Es muss also ein solches t_0 existieren, dass $\varphi(t_0) = t_0$ wird. Der Kreis $K(t_0)$ hat dann nur den einen Punkt $P(t_0) = P(t_0')$ mit C gemeinsam, ist also doch ein Oskulationskreis.

Einer von den Kreisen $K(t)$ muss also ein Oskulationskreis sein und hat dann einen Radius $\geqq \varepsilon$ w. z. b. w. [20])

(Reçu par la Rédaction le 25. VI. 1928).

[20]) Zusatz bei der Korrektur:
Wie mich Herr Prof. E. Landau freundlichst aufmerksam machte, ergibt sich Satz 2 ohne den Umweg über Satz 1 durch Anwendung des im Beweise von Satz 1 gebrauchten Koebeschen Verfahrens auf $\mathfrak{I} \log \frac{f(z)}{z}$. Man erhält dann unmittelbar den Wortlaut von Satz 2 mit $\Psi(r) = \frac{4}{\pi} \log \frac{1}{1-\sqrt{r}} \cdot \log \frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}}$.

Sur quelques applications du calcul fonctionnel à la théorie de séries orthogonales [1])

par

H. STEINHAUS (Lwów).

En se servant du calcul fonctionnel, comme l'a fait M. Banach dans une Note remarquable concernant les séries orthogonales [2]), on obtient les théorèmes suivants qui contiennent les résultats de la Note citée comme des cas particuliers.

I. Si $\{\varphi_n\}$ et $\{\overline{\varphi}_n\}$ sont deux suites normées et orthogonales de fonctions continues, dont la seconde est *complète* dans le champ de fonctions continues, et si, en outre, la suite numérique $\{\lambda_k\}$ a la propriété de transformer tout développement formel par rapport aux φ d'une fonction continue [3])

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(\tau)$$

en un développement formel d'une fonction continue

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \overline{\varphi}_k(\tau)$$

par rapport aux $\overline{\varphi}$,
alors la convergence uniforme de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(\tau)$$

[1]) Les résultats principaux de cette Note ont été l'objet d'une communication au Premier Congrès des Mathématiciens Polonais tenu à Lwów en août 1927.

[2]) Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, t. 180, pp. 1637—40, (2 juin 1925).

[3]) Un développement formel est une série dont les coefficients sont obtenus par des formules à la Fourier.

entraîne la convergence uniforme de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \alpha_k \overline{\varphi}_k(\tau).$$

II. L'hypothèse du théorème précédent étant vérifiée, la convergence uniforme d'une série de polynomes en φ

(3) $(\alpha_1 \varphi_{n_1} + \alpha_2 \varphi_{n_2} + \ldots + \alpha_j \varphi_{n_j}) + (\beta_1 \varphi_{p_1} + \ldots + \beta_k \varphi_{p_k}) + \ldots$

implique la convergence uniforme de la *série transformée*

(4) $(\lambda_{n_1} \alpha_1 \overline{\varphi}_{n_1} + \ldots + \lambda_{n_j} \alpha_j \overline{\varphi}_{n_j}) + (\lambda_{p_1} \beta_1 \overline{\varphi}_{p_1} + \ldots \lambda_{p_k} \beta_k \overline{\varphi}_{p_k}) + \ldots$

de polynomes en $\overline{\varphi}$.

III. Si la suite $\{\varphi_n\}$ est *fermée* dans le champ de fonctions continues, le théorème II admet une *réciproque;* les hypothèses de I sur $\{\varphi_n\}$ et $\{\overline{\varphi}_n\}$ sont maintenues et la réciproque affirme que la propriété de $\{\lambda_k\}$ de transformer toute série uniformément convergente (3) en une série uniformément convergente (4) implique la propriété de $\{\lambda_k\}$ qui a servi d'hypothèse pour I.

IV. Pour que la thèse du théorème II soit vérifiée, il faut et il suffit qu'il existe une constante M indépendante de nombres j, $\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_j$ telle que l'on ait

(5) $$\underset{0 \leq \tau \leq 1}{\text{maximum de}} \left| \sum_{k=1}^{j} \lambda_k \xi_k \overline{\varphi}_k(\tau) \right| \leq M \,.\, \underset{0 \leq \tau \leq 1}{\text{maximum de}} \left| \sum_{k=1}^{j} \xi_k \varphi_k(\tau) \right|$$

V. L'existence de la constante M aux propriétés spécifiées tout à l'heure constitue la condition nécéssaire et suffisante pour que la suite numérique $\{\lambda_k\}$ ait la propriété de l'énoncé du théorème I; $\{\varphi_n\}$ et $\{\overline{\varphi}_n\}$ signifient la même chose que dans cet énoncé et on doit supposer que $\{\varphi_n\}$ est fermée et $\{\overline{\varphi}_n\}$ est complète.

En posant $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = 1$ dans le théorème I on obtient le théorème principal de la Note de M. Banach.

Les théorèmes I—V admettent des analogies dans le champ de fonctions sommables avec une puissance $1+p$ supérieure à l'unité ($p > 0$).

Soit donc $\{\varphi_n\}$ une suite dont les termes appartiennent au champ S^{1+p}, ce qui veut dire, que les intégrales lebesguiennes $\int_0^1 |\varphi_n(\tau)|^{1+p} dt$ sont finies. Dans ce cas il est naturel d'introduire la *biorthogonalité;* la suite $\{\varphi_n(\tau)\}$ sera appellée *normée et biorthogonale,* s'il existe une autre suite $\{\psi_n\}$ aux termes appartenant à $S^{1+\frac{1}{p}}$, telle que

$$\int_0^1 \varphi_m(\tau)\, \psi_n(\tau)\, d\tau = \begin{matrix} 1 & \text{si} & m = n \\ 0 & \text{si} & m \neq n. \end{matrix}$$

On convient de calculer les coefficients du développement d'une fonction $f(\tau)$ de S^{1+p} par rapport aux φ à l'aide de formules

$$\xi_k = \int_0^1 f(\tau)\, \psi_k(\tau)\, d\tau,$$

ce qui est toujours possible et ce qui s'écrit en abrégé

$$f(\tau) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(\tau).$$

Si $\{\varphi_n\} \equiv \{\psi_n\}$, on revient à l'orthogonalité.

En disant que la suite $\{\varphi_n\}$, normée et biorthogonale, est *complète* dans le champ S^{1+p}, nous entendons que toute fonction du champ, dont les coëfficients par rapport aux φ sont tous nuls, s'annule elle-même presque partout. En disant que la suite $\{\varphi_n\}$ est *fermée* dans le champ S^{1+p}, nous exprimons le fait q'une fonction arbitraire de ce champ $f(\tau)$ admet une approximation indéfinie par des polynomes en φ

$$\Pi_j(\tau) = \sum_{k=1}^{n_j} \alpha_{jk} \varphi_k(\tau),$$

en mesurant l'approximation par l'intégrale

$$\int_0^1 \left| f(\tau) - \Pi_j(\tau) \right|^{1+p} d\tau,$$

Si une série approche une fonction au sens spécifié dans la définition qui précède, on dira que la série converge vers $f(\tau)$ *suivant la norme* S^{1+p}. On apelle „norme S^{1+p}" de $f(\tau)$ le nombre

$$\sqrt[1+p]{\int_0^1 |f(\tau)|^{1+p} d\tau}.$$

Dans le champ de fonction continues les notions „fermée" et „complète" avaient une signification tout à fait analogue; „fermée" signifiait la possibilité de l'approximation *uniforme* d'une fonction continue quelconque, „complète" signifiait, que les fonctions continues s'annulent identiquement, si les coëfficients de leurs développements sont nuls.

Revenons aux énoncés I—IV et remplaçons-y le champ de fonctions continues par le champ S^{1+p}, l'orthogonalité par la biorthogonalité, la convergence uniforme par la convergence suivant la norme et enfin le maximum du module d'une expression par la norme S^{1+p}; ces substitutions verbales fournissent des théorèmes nouveaux I'—V', dont la démonstration est essentiellement la même que celle de théorèmes I—V.

Démonstrations.

Lemme[4]). Soit C un champ vectoriel, normé et complet, (brièvement un „champ du type B"); si $F(x)$ est une fonctionelle additive et homogène définie pour $x \varepsilon C$ et si les valeurs y

$$y = F(x)$$

appartiennent à un autre champ D du type B, alors la fonctionelle F sera continue si

$$\text{(6)} \qquad \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} x_n = x_o$$

implique toujours

$$\text{(7)} \qquad \liminf_{n\to\infty} \|F(x_n)\|_D \geqslant \|F(x_o)\|_D.$$

[$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} x_n = x_o$ signifie: $\lim_{n\to\infty} \|x_o - x_n\|_C = 0$; $\|z\|_E$ signifie la norme de z dans le champ E.].

Le théorème I étant contenu dans II, nous commençons par la

Démonstration du théorème II.

Il est connu que l'ensemble de fonctions continues $x(\tau)$ de la variable réelle τ constitue un champ K du type B quand on définit la norme $\|x\|_K$ par le maximum de $|x(\tau)|$ dans $\langle 0\,1 \rangle$. En écrivant

$$x \sim \xi_1 \varphi_1 + \xi_2 \varphi_2 + \ldots,$$

[4]) Ce lemme est dû à M. Banach (Fund. Math. III, 1922). Une démonstration très simple a été donnée par M. Orlicz (Studia Math., I (1929), p. 9, renvoi 14). Quant aux notions et notations du calcul fonctionnel voir p. e. les pp. 54—56 du travail de l'auteur dans le même tome des Studia.

l'hypothèse du théorème II fait correspondre à $x(\tau)$ une fonction continue $y(\tau)$ telle que

$$y \sim \lambda_1 \xi_1 \overline{\varphi}_1 + \lambda_2 \xi_2 \overline{\varphi}_2 + \ldots .$$

$\{\overline{\varphi}_n\}$ étant complète, cette fonction est tout à fait déterminée. On a défini ainsi une fonctionelle $y = F(x)$ pour $x \varepsilon K$, évidemment homogène et additive.

Pour appliquer le lemme, remarquons que $y \varepsilon K$, ce qui permet de définir la norme dans le champ $D = K$ par la même convention que dans $C = K$.

Nous allons montrer que (6) implique (7). Le contraire signifie

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} x_n = x_o, \quad \lim_{n\to\infty} \|F(x_n)\| < \|F(x_o)\|;$$

posons

$$y_n = F(x_n), \quad y_o = F(x_o),$$

$$x_n \sim \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(n)} \varphi_k, \quad x_o \sim \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(o)} \varphi_k;$$

on aura

$$y_n \sim \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^{(n)} \overline{\varphi}_k, \quad y_o \sim \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^{(o)} \overline{\varphi}_k$$

et — en écrivant

$$\lambda_k \xi_k^{(n)} = \eta_k^{(n)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \text{ —}$$

$$y_n \sim \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k^{(n)} \overline{\varphi}_k \quad (n = 0, 1, 2 \ldots).$$

$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} x_n = x_o$ implique évidemment

$$\xi_k^{(n)} = \int_0^1 x_n(\tau) \varphi_k(\tau)\, d\tau \to \int_0^1 x_o(\tau) \varphi_k(\tau)\, d\tau = \xi_k^{(o)},$$

donc

$$\text{(8)} \qquad \lim_{n\to\infty} \eta_k^{(n)} = \eta_k^{(o)};$$

or, nous savons que

$$\text{(9)} \qquad \lim_{n\to\infty} \|y_n\| < \|y_o\|,$$

ce qui permet d'extraire de $\{y_n\}$ une suite *faiblement convergente* $\{z_n\}$; par définition, on aura

$$\int_0^1 z_n(\tau)\, h(\tau)\, d\tau \to \int_0^1 z_o(\tau)\, h(\tau)\, d\tau, \tag{10}$$

quelle que soit la fonction continue $h(\tau)$; écrivons

$$z_n \sim \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k^{(n)} \overline{\varphi}_k \qquad (n=0,1,2,3\ldots);$$

la suite $\{\zeta_k^{(n)}\}$ étant extraite de $\{\eta_k^{(n)}\}$, on aura — à cause de (8) —

$$\lim_{n\to\infty} \zeta_k^{(n)} = \eta_k^{(o)}$$

et, à cause de (10), (en y posant $h(\tau) = \overline{\varphi}_k(\tau)$)

$$\lim_{n\to\infty} \zeta_k^{(n)} = \zeta_k^{(o)},$$

ce qui implique

$$\zeta_k^{(o)} = \eta_k^{(o)} \qquad (k=1,2\ldots)$$

et — la suite $\{\overline{\varphi}_k\}$ étant complète —

$$z_o(\tau) \equiv y_o(\tau). \tag{11}$$

La limite faible z_o de z_n satisfait d'après une loi connue à l'inégalité

$$\liminf_{n\to\infty} \|z_n\| \geqslant \|z_o\| \tag{12}$$

et — $\{z_n\}$ étant extraite de $\{y_n\}$ — à l'inégalité

$$\lim_{n\to\infty} \|z_n\| < \|y_o\|$$

qui découle de (9) et qui est incompatible avec (12), quand on tient compte de (11).

Cette contradiction montre que (6) implique (7) pour la fonctionelle considérée $F(x)$, qui est donc continue suivant le lemme. Soit x_o la somme totale et x_n les sommes partielles de la série uniformément convergente (3); on aura

$$\operatorname{Lim}_{n\to\infty} x_n = x_o,$$

ce qui implique, à cause de la continuité,

$$\operatorname{Lim}_{n\to\infty} F(x_n) = F(x_o); \tag{13}$$

or, $F(x_n)$ est la n-ième somme partielle de (4), et (12) ne signifie autre chose que la convergence uniforme de (4).

Démonstration du théorème III.

Soit $x_o(\tau)$ une fonction continue quelconque; la suite $\{\varphi_n\}$ étant fermée, il existe une série (3) qui converge uniformément vers $x_o(\tau)$; en désignant ses sommes partielles par $x_n(\tau)$, on aura

$$\operatorname{Lim} x_n = x_o. \tag{14}$$

Par hypothèse, la série transformée (4) est aussi uniformément convergente; désignons par $y_n(\tau)$ $(n=1,2\ldots)$ ses sommes partielles et par $y_o(\tau)$ sa somme totale:

$$\operatorname{Lim}_{n\to\infty} y_n = y_o; \tag{15}$$

x_o et y_o sont des fonctions continues comme x_n et y_n; soit $\xi_k^{(n)}$ le k-ième coefficient de x_n $(n=0,1,2,\ldots)$ par rapport à $\{\varphi\}$ et $\eta_k^{(n)}$ le k-ième coefficient de y_n $(n=0,1,2\ldots)$ par rapport à $\{\overline{\varphi}\}$; on aura évidemment

$$\eta_k^{(n)} = \lambda_k \xi_k^{(n)} \qquad (n=1,2,3\ldots),$$

mais (14) et (15) impliquent

$$\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k^{(o)}, \quad \lim_{n\to\infty} \eta_k^{(n)} = \eta_k^{(o)},$$

ce qui donne finalement

$$\eta_k^{(o)} = \lambda_k \xi_k^{(o)} \tag{16}$$

pour tout k naturel. (16) démontre qu'en multipliant par λ_k les coëfficients d'une fonction continue $x_o(\tau)$, on obtient les coëfficients — par rapport aux φ_k — d'une fonction continue $y_o(\tau)$.

Démonstration du théorème IV.

Il est évident que l'inégalité (5) suffit pour déduire la convergence uniforme de (4) de la convergence uniforme de (3). Pour démontrer que (5) est nécéssaire, supposons qu'elle n'a pas lieu; appellons $p_1, p_2, p_3, \ldots$ les termes d'une série telle que (3) et $q_1, q_2, q_3, \ldots$ les termes d'une série correspondante (4); on pourra déterminer ces polynomes de manière que l'on ait

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\|q_j\|}{\|p_j\|} = \infty. \tag{17}$$

Posons

$$P_j = p_j : \|q_j\|, \qquad Q_j = q_j : \|q_j\|; \tag{j}$$

on aura, à cause de (17),

$$\lim_{j\to\infty} \|P_j\| = 0,$$

ce qui permet de trouver une suite $\{j_n\}$ telle que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{j_n}$$

soit convergente uniformément, tandis que la série correspondante

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_{j_n}$$

ne saurait l'être, car $\|Q_j\|=1$.

En même temps nous avons établi le théorème V, qui est une conséquence immédiate de théorèmes précédents.

Énoncés et démonstrations de théorèmes I′—V′.

Pour établir le théorème II′, on définit une fonctionnelle $y=F(x)$; le système $\{\varphi_n\}$ étant complet, la fonction $y(\tau)$ du champ S^{1+p} est déterminée sans ambiguité par la convention qui a été employée au début de la démonstration du théorème II. Pour démontrer la continuité de $F(x)$, il faudra extraire d'une suite $\{y_n\}$, telle que

$$\lim \|y_n\|_D < \|y_o\|_D,$$

une suite faiblement convergente $\{z_n\}$. Il faudra donc trouver un z_o (limite faible) tel que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 z_n(\tau)\, h(\tau)\, d\tau = \int_0^1 z_o(\tau)\, h(\tau)\, d\tau \tag{10′}$$

pour tous les $h(\tau)$ du champ $S^{1+\frac{1}{p}}$, étant donné que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |y_n(\tau)|^{1+p}\, d\tau$$

est moindre que $\int_0^1 |y_o(\tau)|^{1+p}\, d\tau$, donc finie. Or, cela est possible (si $p>o$) d'après un théorème de M. F. Riesz[5]). On posera ensuite $h(\tau)=\psi_k(\tau)$ pour établir une relation (11′) analogue à (11); quant à une inégalité (12′) analogue à (12), elle aura encore lieu d'après les propriétés de la limite faible dans le sens actuel. On obtiendra ainsi le théorème II′, dont l'énoncé emploie la notion de la „convergence suivant la norme S^{1+p}“ au lieu de la convergence uniforme.

Pour démontrer le théorème III′, on n'a qu'a suivre l'analogie avec III; pour tirer parti de (14′) et (15′) analogues aux (14) et (15)) et pour en déduire que les coëfficients de x_n, y_n tendent vers ceux de x_o respectivement de y_o, il faut employer l'inégalité de MM. Riesz et Hölder; en effet, on a

$$\left| \int_0^1 [x_n(\tau)-x_o(\tau)]\,\psi_k(\tau)\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt[1+p]{\int_0^1 |x_n(\tau)-x_o(\tau)|^{1+p} d\tau} \cdot \sqrt[1+\frac{1}{p}]{\int_0^1 |\psi_k(\tau)|^{1+\frac{1}{p}} \cdot d\tau}$$

et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_o$ signifie que le premier facteur à droite tend vers zéro pour $n\to\infty$; l'inégalité conduit immédiatement à $\xi_k^{(n)} \to \xi_n^{(o)}$; on démontre la même chose pour les y.

Le théorème IV′ admet une démonstration parfaitement analogue à celle de IV; il ne faut pas oublier que le maximum du module est remplacé maintenant par $\left(\int_0^1 |x(\tau)|^{1+p} d\tau\right)^{\frac{1}{1+p}}$ et que telle est la signification actuelle de $\|x\|$. La convergence uniforme est remplacée par la convergence „suivant la norme S^{1+p}“.

Ces analogies font défaut pour le cas $p=0$, ce qui tient à ce qu'on ne peût plus (en général) extraire une suite faiblement convergente d'une suite $\{y_n\}$, en sachant seulement que

$$\int_0^1 |y_n(\tau)|\, d\tau < \text{constante}.$$

Des hypothèses supplémentaires pourraient y remédier; il serait plus intéressant de savoir si les théorèmes cessent d'être exactes; nous remarquons seulement que la difficulté tient au champ des y, qui est le contredomaine de la fonctionelle $y=F(x)$.

[5]) Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Ann. 69 (1910). Cf. aussi le „Hilfssatz 1“ du § 1 de l'ouvrage de M. Orlicz cité dans nôtre renvoi [6]).

Le théorème I' fait partie de la Note de M. Banach pour le cas où $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = 1$ et où la biorthogonalité se réduit à l'orthogonalité.

Quand on considére les développements orthogonaux et on suppose en outre que les suites $\{\varphi_n\}$ et $\{\overline{\varphi}_n\}$ sont identiques, on tombe sur des problèmes considérés par M. Orlicz dans un travail récent [6]); on y trouve des relations entre les classes de suites $\{\lambda_k\}$ correspondants aux champs différents.

On peut poser la question, quelles sont les conditions nécéssaires et suffisantes pour qu'une suite $\{\lambda_n\}$ transforme un développement d'une fonction appartenant à un champ (p. e. à celui des fonctions sommables) en un développement d'une fonction appartenant à un autre champ (p. e. à celui des fonctions continues): on obtient des théorèmes tout à fait analogues à ceux qui ont été démontrés tout à l'heure. Les champs mentionnés ici à titre d'exemple ne prêtent à aucune difficulté, car c'est seulement le premier (qui sert de domaine à la fonctionelle) qui est constitué par des fonctions sommables; il serait différent — selon une remarque faite plus haut — si c'était le second.

[6]) Ces Studia, I (1929), pp. 1—39, spécialement le § 3 (pp. 18—26).

(Reçu par la Rédaction le 13. II. 1929).

Sur l'application de la méthode des approximations successives dans la théorie des équations différentielles

par

W. NIKLIBORC (Lwów).

Nous allons faire dans cette note [1]) quelques remarques sur l'application de la méthode des approximations successives à la démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations différentielles ordinaires. Nous nous bornerons au cas d'une seule équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

en remarquant toutefois, que tous les résultats sout aussi valables pour un système.

Supposons, que $f(x, y)$ est **continue** dans un domaine fermé (D) et soit (x_0, y_0) un point de (D). Pour simplifier l'écriture posons, sans restreindre la généralité $x_0 = y_0 = 0$. Dans le problème de Cauchy, il s'agit de trouver une fonction $y = y(x)$, satisfaisant à l'équation (1) dans un intervalle $[-\delta_1, \delta_2]$, $0 \leqslant \delta_1$, $0 \leqslant \delta_2$, $\delta_1 + \delta_2 > 0$ et en outre à la condition initiale $y(0) = 0$.

On sait, que si le point $(0, 0)$ est à l'intérieur de (D), alors

1° au moins une solution du problème existe [2]), et

[1]) Cette note était l'objet de ma conférence au I-er Congrès mathém. polon. (septembre 1927). Des circonstances indépendantes de l'auteur en ont empêché la publication jusqu'à présent.

[2]) C'est M. Peano, qui a démontré pour la première fois le théorème fondamental de la théorie des équations différentielles en supposant seulement la continuité de $f(x, y)$: Math. Annalen T. 37 (1890), p. 182—228. Citons encore parmis les autres travaux consacrés à ce sujet: P. Montel: Sur les suites infinies de fonctions, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure (3), T. 24 (1907), p. 233—334 (264 et suiv.); W. Osgood: Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitz'schen Bedingung, Monathshefte f. Math. u. Phys. T. 9 (1898), p. 331—345;