14) du théorème 5; les distributrices étant continues et les

fonctions bornées, il suffit de vérifier l'existence de deux termes de la relation

$$M_B\{s_2^p x_3^q\} = M_B\{s_2^p\}\, M_B\{x_3^q\} \tag{26}$$

et leur égalité pour tous p et q naturels. Or, les moyennes à droite existent en vertu des théorèmes 4 et 2; quant à la moyenne (B) de $s_2^p x_3^q$, la formule

$$s_2^p = x_1^p + \binom{p}{1} x_1^{p-1} x_2 + \ldots + x_2^p \tag{27}$$

réduit la question de son existence à celle de l'existence de moyennes

$$M_B\{x_1^p x_3^q\}, \qquad M_B\{x_1^{p-1} x_2 x_3^q\}, \qquad \ldots, \qquad M_B\{x_2^p x_3^q\};$$

d'après le théorème 5, elles existent bien par suite de l'indépendance mutuelle des fonctions x_1, x_2, x_3 et sont égales respectivement à

$$M_B\{x_1^p\}\, M_B\{x_3^q\}, \qquad M_B\{x_1^{p-1}\}\, M_B\{x_2\}\, M_B\{x_3^q\}, \qquad \ldots, \qquad M_B\{x_2^p\}\, M_B\{x_3^q\}.$$

Si l'on réduit aussi le second membre de (26) au moyen de (27) et qu'on applique le théorème 4 au couple x_1, x_2, on obtient de part et d'autre la somme

$$M_B\{x_1^p\}\, M_B\{x_3^q\} + \binom{p}{1} M_B\{x^{p-1}\}\, M_B\{x_2\}\, M_B\{x_3^q\} + \ldots + M_B\{x_2^p\}\, M_B\{x_3^q\}.$$

L'égalité (26) étant ainsi établie, l'induction donne la proposition générale suivante:

Théorème 9. *La somme $s_n(t)$ de n fonctions $f_k(t)$ bornées, mesurables (R), mutuellement indépendantes et à distributrices continues $F_k(\alpha)$ est elle-même une fonction bornée, mesurable (R), à distributrice continue $S_n(\alpha)$ et l'on a:*

$$S_k(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{k-1}(\alpha-\beta)\, dF_k(\beta) \quad \textit{pour } k=2,3,\ldots,n. \tag{28}$$

Nous pouvons continuer maintenant le raisonnement interrompu à la formule (20). En appliquant le théorème 9 aux fonctions $f_k = x_k(t)$ et en rappellant que $\cos\lambda x$ et $\sin\lambda x$ sont des fonctions D, nous déduisons de (20), en vertu des théorèmes 4 et 2, l'égalité

$$M_R\{e^{i\lambda s_n(t)}\} = \left(\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right)^n. \tag{29}$$

Dans la formule (28), la fonction $F_k(\beta)$ est identique à la fonction $F(\beta)$ définie par (16), ce qui permet de remplacer (28) par

$$S_k(\alpha)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}S_{k-1}(\alpha-\beta)\,d\beta \qquad (k=2,3,\dots,n). \tag{30}$$

Nous allons montrer que la distributrice $S_n(\alpha)$ est croissante pour $-n\leqslant\alpha\leqslant n$. C'est évident pour $n=1$, car $S_1(\alpha)=F_1(\alpha)=F(\alpha)$. Admettons que $S_{k-1}(\alpha)$ soit croissante dans $\langle-(k-1),\ k-1\rangle$ et considérons dans $\langle -k,k\rangle$ deux points α' et α'' tels que

$$0<\alpha''-\alpha'<1;$$

l'égalité (30) entraîne

$$S_k(\alpha'')-S_k(\alpha')=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}[S_{k-1}(\alpha''-\beta)-S_{k-1}(\alpha'-\beta)]\,d\beta \tag{31}$$

et il y a un β_0 dans $\langle-1,\ 1\rangle$ tel que $\alpha''-\beta_0$ et $\alpha'-\beta_0$ appartiennent à $\langle-(k-1),\ k-1\rangle$. La différence sous le signe $\int$ dans (31) est non négative, S_{k-1} étant une distributrice; elle est positive pour $\beta=\beta_0$: l'intégrale est donc positive, ce qui montre que $S_k(\alpha)$ est croissante dans $\langle -k,\ k\rangle$.

$S_n(\alpha)$ est donc égale à 0 pour $\alpha\leqslant -n$, égale à 1 pour $\alpha\geqslant n$ et croissante pour $-n<\alpha<n$; elle est continue partout. Soit $\alpha=g(t)$ une fonction définie par $t=S_n(\alpha)$ pour $0\leqslant t\leqslant 1$ avec la condition $|\alpha|\leqslant n$, qui rend la définition univoque; la fonction $g(t)$ est croissante et continue dans $\langle 0,1\rangle$. La distributrice de $g(t)$ dans $\langle 0,1\rangle$ définie par

$$|\underset{t}{E}\{g(t)<\alpha\}|$$

— comme d'habitude pour les fonctions mesurables (L) définies dans $\langle 0,1\rangle$ — est évidemment identique à la fonction $S_n(\alpha)$. Il s'ensuit que $\lambda g(t)$ a dans $\langle 0,1\rangle$ la même distributrice que $\lambda s_n(t)$ dans $\langle 0,\infty)$. Pareillement, les distributrices de $\frac{\cos}{\sin}\lambda g(t)$ et de $\frac{\cos}{\sin}\lambda s_n(t)$ dans les intervalles respectifs $\langle 0,1\rangle$ et $\langle 0,\infty\rangle$ sont les mêmes. Or, la définition 4 de $M_R\{f\}$ est basée sur le même algorithme que la définition de Lebesgue de $\int_0^1 g(t)\,dt$, pourvu

que la distributrice de $f(t)$ dans $\langle 0,\infty)$ soit identique à celle de $g(t)$ dans $\langle 0,1\rangle$. Ces remarques permettent d'écrire

$$\int_0^1 e^{i\lambda g(t)}\,dt=\left(\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right)^n \qquad (i=\sqrt{-1}) \tag{32}$$

au lieu de (29); l'intégrale peût être supposée riemanienne.

Nous allons appliquer à la fonction caractéristique

$$H(\lambda)=\int_0^1 e^{i\lambda g(t)}\,dt \tag{33}$$

de $g(t)$ la transformation classique

$$J(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}H(\lambda)\frac{e^{-i\lambda\alpha}}{i\lambda}\,d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{e^{-i\lambda\alpha}}{i\lambda}\int_0^1 e^{i\lambda g(t)}\,dt\right\}d\lambda= \tag{34}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^1\frac{e^{i\lambda(g(t)-\alpha)}}{i\lambda}\,dt\right\}d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^1\frac{\cos\lambda(g(t)-\alpha)}{i\lambda}dt+\int_0^1\frac{\sin\lambda(g(t)-\alpha)}{\lambda}dt\right\}d\lambda=$$

$$=\mathscr{R}+i\mathscr{T},$$

avec

$$\mathscr{R}=\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_0^1\frac{\sin\lambda h(t)}{\lambda}\,dt,\qquad \mathscr{T}=-\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_0^1\frac{\cos\lambda h(t)}{\lambda}\,dt, \tag{35}$$

en écrivant $h(t)$ pour $g(t)-\alpha$ et en définissant l'intégrale impropre $\mathscr{T}$ par rapport à λ par la formule

$$\mathscr{T}=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ 0<\varepsilon<1}}\left\{\int_{\varepsilon}^{1}+\int_{-1}^{-\varepsilon}\right\}+\lim_{\substack{A\to\infty\\ A>1}}\left\{\int_1^A+\int_{-A}^{-1}\right\}. \tag{36}$$

Cette définition donne immédiatement $\mathscr{T}=0$, car la fonction à intégrer $\int_0^1\frac{\cos\lambda h(t)}{\lambda}\,dt$ est une fonction impaire de λ.

Pour établir l'existence de la fonction $J(\alpha)$, introduite par (34), on n'a qu'à démontrer la convergence de l'intégrale $\mathscr{R}$ de (35). Commençons par

$$\int_0^{\infty}d\lambda\int_0^1\frac{\sin\lambda h(t)}{\lambda}\,dt=\lim_{\substack{A\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{\varepsilon}^{A}d\lambda\int_0^1\frac{\sin\lambda h(t)}{\lambda}\,dt \qquad (A>\varepsilon>0), \tag{37}$$

Dans le rectangle $\varepsilon \leqslant \lambda \leqslant A$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\varepsilon > 0$, on a

$$\left|\frac{\sin \lambda h(t)}{\lambda}\right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon};$$

on y peut donc intervertir l'ordre d'intégration en écrivant

$$\int_{\varepsilon}^{A} d\lambda \int_{0}^{1} \frac{\sin \lambda h(t)}{\lambda} dt = \int_{0}^{1} dt \int_{\varepsilon}^{A} \frac{\sin \lambda h(t)}{\lambda} d\lambda = \int_{0}^{1} dt \int_{\varepsilon h(t)}^{Ah(t)} \frac{\sin \mu}{\mu} d\mu;$$

il s'agit de calculer la limite

$$L = \lim_{\substack{A\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_{0}^{1} dt \int_{\varepsilon h(t)}^{Ah(t)} \frac{\sin \mu}{\mu} d\mu \qquad (A > \varepsilon > 0). \tag{38}$$

Or,

$$\lim_{\substack{A\to\infty \\ \varepsilon = 0}} \int_{\varepsilon h(t)}^{Ah(t)} \frac{\sin \mu}{\mu} d\mu = \begin{cases} \pi/2 & \text{pour} \quad h(t) > 0, \\ 0 & \text{pour} \quad h(t) = 0, \\ -\pi/2 & \text{pour} \quad h(t) < 0; \end{cases}$$

on a d'ailleurs

$$\left|\int_{\beta}^{\gamma} \frac{\sin \mu}{\mu} d\mu\right| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \mu}{\mu} d\mu < 2\pi,$$

quels que soient β et γ. L'intégrale intérieure de (38) est donc une fonction absolument bornée par 2π, ce qui justifie l'interversion de „lim" et de „$\int dt$":

$$L = \int_{0}^{1} dt \left\{ \lim_{\substack{A\to\infty \\ 0<\varepsilon\to 0}} \int_{\varepsilon h(t)}^{Ah(t)} \frac{\sin \mu}{\mu} d\mu \right\} = \frac{\pi}{2}\left|\underset{t}{E}\{h(t)>0\}\right| - \frac{\pi}{2}\left|\underset{t}{E}\{h(t)<0\}\right|. \tag{39}$$

Les formules (35), (37), (38) et (39) donnent

$$\mathscr{R} = 2L = \pi\{\left|\underset{t}{E}\{h(t)>0\}\right| - \left|\underset{t}{E}\{h(t)<0\}\right|\}. \tag{40}$$

Comme $h(t) = g(t) - \alpha$, on obtient de (34), (35) et (40), en tenant compte de ce que $\mathscr{T} = 0$,

$$J(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda) \frac{e^{-i\lambda\alpha}}{i\lambda} d\lambda = \pi\,[1 - S_n(\alpha+0) - S_n(\alpha)]. \tag{41}$$

La distributrice S_n de $g(t)$ étant continue, on peut identifier $S_n(\alpha+0)$ à $S_n(\alpha)$ pour tirer des formules (32), (33) et (41) la formule finale

$$S_n(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin \lambda}{\lambda}\right)^n \cdot \frac{e^{-i\lambda\alpha}}{\lambda} d\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\sin \lambda}{\lambda}\right)^n \frac{\sin \lambda\alpha}{\lambda} d\lambda; \tag{42}$$

ici la partie divergente de l'intégrale disparaît grâce à la convention (36).

§ 3. Calculs numériques.

Pour les applications, il est nécessaire d'exprimer l'intégrale (42) par la fonction Θ de Gauss, en indiquant en même temps la borne de l'erreur de cette expression.

Nous réproduisons ici les calculs de la Note précitée de H. Auerbach. On remplace $\frac{\sin \lambda}{\lambda}$ par $e^{\frac{-\lambda}{6}}$ dans (42); la différence

$$\Delta_n(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[e^{-\frac{n v^2}{6}} - \left(\frac{\sin v}{v}\right)^n\right]\frac{\sin v\alpha}{v} dv \tag{43}$$

entre l'expression approchée

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{n v^2}{6}} \cdot \frac{\sin v\alpha}{v} dv \tag{44}$$

et $S_n(\alpha)$ est à majorer convenablement.

Lemme 1. On a

$$0 < e^{-\frac{v^2}{6}} - \frac{\sin v}{v} < \frac{v^4}{180} \qquad \text{pour } 0 < v \leqslant 3. \tag{45}$$

En effet, le développement de Taylor donne pour $v > 0$

$$e^{-\frac{v^2}{6}} - \frac{\sin v}{v} = \frac{v^4}{180} - \left(\frac{1}{1296} - \frac{1}{5040}\right)v^6 + \left(\frac{e^{-\frac{\vartheta v^2}{6}}}{31104} - \frac{\cos \eta v}{362880}\right)v^8$$

avec $0 < \vartheta < 1$ et $0 < \eta < 1$; le troisième terme est le reste de Lagrange. On en tire

$$e^{-\frac{v^2}{6}} - \frac{\sin v}{v} > \left[\frac{1}{180} - \left(\frac{1}{1296} - \frac{1}{5040}\right)v^2 - \frac{1}{362880}v^4\right]v^4, \tag{46}$$

$$(47)\qquad e^{-\frac{v^2}{6}} - \frac{\sin v}{v} < \frac{v^4}{180} - \left[\left(\frac{1}{1296} - \frac{1}{5040}\right) - \left(\frac{1}{31104} + \frac{1}{362880}\right)v^2\right]v^6.$$

La fonction de v, mise entre crochets dans (46), est décroissante dans $\langle 0,3\rangle$ et positive pour $v=3$; il s'ensuit que le terme droit de (46) est positif dans $(0,3\rangle$, d'où

$$(48)\qquad 0 < e^{-\frac{v^2}{6}} - \frac{\sin v}{v} \qquad \text{pour } 0 < v \leqslant 3.$$

La fonction de v entre crochets dans (47) jouit des mêmes propriétés que celle dans (46); il s'ensuit que l'expression

$$\frac{v^4}{180} - e^{-\frac{v^2}{6}} + \frac{\sin v}{v}$$

est positive dans $(0,3\rangle$, d'où

$$(49)\qquad e^{-\frac{v^2}{6}} - \frac{\sin v}{v} < \frac{v^4}{180} \qquad \text{pour } 0 < v \leqslant 3.$$

Les inégalités (48) et (49) entraînent (45).

Lemme 2. On a

$$(50)\qquad e^{-\frac{v^2}{6}} < \frac{1}{v} \qquad \text{pour } v \geqslant 3.$$

En effet, $f(v) = ve^{-\frac{v^2}{6}} - 1$ entraîne $f'(v) = e^{-\frac{v^2}{6}}\left(1 - \frac{v^2}{3}\right)$ et $f'(v) < 0$ pour $v > \sqrt{3}$; or $f(3) < 0$, donc $f(v) < 0$ pour $v \geqslant 3$.

Lemme 3. En posant

$$(51)\qquad e^{-\frac{nv^2}{6}} - \left(\frac{\sin v}{v}\right)^n = \left(e^{-\frac{v^2}{6}} - \frac{\sin v}{v}\right) p_n(v),$$

on a pour tout $n > 2$ naturel

$$(52)\qquad |p_n(v)| < ne^{-\frac{n-1}{6}v^2} \qquad \text{pour } 0 < v \leqslant 3.$$

On a d'après (51)

$$p_n(v) = e^{-\frac{(n-1)v^2}{6}} + e^{-\frac{(n-2)v^2}{6}} \cdot \frac{\sin v}{v} + \ldots + \left(\frac{\sin v}{v}\right)^n,$$

et en vertu du lemme 1

$$\frac{\sin v}{v} < e^{-\frac{v^2}{6}} \quad \text{et} \quad \frac{\sin v}{v} > 0 \qquad \text{pour } 0 < v \leqslant 3,$$

ce qui implique (52).

Les lemmes 1, 2 et 3 étant ainsi établis, revenons à la représentation de $S_n(t)$ à l'aide de la fonction Θ. La fonction à intégrer dans (43) peut être majorée absolument dans $(0,3\rangle$ par

$$|\alpha|\frac{v^4}{180} \cdot ne^{-\frac{n-1}{6}v^2}$$

grâce à (51), (52), (45) et à l'inégalité $\left|\frac{\sin \alpha v}{v}\right| < |\alpha|$, et dans $\langle 3, \infty)$ par $\frac{2}{v^{n+1}}$ grâce à (50). On obtient ainsi pour $n \geqslant 14$

$$(53)\qquad |\varDelta_n(\alpha)| < \frac{|\alpha|}{\pi}\int_0^3 \frac{v^4}{180} ne^{-\frac{n-1}{6}v^2} dv + \frac{2}{\pi}\int_3^\infty \frac{dv}{v^{n+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}|\alpha|n}{5\pi(n-1)^{5/2}}\int_0^{3\sqrt{\frac{n-1}{6}}} u^4 e^{-u^2} du + \frac{2}{n\pi 3^n}$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{6}|\alpha|n}{5\pi(n-1)^{5/2}}\int_0^\infty u^4 e^{-u} du + \frac{2}{\pi n 3^n} = \frac{\sqrt{6}|\alpha|n}{5\pi(n-1)^{5/2}} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{8} + \frac{2}{\pi n 3^n}$$

$$\leqslant 0{\cdot}104\,\frac{n|\alpha|}{(n-1)^{5/2}} + \frac{2}{n\cdot 3^{n+1}} < \frac{|\alpha|}{8n^{3/2}} + \frac{2}{n \cdot 3^{n+1}}.$$

La représentation cherchée de $S_n(\alpha)$, qui résulte de (43), (44) et (53), est donc la suivante:

$$(54)\qquad S_n(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{nv^2}{6}} \frac{\sin v\alpha}{v} dv + \varDelta_n(\alpha)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{6}{n}}} e^{-u^2} du + \vartheta \cdot \left(\frac{|\alpha|}{8n^{3/2}} + \frac{2}{n \cdot 3^{n+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{6}{n}}\right) + \vartheta \cdot \left(\frac{|\alpha|}{8n^{3/2}} + \frac{2}{n \cdot 3^{n+1}}\right) \qquad \text{pour } n \geqslant 14,$$

où l'intégrale est réduite par une formule classique à la fonction

$$\Theta(\gamma)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma} e^{-u^2}\,du$$

de Gauss; ϑ dépend de a et de n, $|\vartheta|<1$ et $n\geqslant 14$.

Reprenons à présent notre modèle cinétique. Le cube aux faces $x=\pm 1$, $y=\pm 1$ et $z=\pm 1$ contient n points matériels; chaque point a une vitesse absolue constante; il est réfléchi par les parois du récipient d'après la loi du choc élastique. On vérifie facilement que l'abscisse $x_k(t)$ d'un tel point, en tant qu'une fonction du temps t, peut être exprimée par (17) avec un λ_k convenable; on aura $x_k(0)=-1$; en remplaçant t par $t-t_k$ avec un t_k approprié, on peut fixer l'abscisse initiale d'une manière arbitraire.

Avant de choisir les nombres λ_k, démontrons l'indépendance arithmétique du système $\{\cos k\}$ où $k=1, 2, \dots, n$. On a

$$\cos k=\frac{1}{2}(\zeta^k+\zeta^{-k})$$

avec

$$\zeta=e^i, \qquad i=\sqrt{-1},$$

et la relation

$$c_1\cos 1+c_2\cos 2+\dots+c_n\cos n=0$$

équivaut à

$$c_1\zeta+c_2\zeta^2+\dots+c_n\zeta^n+c_1\zeta^{-1}+c_2\zeta^{-2}+\dots+c_n\zeta^{-n}=0,$$

donc à

$$c_n\zeta^{2n}+c_{n-1}\zeta^{2-1}+\dots+c_1\zeta^{n+1}+c_1\zeta^{n-1}+c_2\zeta^{n-2}+\dots+c_n=0.$$

Le nombre e^i étant transcendant, cette équation n'est possible pour des c_k entiers que s'ils sont tous nuls. Posons $\lambda_k=\cos k$. Ce choix de λ_k complète la définition (17) d'accord avec la définition 8.

L'abscisse du centroïde du système de n points aux abscisses $x_k(t)$ est

$$\xi_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k(t)=\frac{s_n(t)}{n}. \tag{55}$$

La distributrice de $s_n(t)$ étant $S_n(a)$, celle de $\xi_n(t)$ est évidemment $\Phi_n(a)=S_n(na)$; en vertu de (54), on a donc pour $n\geqslant 14$

$$\Phi_n(a)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Theta\left(\frac{a}{2}\sqrt{6n}\right)+\vartheta\cdot\left(\frac{|a|}{8n^{1/2}}+\frac{2}{n\cdot 3^{n+1}}\right).$$

Il s'ensuit que le *temps relatif* pendant lequel l'inégalité

$$-a<\xi_n<a \qquad (a>0) \tag{56}$$

se trouve satisfaite est égal à

$$\Theta\left(\frac{a}{2}\sqrt{6n}\right)+\vartheta\cdot\left(\frac{a}{4\sqrt{n}}+\frac{4}{n\cdot 3^{n+1}}\right) \qquad (n\geqslant 14), \tag{57}$$

car telle est la mesure relative $|\underset{t}{E}\{-a<\xi_n(t)<a\}|_R$ de l'ensemble des t qui satisfont à (56).

Soit p. ex. $n=6\,000\,000$ et $a=0{\cdot}001$. On aura

$$\frac{a}{4\sqrt{n}}=\frac{1}{4\sqrt{6}}\cdot 10^{-6}<\frac{1\cdot 1}{10^7}, \qquad \frac{4}{n\cdot 3^{n+1}}<\frac{1}{10^7}$$

et

$$\Theta\left(\frac{a}{2}\sqrt{6n}\right)=\Theta(3)=0{\cdot}9999779\pm\frac{0\cdot 5}{10^7};$$

par conséquent le temps relatif τ satisfait aux inégalités

$$0{\cdot}99997764<\tau<0{\cdot}99997816.$$

On peut donc affirmer que le temps relatif pendant lequel l'inégalité $|\xi_n|<0{\cdot}001$ est réalisée pour l'essaim de six millions points, doués de vitesses initiales dont les composantes x sont égales à $2\cos k$ pour le k-ième point, est égal à $0{\cdot}999978$ avec une erreur moindre que $0{\cdot}5/10^6$.

Les positions initiales n'interviennent pas dans le calcul; nous pouvons les choisir p. ex. comme

$$y_k(0)=-1+\frac{2k-1}{6\cdot 10^6}, \qquad z_k(0)=0 \qquad (k=1, 2, \dots, 6\,000\,000),$$

la formule (17) pour x_k déterminant déjà les $x_k(0)=-1$.

Quant aux composantes $\dot{y}, \dot{z}$ de vitesses initiales, on peut les définir p. ex. par

$$\dot{y}_n(0)=2\cos(6\,000\,000+k), \qquad \dot{z}_n(0)=2\cos(12\,000\,000+k)$$

pour $k=1, 2, \dots, 6\,000\,000$.

Alors les $3n$ fonctions biréguliėres

$$x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t),\ y_1(t),\ y_2(t),\ \ldots,\ y_n(t),\ z_1(t),\ z_2(t),\ \ldots,\ z_n(t)$$

sont mutuellement indépendantes. Le temps relatif de séjour du centroïde (ξ, η, ζ) de l'essaim dans le cube

$$|\xi| < 10^{-3}, \quad |\eta| < 10^{-3}, \quad |\zeta| < 10^{-3}$$

est donc égal à

$$\left(0{\cdot}999978 \pm \frac{0{\cdot}5}{10^6}\right)^3,$$

car les trois coordonnées ξ, η, ζ sont mutuellement indépendantes.

Cette proposition est libre des considérations probabilistes; elle exprime un fait de cinématique pure. On peut lui donner un sens physique en disant, par définition, que la probabilité d'un état soit égale au temps relatif durant lequel cet état est réalisé. En interprétant notre modèle de cette manière, on voit qu'il obéit aux mêmes lois du calcul des probabilités que celles qu'on cherche d'habitude à démontrer par l'hypothèse du chaos initial ou final. D'autre part, on peut choisir un point quelconque de l'essaim, p. ex. celui à l'indice $k = 1\,258\,637$, et un moment quelconque, p. ex. $t = 85\,792$, et en calculer la position en ce moment, les coordonnées $x_k(t)$, $y_k(t)$ et $z_k(t)$ étant données par des formules explicites très simples.

Notre exemple peut servir ainsi à réfuter le prejugé d'après lequel les conceptions „déterministe" et „statistique" seraient incompatibles.

(Reçu par la Rédaction le 12, 8. 1946).

Sur les fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz généralisée (I)

par

W. ORLICZ (Poznań).

1. Soient $\omega(h)$ et $\omega_1(h)$ deux fonctions non décroissantes, définies pour $0 \leqslant h \leqslant l$, ne s'annulant que pour $h=0$ et tendant vers 0 avec h.

Les fonctions $f(x)$ considerées dans la suite seront supposées définies pour tout x réel et uniformément bornées.

Posons
$$\gamma(h) = \sup_{0<k\leqslant h} \frac{k}{\omega(k)}.$$

Le résultat principal de cette Note[1] est contenu dans le théorème suivant, qui donne une réponse complète à un problème de S. Ruziewicz.

Pour qu'il existe une fonction $f(x)$ de période l satisfaisant pour chaque x aux conditions[2]*:*

(1) $$|f(x+h) - f(x)| \leqslant \omega(|h|) \qquad \textit{pour tout} \quad |h| \leqslant l,$$

(2) $$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{\omega_1(|h|)} = +\infty,$$

il faut et il suffit que l'on ait

(3) $$\underline{\lim_{h\to +0}} \frac{\omega_1(h)}{h} \gamma(h) = 0\text{ [3]}.$$

---

[1]) dont tous les résultats datent de l'année 1940, mais à cause de la guerre n'ont été présentés qu'à la séance du 10 avril 1945 de la Société Polonaise de Mathématiques (Section de Cracovie).

[2]) L'inégalité (1) implique l'inégalité $m(h) \leqslant \omega(h)$ pour le module de continuité $m(h)$ de la fonction $f(x)$.

[3]) Bien entendu, y compris le cas où $\gamma(h) = +\infty$ pour $0 < h \leqslant h_0$; on a alors $\underline{\lim_{h\to +0}} \frac{\omega_1(h)}{h} \gamma(h) = +\infty$.