Sur la convergence et la sommabilité des développements orthogonaux

par

S. KACZMARZ (Lwów).

Un des problèmes les plus importants concernant les séries orthogonales est le problème de leur convergence ou bien de leur sommabilité par une méthode donnée. Je me propose dans cet ouvrage d'étudier ce problème en présentant les résultats dejà acquis, en les complétant et en simplifiant quelquesunes de leurs démonstrations.

Je me borne aux séries orthogonales

$$\Sigma\, a_n \varphi_n(x)$$

avec

$$\Sigma\, a_n^2 < \infty .$$

Le premier théorème concernant ces séries est celui de Riesz-Fischer d'après lequel toute série de ce genre est un développement d'une fonction $f(t)$ au carré sommable, c'est à dire telle que

$$a_n = \int_a^b f(t)\, \varphi_n(t)\, dt$$

et même

$$\int_a^b (f - s_n)^2\, dt \to 0, \qquad \text{si } s_n = \sum_1^n a_i \varphi_i(x).$$

A présent on connait un grand nombre des conditions suffisantes pour la convergence presque partout. Ces conditions sont de deux genres: celles du premier n'entraînent la convergence presque partout que pour un ordre donné de termes de la série considerée, celles du deuxième ne dépendent pas de l'ordre de termes de la série.

Les conditions du premier genre expriment l'ordre de grandeur des coefficients a_n par rapport à l'indice. La première condition du type considerée, qui a été donnée par M. Weyl, est la convergence de la série $\Sigma\, a_n^2\, n^{\frac{1}{2}}$. Ensuite M. Hobson a remplacé l'exposant $\frac{1}{2}$ par un α arbitraire positif. M. Plancherel remplace le facteur n^α par $(\lg n)^3$ et finalement M. M. Rademacher et Menchoff remplacent l'exposant 3 par 2, et le dernier démontre que la condition ainsi obtenue $\Sigma\, a_n^2\, (\lg n)^2 < \infty$ est la moins restrictive possible.

Les conditions du second genre concernent en général l'ordre de grandeur de a_n independemment de l'indice n. M. Menchoff a établi la condition

$$\Sigma\, |\, a_n\,|^{2-\varepsilon} < \infty, \qquad 0 < \varepsilon < 2;$$

il l'a remplacé ensuite par la condition plus générale

$$\Sigma\, \omega^2 [\lg |\lg |\, a_n\,|\,|]\, (\lg n)^2\, a_n^2 < \infty$$

$\omega(n)$ étant une fonction croissante appropriée. M.M. Kolmogoroff et Orlicz ont substitué dans cette condition ω à la place de ω^2. En outre M. Orlicz a trouvé la condition

$$\Sigma\, \omega(n)\ (\lg n)^2\, a_n^2 < \infty.$$

L'existence des séries orthogonales partout divergentes conduit au problème de la sommabilité par une méthode linéaire donnée. On pourrait aussi, par rapport à la sommabilité, distinguer deux genres des conditions; il est toutefois à remarquer, que d'après un théorème de M. Orlicz, les conditions du second genre entraînent non seulement la sommabilité mais même la convergence.

En ce qui concerne les conditions du premier genre pour la méthode $(C, 1)$ M. Weyl a trouvé la condition $\Sigma\, a_n^2 \lg n < \infty$; ensuite j'ai proposé la condition $\Sigma\, a_n^2 \sqrt{\log n} < \infty$ et finalement M. Menchoff et moi nous avons établis la condition $\Sigma\, a_n^2 (\lg \lg n)^2 < \infty$, qui est la moins restrictive. En outre toute série sommable par une méthode (C, a), $a > o$ ou même par la méthode de Poisson est sommable presque partout par chaque méthode (C, b), $b > o$ [théorème démontré par moi pour $b \geqslant 1$ et par M. Zygmund pour $b > o$]. D'après le théorème de M. Menchoff il existe pour chaque méthode linéaire de sommation une série orthogonale, qui n'est pas sommable par cette méthode.

Les conditions discutées jusqu' ici ne concernent que les coefficients a_n, les fonctions $\varphi_n(x)$ étant tout à fait arbitraires. Le problème s'impose: Quelles hypothèses faites sur les fonctions $\varphi_n(x)$ entraînent la convergence ou la sommabilité de la série $\Sigma\, a_n\, \varphi_n(x)$?

Dans cette ordre d'idées M. M. Menchoff et Kolmogoroff ont démontré que dans l'hypothèse $|\varphi_n(x)| < A$ la condition $\Sigma\, a_n^2 f_n < \infty$ ou $f_n = o\,(\lg n)$ n'est pas suffisante pour la convergence. J'étudie dans cet ouvrage ce problème, en faisant des hypothèses sur la fonction de Lebesgue du système orthogonal donnée, c'est à dire sur la fonction

$$\varrho_n(x) = \int_a^b \Big|\sum_1^n \varphi_k(x)\, \varphi_k(t)\Big|\, dt.$$

A ce but je généralise le resultat de M. Rademacher d'après lequel

$$\varrho_n(x) = O\,(\sqrt{n^{3+\varepsilon} \lg n}), \qquad \varepsilon > 0 \text{ arbitraire}$$

de la façon suivante:

THÉORÈME. On a presque partout

$$\varrho_n(x) = o\,(\sqrt{n^{1+\varepsilon} \lg n}).$$

Dans le cas où $|\,\varphi_n(x)\,| < A$ on a $\varphi_n(x) = O\,(\sqrt{n})$.

Je prouve ensuite les deux théorèmes suivants:

1. Si $\varrho_n(x) = O\,(1)$, la série converge presque partout.

2. Si 1) $\varrho_n(x) = O\,(f_n)$, 2) $\Sigma\, a_n^2 f_n < \infty$, alors la série converge presque partout.

La démonstration répose sur un théorème de M. Banach du calcul fonctionnel.

Dans le second chapitre j'établis des théorèmes analogues, qui concernent la sommabilité (C, a).

Bibliographie.

Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band II C, Heft 8. E. Hilb - O. Szász: Allgemeine Reihenentwicklungen.

E. Fischer. Sur la convergence en moyenne, Paris, Comptes Rendus 144 (1907) pp. 1022, 1148.

A. Haar. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. Mathem. Annalen 69 (1910) p. 331, 71 (1912) p. 38.

E. W. Hobson. On the convergence of series of orthogonal functions. London Math. Society Proceedings, series 2 vol. 12 (1912) p. 297.

F. Jerosch-H. Weyl. Über die Konvergenz von Reihen... Math. Annalen 66 (1909) p. 67.

S. Kaczmarz: 1. Über die Konvergenz der Reihen von Orthogonalfunktionen. Math. Zeitschrift 23 (1925) p. 263.
2. Über die Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen. Math. Annalen 96 (1925) p. 148.
3. Über die Summierbarkeit der Orthogonalreihen. Math. Zeitschrift 26 (1927) p. 99.

D. Menchoff. Sur les séries de fonctions orthogonales:
1. Fundamenta Mathematicae IV (1923) p. 82.
2. Fund. Math. VIII (1926) p. 56.
3. Fund. Math. X (1928) p. 375.

D. Menchoff-A. Kolmogoroff. Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales. Math. Ztschr. 26 (1927).

W. Orlicz: 1. Zur Theorie der Orthogonalreihen. Kraków, Bull. Ac. Pol. 1927 p. 81.
2. Über die unabhängig von der Anordnung fast überall konvergenten Funktionenreihen. Ibid. p. 117.

M. Plancherel. Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales. Paris, Comptes Rendus 157 (1913) p. 539.

H. Rademacher. Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen. Math. Annalen 87 (1922) p. 112.

F. Riesz. Sur les systèmes orthogonaux de fonctions. Paris C. R. 144 (1907) p. 615, p. 734.

A. Zygmund: 1. Remarque sur un théorème de M. Kaczmarz. Math. Zeitsch. 25 (1926).
2. Remarque sur la sommabilité des séries. Kraków, Bull. Ac. Pol. 1926 p. 186.
3. Sur l'application de la première moyenne. Fund. Math. X (1927) p. 356.
4. Über einige Sätze aus der Theorie der divergenten Reihen, Kraków, Bull. Ac. Pol. 1927 p. 309.

I. Convergence de séries orthogonales.

§ 1. Envisageons un système normé orthogonal $\{\varphi_n(x)\}$ c'est à dire tel que l'on ait

$$\int_0^1 \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0 \qquad m \neq n$$

$$\int_0^1 \varphi_n^2(x)\,dx = 1$$

défini dans l'intervalle $(0, 1)$ et la série

$$\sum_1^\infty a_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

dont les coefficients a_n sont assujetis à la condition

$$\sum_1^\infty a_n^2 < \infty . \tag{2}$$

On sait[1]), que sous la condition (2) il existe une fonction $f(x)$ de carré intégrable dans l'intervalle $(0, 1)$, liée aux a_n par les relations

$$a_n = \int_0^1 f(x)\,\varphi_n(x)\,dx$$

Désignons les sommes partielles de la série (1) par $s_n(x)$.

Lemme 1.[2]) Si 1) $u(n)$ est une fonction croissante avec n vers $+\infty$;
si 2) $\Sigma a_n^2 u(n) < \infty$
et 3) $k \leqslant u(n_k) < k+1$,
alors la suite partielle $s_{n_k}(x)$ converge presque partout.

Démonstration. On sait, que

$$\int_0^1 [f - s_n]^2\,dx = \sum_{n+1}^\infty a_k^2 = r_n .$$

donc

$$\int_0^1 [f - s_{n_k}]^2\,dx = r_{n_k} .$$

La série $\sum_1^\infty r_{n_k}$ étant convergente d'après l'inégalité

$$\Sigma r_{n_k} = \Sigma (r_{n_k} - r_{n_{k+1}})\,k < \Sigma a_n^2 u(n),$$

on conclut, que la série $\Sigma (f - s_{n_k})^2$ converge presque partout, donc $s_{n_k} \to f$ presque partout.

[1]) F. Riesz, E. Fischer.
[2]) H. Rademacher, démonstration d'après Kaczmarz 2.

Remarques. 1. Pour toute série (1) il existe une fonction $u(n)$ remplissant les conditions ci-dessus, par exemple la fonction

$$u(n) = r_n^{\alpha}, \qquad -1 < \alpha < 0.$$

2. Par une méthode analogue on peut démontrer le théorème de M. M. Riesz et Fischer: il suffit, en effet, de démontrer la convergence presque partout de la suite $s_{n_k}(x)$

$$k^2 \leqslant u(n_k) < (k+1)^2,$$

en se servant de la série $\Sigma \alpha_n$, où

$$\alpha_n = \int_0^1 | s_{n_k} - s_{n_{k+1}} | \, dx \leqslant \sqrt{\int_0^1 [s_{n_k} - s_{n_{k+1}}]^2 \, dx}.$$

3. Nous démontrerons plus loin une généralisation du lemme 1 (voir lemme 3).

4. D'après le lemme 1 la suite $s_{n_k}(x)$ converge presque partout pour tout système $\{\varphi_n(x)\}$, si les coefficients a_n restent les mêmes.

Lemme 2.[3]) Étant donné: 1. un système des N fonctions orthogonales et normales

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots\ldots\ \varphi_N(x)$$

2. un système des N nombres réels

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots\ a_N,$$

il existe une fonction $\delta(x)$ et une constante K telles que

a) pour tous i, k, $1 \leqslant i < k \leqslant N$ on a

$$\left| \sum_i^k a_n \varphi_n(x) \right| < \delta(x),$$

b) $\int_0^1 \delta^2(x)\, dx \leqslant K (\lg N)^2 \sum_1^N a_n^2.$

Démonstration. Supposons d'abord $N = 2^r$. Il suffit de démontrer, que

$$\left| \sum_1^k a_n \varphi_n(x) \right| < \omega(x) = \frac{1}{2}\delta(x).$$

[3]) H. Rademacher, W. Orlicz 1. L'idée de la démonstration est celle de M. Rademacher mais simplifiée (l'idée de la décomposition des „segments" est due à M. Banach).

A ce but envisageons r décompositions du segment $(0, 2^r)$ en segments n'impiètants pas, de la façon suivante: La première décomposition soit donnée par les deux segments

$$[0, 2^{r-1}] \text{ et } [2^{r-1}, 2^r].$$

La $(i+1)$-ème décomposition résulte de la division en deux segments égaux du chaque segment de la décomposition i-ème. Puisque

$$(3) \qquad k = \delta_1 . 2^{r-1} + \delta_2 . 2^{r-1} + \ldots + \delta_r, \qquad (\delta_i = 0, 1)$$

donc tout nombre naturel k, tel que

$$0 < k < 2^r$$

est une somme des r segments tout au plus, dont chacun appartient à des décompositions différentes.

Envisageant un segment (i, k) comme la somme $\sum_{i+1}^k a_n \varphi_n(x)$, on a d'après (3)

$$s_k(x) = \sum_1^r p_i,$$

où p_i signifie un ségment de la i-ème décomposition; alors

$$s_k^2(x) \leqslant r \sum_1^r p_i^2.$$

Désignons par A_i la somme des carrés de tous les segments de la i-ème décomposition; on aura

$$s_k^2(x) \leqslant r \sum_1^r A_i = \omega^2(x);$$

d'autre part

$$\int_0^1 \omega^2(x)\, dx = r \sum_1^r (a_1^2 + a_2^2 + \,.\, + a_N^2) = r^2 \sum_1^N a_n^2 = C (\lg N)^2 \sum_1^N a_n^2.$$

Dans le cas général on a $2^r < N < 2^{r+1}$. Complétons le système orthogonal par les fonctions

$$\varphi_{N+1}(x),\ \ldots\ \varphi_{2^{r+1}}(x)$$

et posons

$$a_{N+1} = a_{N+2} = \ldots = a_{2^r+1} = 0.$$

D'après ce qui précède on a

$$\int_0^1 \omega^2(x)\, dx \leqslant (r+1)^2 \sum_1^N a_n^2 = (\lg N)^2 \left(\frac{r+1}{\lg N}\right)^2 \sum_1^N a_n^2 < K (\lg N)^2 \sum_1^N a_n^2.$$

Remarque. Si nous effectuons une transposition des $\varphi_n(x)$ et a_n, la nouvelle majorante $\delta'(x)$ serait modifiée, mais on aurait aussi

$$\int_0^1 \delta'^2(x)\,dx < K(\lg N)^2 \sum_1^N a_n^2.$$

§ 2. En utilisant les lemmes précedants nous démontrerons les théorèmes sur la convergence des séries orthogonales.

Théorème 1.[4] Si $\quad \Sigma a_n^2 (\lg n)^2 < \infty$

la série (1) est presque partout convergente.

Démonstration. On voit d'après le lemme 1, en posant $u(n) = lg_2 n$, que la suite $s_{2^n}(x)$ converge presque partout. Envisageons maintenant la différence

$$s_k(x) - s_{2^n}(x), \quad 2^n < k < 2^{n+1}.$$

D'aprés le lemme 2 on a

$$|s_k - s_{2^n}| < \delta_n(x),$$

$$\int_0^1 \delta_n^2(x)\,dx \leqslant K.n^2 \sum_{2^n+1}^{2^n+1} a_i^2;$$

or

$$\sum_1^\infty \int_0^1 \delta_n^2(x)\,dx < K \sum_1^\infty n^2 \sum_{2^n+1}^{2^n+1} a_i^2 < K \sum_1^\infty a_i^2 (\lg i)^2,$$

donc la série $\Sigma \delta_n^2(x)$ converge presque partout, alors δ_n tend vers zéro, c'est à dire

$$(s_k - s_{2^n}) \to 0.$$

Corollaire. La série $\sum \frac{a_n}{\lg n} \varphi_n(x)$ étant, d'après ce qui precède, presque partout convergente, on a selon le théorème de Kronecker presque partout

$$s_n(x) = o(\lg n).$$

On peut poser la question, si le coefficient $\lg^2 n$, dans le théorème précité est le moins restrictif. Le réponse négative découle du théorème suivant:

Théorème 2.[5] Quelle que soit la fonction $W(n)$ positive, vérifiant la condition

$$W(n) = o(\lg^2 n),$$

[4]) Démonstration de M. Rademacher simplifiée.
[5]) Cf. D. Menchoff 1.

il existe un système normé et orthogonal $\{\varphi_n(x)\}$ et une suite de constantes réelles a_n telles que

a) $\Sigma a_n^2 W(n) < \infty$

b) la série $\Sigma a_n \varphi_n(x)$ diverge partout.

La démonstration de la propriété b) découle de la propriété suivante du système $\{\varphi_n(x)\}$, construit par M. Menchoff:
il existe une suite de nombres naturels $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \ldots$ tels, que
1. $\nu_1 = 0,\ N_0 = 0,\ N_{k-1} = 1 + 2(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_{k-1}) < \nu_k, \quad k = 2, 3\ldots$
2. en désignant $n_k = N_{k-1} + m_k,\ 1 \leqslant m_k \leqslant \nu_k,\ s(x,p) = s_p(x)$ on a

$$|s(x, N_k - 1) - s(x, n_k)| > \frac{1}{2}$$

pour tout x d'un ensemble E_k, $\qquad k = 1, 2\ldots$
3. $\overline{\lim}\, E_k = E$, la mesure de E étant égale à 1.

Nous pouvons maintenant généraliser le lemme 1.

J'avais déjà prouvé antérieurement[6]), que la condition

$$\sum \frac{r_{n_k}}{\sqrt{k}} < \infty$$

suffit pour la convergence presque partout de la suite $\{s_{n_k}\}$ et d'autre part, que la condition

$$\sum \frac{r_{n_k}}{k} < \infty$$

n'est pas suffisante. On voit facilement, que le lemme 1 est équivalent au lemme suivant:

Si la série Σr_{n_k} converge, la suite s_{n_k} converge presque partout.

Nous pouvons maintenant généraliser ce lemme de la manière suivante:

Lemme 3. Si

$$\sum_1^\infty \frac{r_{n_k}}{k} \lg k < \infty$$

alors la suite s_{n_k} converge presque partout.

Démonstration. Il est aisé de voir, que l'hypothèse est équivalente à la condition suivante

$$\sum_{k=1}^\infty \left(a_{n_k+1}^2 + \ldots + a_{n_{k+1}}^2\right) \lg^2 k < \infty.$$

[6]) S. Kaczmarz 2.

Posons

$$\Phi_k(x) = \left[a_{n_k+1}\cdot\varphi_{n_k+1}(x) + \ldots + a_{n_{k+1}}\cdot\varphi_{n_{k+1}}(x)\right]\cdot A_k$$

où

$$A_k^2\cdot\left[a_{n_k+1}^2 + \ldots + a_{n_{k+1}}^2\right] = 1$$

et $A_k = 1$, si tous les a_i sont nuls.

Le système $\{\Phi_k(x)\}$ étant normé et orthogonal, on peut considérer la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k\,\Phi_k(x), \quad \text{où } b_k = \frac{1}{A_k}.$$

D'après l'hypothèse on a $\sum b_k^2 \lg^2 k < \infty$, donc la série (4) converge presque partout; mais on a d'autre part

$$s_{n_k}(x) = \sum_{i=0}^{k} b_i\,\Phi_i(x),$$

donc notre lemme est démontré.

En s'appuyant sur le théorème 2 on peut démontrer, que l'hypothèse du lemme 3 est la moins restrictive.

Les théorèmes 1 et 2 résolvent complètement la question des conditions du premier genre de la forme

$$\sum a_n^2\, u(n) < \infty.$$

Mais ils existent aussi des conditions d'une autre catégorie, par exemple

$$\sum a_n^2\,\psi_n < \infty, \text{ où } \psi_n = \psi_n(a_1, a_2, \ldots);$$

les théorèmes suivants s'y appliquent:

Théorème 3.[7] Si 1) $\psi_n = \dfrac{\sqrt{r_n}}{|a_n|}$

et 2) $\sum_{1}^{\infty}{}' a_n^2\,\psi_n < \infty,$

alors la série (1) converge presque partout.

En effet, il suffit de considérer la série $\sum \alpha_n$,

$$\alpha_n = (f - s_n)^2 - (f - s_{n+1})^2.$$

[7]) S. Kaczmarz 1.

On a

$$\int_0^1 |\alpha_n|\,dx \leqslant \sqrt{a_{n+1}^2 r_n} + \sqrt{a_{n+1}^2 r_{n+1}},$$

donc la série $\sum \alpha_n$ converge presque partout; il s'ensuit:

$$f - s_n \to 0.$$

Théorème 4.[8]) Si $\sum_{1}^{\infty}{}' |a_n|^{2-\varepsilon} < \infty, \quad 0 < \varepsilon < 2,$

alors la série (1) converge presque partout.

Nous démontrerons ce théorème plus loin, comme un corollaire relatif aux conditions du second genre.

§ 3. Passons maintenant au problème de conditions du second genre, c'est à dire aux conditions entraînant la convergence presque partout de la série considérée pour tout ordre de termes.

Théorème 5.[9]) Si 1) $u(n)$ est une fonction croissante vers ∞,

2) il existe une constante c et une suite de nombres naturels n_i tels, que $\sum_{i=1}^{\infty}{}' \dfrac{1}{u(n_i)} < \infty$, $\lg n_{i+1} < c \lg n_i$

3) $\sum a_n^2\, u(n) \lg^2 n < \infty$

alors la série (1) est convergente presque partout pour un ordre quelconque de ses termes.

En s'appuyant sur ce théorème nous pouvons aisément démontrer le théorème 4. A ce but écrivons la suite $|a_n|$ dans l'ordre decroissant $|a_{n(s)}|$.

Puisque $\sum |a_{n(s)}|^{2-\varepsilon} < \infty$, donc

$$s\,|a_{n(s)}|^{2-\varepsilon} \to 0$$

et par là

$$\sum a_{n(s)}^2 (\lg s)^2 (\lg\lg s)^{1+\varepsilon} < \infty.$$

D'après le théorème 5 cette série converge presque partout pour tout ordre de termes; il suffit de poser

$$u(n) = (\lg\lg n)^{1+\varepsilon}.$$

Des conditions du second genre, mais d'une autre catégorie que celle du théorème 5, donne le

[8]) D. Menchoff 3, W. Orlicz 1.
[9]) Vide W. Orlicz 1.

Théorème 6.[10]) Si 1) $u(n)$ est une fonction croissante vers $+\infty$

2) $\sum \frac{1}{u(n)} < \infty$,

3) $\sum u[\lg|\lg|a_n||]\lg^2|a_n|.a_n^2 < \infty$ et

$a_n \to 0$,

alors la série (1) converge presque partout.

§ 4. Dans les paragraphes précédents nous avons étudié la convergence des séries orthogonales sous des hypothèses concernant seulement les coefficients; les résultats ainsi obtenus sont valables pour tous les systèmes orthogonaux. La question s'impose, quelles sont les conditions se rapportant aux coefficients si l'on fait des hypothèses sur le système $\{\varphi_n(x)\}$?

A ce but écrivons les sommes partielles $s_n(x)$ de la manière suivante:

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 f(t)\,\varphi_k(t)\,\varphi_k(x)\,dt.$$

En posant

$$K_n(x,y) = \sum_1^n \varphi_k(x)\,\varphi_k(y)$$

on a

$$s_n(x) = \int_0^1 f(t)\,K_n(x,t)\,dt.$$

D'après M. Rademacher nous dirons, que

$$\varrho_n(x) = \int_0^1 |K_n(x,y)|\,dy$$

est la *fonction de Lebesgue* du système $\{\varphi_n(x)\}$.

En suivant l'usage de la théorie des équations intégrales nous appelons le *n-ième noyau* du système $\{\varphi_n(x)\}$ l'expression $K_n(x,y)$.

Étudions d'abord l'ordre de grandeur de $\varphi_n(x)$. M. Rademacher a démontré[11]), que l'on a presque partout

$$\varrho_n^2(x) = o(n \lg^{3+\varepsilon} n), \qquad \varepsilon > 0 \text{ arbitraire.}$$

[10]) Vide W. Orlicz 1, cf. aussi D. Menchoff 3.
[11]) H. Rademacher.

Une meilleure approximation nous donne le théorème suivant:

Théorème 7. Pour tout système orthogonal on a presque partout

$$\varrho_n^2(x) = o(n \lg^{1+\varepsilon} n).$$

Démonstration. Remarquons, que la série

$$\sum_2^\infty \frac{1}{n \lg^{1+\varepsilon} n}\,\varphi_n^2(x)$$

est presque partout convergente, car on a après l'intégration

$$\sum \frac{1}{n \lg^{1+\varepsilon} n} < \infty,$$

donc d'après Kronecker

$$\sum_1^n \varphi_i^2(x) = o\left(n \lg^{1+\varepsilon} n\right).$$

Appliquons maintenant l'inégalité de Schwarz à $\varrho_n(x)$; nous aurons

$$\varrho_n^2(x) \leqslant \int_0^1 K_n^2(x,t)\,dt = \sum_1^n \varphi_k^2(x),$$

ce qui implique presque partout

$$\varrho_n^2(x) = o\left(n \lg^{1+\varepsilon} n\right).$$

Remarque. Il est évident, que le théorème ci-dessus est vrai pour toutes les suites monotones $u_n \to \infty$, pour lesquelles

$$\sum \frac{1}{u_n} < \infty,$$

donc en particulier on a $\varrho_n^2(x) = o[n \lg n (\lg\lg n)^{1+\varepsilon}]$.

Théorème 8. Si l'on a presque partout

$$|\varphi_n(x)| < A,$$

on aura presque partout

$$\varrho_n(x) = O(\sqrt{n}).$$

Démonstration. $\varrho_n^2(x) \leqslant \sum_1^n \varphi_k^2(x) < A^2 . n.$

Remarques. 1) Cet ordre de grandeur est le meilleur, comme on le voit pour le système de M. Rademacher.

2) On peut remplacer l' hypothèse du théorème 8

$$|\varphi_n(x)|<A$$

par la condition

$$|\varphi_n(x)|<F(x),$$

$F(x)$ étant mésurable.

3) Si les $\varrho_n(x)$ sont indépendantes de x (constantes de Lebesgue) on a aussi $\varrho_n(x)=O(\sqrt{n})$, car

$$\varrho_n(x)=\int_0^1\varrho_n(x)\,dx=\int\int|K_n(x,t)|\,dx\,dt\leqslant\sqrt{\int\int K_n^2(x,t)\,dx\,dt}=\sqrt{n}.$$

Pour aller plus loin, nous nous servirons de théorèmes suivants:

Théorème A.[12]) Si une suite $U_n(X)$ de fonctionnelles linéaires et continues en mesure est telle, que

1) lim sup $U_n(X)$ est fini presque partout pour tout X,

2) lim $U_n(X)$ existe presque partout pour chaque X appartenant à un ensemble B partout dense dans le champ E, dans lequel les U_n sont définies,

alors la suite $U_n(X)$ tend pour chaque X presque partout vers une fonctionnelle linéaire et continue en mesure.

Dans nos applications les X seront des fonctions au carré sommable dans $(0,1)$.

Lemme A.[13]) Si 1) $F(x,y,t)$ est une fonction symmétrique par rapport a x et y,

2) $t=\min\,[\lambda(x),\,\lambda(y)]=\lambda(x,y)$, alors on a

$$\left|\int_0^1\int_0^1 F[x,y,\lambda(x,y)]\,dx\,dy\right|\leqslant 2\int_0^1 dx\int_0^1|F(x,y,\lambda(x))|\,dy.$$

Ces théorèmes nous permettrons de démontrer la convergence de séries orthogonales, si les fonctions de Lebesgue remplissent certaines conditions. A ce but remarquons d'abord, que la condition 2) du théorème A est toujours remplie: il suffit de définir l'ensemble B comme l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des fonctions orthogonales $\varphi_n(x)$ et nous savons, que cet ensemble est dense en E.

[12]) S. Banach, Bull. des Sc. M. L (1926) Th. III.
[13]) A. Plessner, Crelles Journ. 155 (1925) p. 15.

Nous nous appuyons dans la démonstration de la convergence sur le théorème suivant:

Théorème 9. Si 1) $\varrho_n(x)\leqslant F(x).u^2(n)$, $F(x)$ étant une fonction intégrable,

2) $u(n)\leqslant u(n+1)$

alors la suite

$$\frac{s_n(x)}{u(n)}$$

converge presque partout.

Démonstration. Soit $X=f(t)$, $U_n(X)=\dfrac{s_n(t)}{u(n)}$ pour la fonction $f(t)$. Pour appliquer le théorème A il suffit de démontrer la condition 1) de ce théorème. A ce but posons

$$v_n(x)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{s_k(x)}{u(k)}=\frac{s_p(x)}{u(p)},$$

p étant une fonction $p(x)$ de x et du paramètre n. Envisageons les intégrales

$$I_n=\int_0^1 v_n(x)\,dx.$$

On a

$$I_n=\int_0^1 dx\int_0^1 f(t)\,\frac{K_p(x,t)}{u(p)}\,dt=\int_0^1 f(t)\int_0^1\frac{K_p(x,t)}{u(p)}\,dx\,dt.$$

Désignons par A la constante $\int_0^1 f^2(t)\,dt$. Nous obtenons, en s'appuyant sur l'inégalité de Schwarz

$$I_n^2\leqslant A.\int_0^1\left[\int_0^1\frac{K_p}{u(p)}\,dx\right]^2 dt.$$

Posons $q=p(y)$; on aura

$$\int\left[\int\frac{K_p(x,t)}{u(p)}\,dx\right]\left[\int\frac{K_q(y,t)}{u(q)}\,dy\right]dt=\int\int\int\frac{K_p(x,t)K_q(y,t)}{u(p)\,u(q)}\,dx\,dy\,dt;$$

d'autre part

$$\int_0^1 K_p(x,t)\,K_q(y,t)\,dt=K_\lambda(x,y),$$

où

$$\lambda=\min\,(p,q),$$

donc

$$I_n^2 \leqslant A \int\int \frac{|K_\lambda(x,y)|}{u^2(\lambda)}\, dx\, dy.$$

D'après le lemme A on a

$$I_n^2 \leqslant 2A \int dx \int \frac{|K_p(x,y)|}{u^2(p)}\, dy \leqslant 2A \int F(x)\, dx = K.$$

Les I_n sont donc bornées; mais les $v_n(x)$ croissent, donc la suite $v_n(x)$ est presque partout convergente. Les hypothèses du théorème A étant vérifiées, la suite $\frac{s_n(x)}{u(n)}$ converge presque partout.

Remarques. 1) Par une modification convenable on peut démontrer le théorème 9, en remplaçant la condition 1) par

$$\lim\sup \frac{\varrho_n(x)}{u^2(n)} \text{ fini presque partout.}$$

2) Si $u(n) \to +\infty$, on a presque partout

$$\lim \frac{s_n(x)}{u(n)} = 0$$

c'est à dire

$$s_n(x) = o\,[u(n)].$$

En effet,

$$\int_0^1 \left[\frac{s_n(x)}{u(n)}\right]^2 dx = \frac{\sum_1^n a_i^2}{u(n)} \longrightarrow 0,$$

donc $\frac{s_n}{u(n)}$ étant convergente

$$\lim \frac{s_n(x)}{u(n)} = 0.$$

Théorème 10. Si

$$\varrho_n(x) \leqslant F(x),$$

$F(x)$ étant une fonction intégrable, la série (1) converge presque partout.

Démonstration. En posant $u(n) = 1$, on voit, d'après ce qui précéde, que $s_n(x)$ converge presque partout.

Remarque. Au cas du système de M. Haar ou les $\varrho_n(x)$ sont bornées on voit, que les développements dans ce système de fonctions au carré sommable sont presque partout convergents.

Passons maintenant au problème de convergence des séries, dont les fonctions de Lebesgue ne sont pas bornées. Nous savons déjà, que la croissance de ces fonctions ne surpasse pas $\sqrt{n \lg^{1+\varepsilon} n}$; la question s'impose, s'ils existent des liaisons entre la croissance des $\varrho_n(x)$ et la convergence des séries. Une réponse positive est donnée par le théorème suivant:

Théorème 11. Si 1) $\varrho_n(x) = O\,[u^2(n)]$ presque partout

$$2)\ \sum_1^\infty a_n^2 u^2(n) < +\infty,$$

alors la série (1) converge presque partout.

Démonstration. Il resulte de l'hypothèse 2) et du lemme 2, que la suite $s_{n_k}(x)$ converge presque partout, si

$$k < u^2(n_k) \leqslant k+1.$$

Pour démontrer le théorème, il suffit de prouver, que pour $n_k < n < n_{k+1}$ on a

$$s_n - s_{n_k} \to 0.$$

A ce but posons $b_n = a_n u(n)$; on a

$$s_n - s_{n_k} = \sum_{n_k+1}^{n} b_i \varphi_i(x) \cdot \frac{1}{u(i)} = \sum_{n_k+1}^{n} \left(\sum_1^i b_l \varphi_l(x)\right) \cdot \left(\frac{1}{u(i)} - \frac{1}{u(i+1)}\right) -$$
$$- \sum_1^{n_k} b_i \varphi_i(x) \cdot \frac{1}{u(n_k+1)} + \sum_1^{n} b_i \varphi_i(x) \cdot \frac{1}{u(n+1)}.$$

Le théorème 9 fournit

$$\left|\sum_1^i b_l \varphi_l(x)\right| < \varepsilon \cdot u(i) \qquad \text{pour } i > N,$$

donc en prenant $n_k > N$ on aura

$$|s_n - s_{n_k}| < \varepsilon\, u(n_{k+1}) \left[\frac{1}{u(n_k)} - \frac{1}{u(n_{k+1})}\right] + 2\varepsilon$$

et

$$|s_n - s_{n_k}| \leqslant 3\varepsilon$$

c. q. f. d.

Remarques. 1) Pour les séries trigonométriques on a

$$\varrho_n(x) = O\,[\lg n],$$

donc la condition $\sum_1^\infty (a_k^2 + b_k^2) \lg k < \infty$ suffit pour la convergence presque partout (Plessner, Kolmogoroff).

2) Les théorèmes 7 et 11 donnent la condition suivante de la convergence pour tous les systèmes orthogonaux:

$$\sum_{1}^{\infty}{}' a_n^2 \sqrt[1+\varepsilon]{n \lg n} < \infty .$$

On voit, que l'on est loin ici du résultat du théorème 1; il est donc possible, que le théorème 11 ne soit pas le moins restrictif.

II. Sommabilité des séries orthogonales.

§ 1. Nous savons déjà, qu'ils existent des séries orthogonales divergentes partout. D'autre part toute série (1), étant convergente en moyenne c'est à dire vérifiant la rélation

$$\int_0^1 (f - s_n)^2 \, dx \to 0,$$

elle est aussi convergente en mesure ce qui l'empèche à diverger vers $+\infty$ ou $-\infty$ sur un ensemble de mesure positive. Il est donc possible, qu'il existe une méthode linéaire de sommation dont le champ contiendrait toutes les séries orthogonales (1) ou au moins une classe étendue. A la recherche de telles méthodes est consacré ce chapitre. Nous étudierons tout d'abord les méthodes de Césaro-Hölder.

A ce but désignons par

$$\sigma_n^r(x)$$

la suite des moyennes d'ordre r de la série (1) c'est à dire

$$\sigma_n^r(x) = \frac{1}{A_n^r} \sum_{0}^{n}{}' A_{n-k}^r a_k \varphi_k(x),$$

où

$$a_0 \varphi_0(x) = 0, \qquad A_k^r = \frac{(r+1)(r+2)\dots(r+k)}{k!}.$$

Lemme 4.[14]) Pour tout $r > \frac{1}{2}$ la série

$$\sum_n n (\sigma_n^r - \sigma_{n-1}^r)^2$$

converge presque partout.

[14]) S. Kaczmarz 1 pour $r \geqq 1$, A. Zygmund 1, 2 pour $r > \frac{1}{2}$.

Démonstration.

$$\sigma_n^r - \sigma_{n-1}^r = \frac{1}{A_n^r A_{n-1}^r} \sum_{0}^{n} a_k \varphi_k(x) \cdot \frac{k}{r} A_n^{r-1} A_{n-k}^{r-1},$$

donc

$$(5)\quad n \int_0^1 (\sigma_n^r - \sigma_{n-1}^r)^2 \, dx = \frac{n}{r^2} \sum_{0}^{n-1} a_k^2 k^2 \left(\frac{A_n^{r-1} A_{n-k}^{r-1}}{A_n^r A_{n-1}^r} \right)^2 + \frac{n^3}{r^2} a_n^2 \left(\frac{A_n^{r-1}}{A_n^r A_{n-1}^n} \right)^2 = A_n + B_n.$$

Mais en vertu de

$$A_n \sim \frac{n^r}{r!} \text{ et } r > \frac{1}{2}$$

on a

$$\Sigma B_n < +\infty .$$

D'autre part, C_i désignant des constantes absolues,

$$A_n \leqslant C_1 \sum_{1}^{n-1} a_k^2 k^2 \frac{(n-k)^{2r-2}}{n^{2r+1}}$$

donc

$$\sum_{1}^{N} A_n \leqslant C_1 \sum_{1}^{N} a_k^2 k^2 x_k, \qquad x_k = \sum_{k+1}^{\infty} \frac{(n-i)^{2r-2}}{n^{2r+1}}.$$

En écrivant $x_k = \sum_{k+1}^{2k} + \sum_{2k+1}^{\infty}$

on a

$$\sum_{k+1}^{2k} \leqslant C_2 k^{-2r-1} \sum_{1}^{k} i^{2r-2} < C_3 k^{-2},$$

$$\sum_{2k+1}^{\infty} \leqslant C_4 k^{-2},$$

par conséquant

$$\sum_{1}^{N} A_n \leqslant C_1 (C_3 + C_4) \sum_{1}^{N} a_k^2 .$$

La série (5) étant convergente notre lemme est démontré.

Théorème 12.[14]) *Si la série (1) est presque partout sommable par la méthode de Poisson ou (C, r), $r > 0$, elle est aussi sommable (C, ε), ε étant arbitraire positif.*

Démonstration. Nous aurons recours aux théorèmes suivants:

I. (Hardy-Littlewood). Si 1) la série $\Sigma \alpha_n$ est sommable par le procédé de Poisson, et

[14]) p. 104.

2) $\Sigma n a_n^2 < \infty$,

alors cette série est sommable (C, δ), $\delta > -\frac{1}{2}$ arbitraire.

II. (Hausdorff). Les méthodes $(C, \alpha+\beta)$ et $(C,\alpha).(C,\beta)$ pour α, β, $\alpha+\beta > -1$ sont équivalentes.

Si la série (1) est sommable (C, r), cette série et la série $\Sigma(\sigma_n^1 - \sigma_{n-1}^1)$ sont aussi sommables par le procédé de Poisson. Donc d'après le théorème I et le lemme 4 (pour $r=1$) la série (1) est sommable $(C,1).(C,\delta)$ c'est à dire d'après le théorème II sommable $(C, 1+\delta)$, où $1+\delta > \frac{1}{2}$.

En raisonnant d'une façon analogue sur la série

$$\Sigma(\sigma_n^r - \sigma_{n-1}^r), \qquad r = 1+\delta > \frac{1}{2}$$

nous obtenons notre théorème.

Il suffit donc dans l'étude de la sommabilité (C, r) de se borner à la sommabilité $(C, 1)$.

Théorème 13. [15]) La convergence presque partout de la suite

$$s_{2^n}(x) = s(x, 2^n)$$

est la condition nécessaire et suffisante pour la sommabilité $(C,1)$ de la série (1) presque partout.

Démonstration. A) Posons

$$u_k = s(x, 2^n) - \sigma_{2^n}(x).$$

Nous avons

$$\int_0^1 u_k^2\,dx = \sum_1^{2^k} a_i^2 \frac{(i-1)^2}{2^{2k}},$$

donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 u_k^2\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \sum_1^{2^k} a_i^2 (i-1)^2 = \sum_1^{\infty} a_i^2 (i-1)^2 \sum_n^{\infty} \frac{1}{4^k},$$

où

$$n = E(\lg k) + 1.$$

Par conséquant

$$\sum_1^{\infty}{}' \int_0^1 u_k^2\,dx < \sum_1^{\infty}{}' a_i^2,$$

[15]) S. Kaczmarz 2.

ce qui donne presque partout

$$u_k \to 0,$$

donc la convergence de $s(x, 2^k)$ est une condition nécéssaire.

B) Supposons, que $s(x, 2^n)$ converge presque partout. Alors d'après A) la suite $\sigma_{2^n}(x)$ converge aussi. Envisageons la différence

$$\sigma_k - \sigma_{2^n}$$

pour $2^n < k < 2^{n+1}$. Nous avons

$$\sigma_k - \sigma_{2^n} = \sum_{i=2^n}^{k-1} (\sigma_{i+1} - \sigma_i).$$

Appliquons a l'égalité précédente l'inégalité de Schwarz; nous obtenons

$$(\sigma_k - \sigma_{2^n})^2 \leqslant \sum_{2^n}^{2^{n+1}} i(\sigma_{i+1} - \sigma_i)^2 \cdot \sum_{2^n}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leqslant C \sum_{2^n}^{2^{n+1}} i(\sigma_{i+1} - \sigma_i)^2.$$

Le second terme tend vers zéro d'après le lemme 4 presque partout, donc la suite $\sigma_i(x)$ converge presque partout.

§ 2. Étudions maintenant les conditions de la sommabilité $(C, 1)$. Commençons par celles du premier genre. Nous avons un théorème analogue au théorème 1.

Théorème 14. [16]) Si

$$\sum_1^{\infty}{}' a_n^2 (\lg\lg n)^2 < +\infty,$$

alors la série (1) est presque partout sommable $(C, 1)$.

Démonstration. D'après le théorème 13 il suffit de démontrer la convergence de la suite $s(x, 2^n)$. Il résulte de l'hypothèse que

$$\Sigma(a_{2^n+1}^2 + \dots + a_{2^{n+1}}^2)(\lg n)^2 < \infty,$$

donc d'après le lemme 3 la suite $s(x, 2^n)$ converge presque partout et notre théorème est démontré.

Le facteur $(\lg\lg n)^2$ est le moins restrictif comme le montre le théorème suivant:

Théorème 15. [16]) Si $V(n)$ étant une fonction croissante vers $+\infty$ on a 1) $V(n) = o[(\lg\lg n)^2]$,

[16]) D. Menchoff 2, S. Kaczmarz 3.

$$2)\ \sum b_n^2 V(n) < \infty,$$

alors il existe une série orthogonale

$$\sum b_n \psi_n(x)$$

qui n'est pas sommable $(C, 1)$ dans tout l'intervalle $(0, 1)$.

Démonstration. Posons

$$W(n) = V(2^n)$$

et considérons la série divergente $\sum a_n \varphi_n(x)$ mentionnée dans le théorème 2. Mettons

$$\psi_{2^n}(x) = \varphi_n(x)$$

$$b_{2^n} = a_n \qquad \text{pour } n_k \leqslant n \leqslant N_k - 1;$$

pour les autres indices m soit $\psi_m(x)$ égale à une fonction de la suite $\{\varphi_n(x)\}$, différente de $\psi_{2^k}(x)$ et b_m soit égal à zéro.

D' après le théorème 2 la suite $s(x, 2^n)$ de la série

$$\sum b_n \psi_n(x)$$

diverge partout, donc la suite $\sigma_{2^n}(x)$ diverge presque partout d'après la démonstration du théorème 13. Pour obtenir la divergence de la suite $\sigma_{2^n}(x)$, et par là aussi celle de la suite $\sigma_n(x)$ en tout intervalle, il suffit de poser dans l'ensemble de mesure nulle

$$\psi_{2^n}(x) = \frac{1}{b_{2^n}}.$$

Le théorèmes 14 et 15 donnent une réponse complète à la question des conditions du premier genre pour la sommabilité $(C, 1)$. Les conditions du second genre sont identiques aux celles pour la convergence comme le montre le théorème 16.

Théorème 16.[17]) Si la série (1) est sommable presque partout par la méthode $(C, 1)$ pour chaque ordre des termes, cette série est aussi presque partout convergente.

Démonstration. La série (1) soit presque partout sommable $(C, 1)$. D'après le théorème 13 la suite $s(x, 2^n)$ converge aussi. Considérons la série partielle

$$\sum a_{n_k} \varphi_{n_k}(x)$$

[17]) Une généralisation donne W. Orlicz 2.

convergente presque partout absolument (il suffit pour cela $\sum |a_{n_k}| < \infty$). Ordonnons maintenant la série (1) de la façon suivante:

Les termes aux indices 2^n de la nouvelle série seront succesivement le premier, second etc. de la série (1) avec l'exception des termes $a_{n_k} \varphi_{n_k}(x)$, qui occuperons les places aux indices $m \neq 2^n$.

D'après l'hypothèse cette nouvelle série est sommable $(C, 1)$ presque partout, donc la suite partielle $s'(x, 2^n)$ converge presque partout. Envisageons maintenant une seconde suite $s''(x, 2^n)$, en remplaçant dans $s'(x, 2^n)$ les coefficients de termes aux indices 2^k par zéro. Cette suite $s''(x, 2^n)$ converge, puisque c'est la série $\sum a_{n_k} \varphi_{n_k}(x)$ transformée, donc la différence $s'(x, 2^n) - s''(x, 2^n)$ converge aussi. Mais cette différence est la suite partielle de sommes de la série

$$\sum' a_n \varphi_n(x),$$

où l'apostrophe signifie, qu'on a rejeté les termes aux indices n_k, en mettant en même temps les autres termes $a_n \varphi_n(x)$ à la 2^n-ième place et des zéros aux autres places. Si nous ajoutons maintenant à cette série les termes $a_{n_k} \varphi_{n_k}(x)$ convenablement nous aurons notre série primitive; elle est donc convergente.

§ 3. Élargissons maintenant sur les méthodes (C, r) les théorèmes du Chapitre I § 4 concernant les propriétés du système orthogonal et leur influence sur la convergence. Tout d'abord étudions la sommabilité $(C, 1)$.

Désignons par $K'_n(x, t)$ l'expression

$$K'_n(x, t) = \sum_1^n \varphi_k(x) \varphi^k(t) \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

et posons

$$\varrho'_n(x) = \int_0^1 |K'_n(x, t)|\, dt.$$

Théorème 17. Si 1) $u(n) \leqslant u(n+1)$

2) $\varrho'_n(x) \leqslant F(x) u^2(n)$,

$F(x)$ étant une fonction intégrable alors la limite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sigma_n(x)}{u(n)}$$

existe presque partout.

Démonstration.

$$\sigma_n(x) = \int_0^1 f(t) K'_n(x,t)\, dt;$$

en posant

$$v_n(x) = \max_{1 \le k \le n} \frac{\sigma_k(x)}{u(k)} = \frac{\sigma_p(x)}{u(p)}$$

on obtient

$$v_n(x) = \int_0^1 f(t) \frac{K'_p(x,t)}{u(p)}\, dt.$$

D'après le théorème A il suffit de démontrer, que l'on a

$$I_n = \int_0^1 v_n(x)\, dx \leqslant C.$$

Pour cela effectuons la transformation

$$I_n = \int_0^1 f(t) \left[\int_0^1 \frac{K'_p(x,t)}{u(p)}\, dx \right] dt$$

$$I_n^2 \leqslant A . \int \left[\int \frac{K'_p}{u(p)}\, dx \right]^2 dt.$$

Par une voie déjà connue nous arrivons à l'expression

$$I_n^2 \leqslant A \int\int \frac{1}{u(p)\,u(q)} \sum_1^{\lambda} \varphi_k(x)\varphi_k(y) \left(1 - \frac{k-1}{p}\right)\left(1 - \frac{k-1}{q}\right) dx\, dy.$$

La somme sous l'intégrale est égale à

$$\sum_1^{\lambda} K_i(x,y) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{2i-1}{pq}\right) =$$

$$= \sum_1^{\lambda} i K_i'(x,y) \frac{2}{pq} + \lambda K_\lambda'(x,y) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{2\lambda+1}{pq}\right)$$

donc d'après le lemme A nous avons

$$I_n^2 \leqslant A \int\int \frac{dx\, dy}{u^2(\lambda)} \left[\frac{2}{\lambda^2} \sum_1^{\lambda} i\, |K_i'| + |K_\lambda'| \right] \leqslant$$

$$\leqslant 4A \int \frac{dx}{u^2(p)} \left[\frac{1}{p^2} \sum_1^{p}{}' i F(x) u^2(p) + F(x) . u(p) \right]$$

$$\leqslant 8A \int F(x)\, dx = C.$$

Remarque. Si $\lim u(n) = \infty$, on a

$$\sigma_n(x) = o\,[u(n)].$$

En effet

$$\int_0^1 \frac{\sigma_n(x)}{u(n)}\, dx \leqslant \frac{1}{u^2(n)} \sum_1^n a_k^2,$$

donc la limite est zéro.

Théorème 18. Si 1) $\int_0^1 F(x)\, dx < +\infty$

2) $\varrho_n'(x) \leqslant F(x)$,

alors la série (1) est presque partout sommable $(C, 1)$.

En effet en posant $u(n) = 1$ on voit d'après le résultat précédant que la suite $\sigma_n(x)$ converge presque partout.

Pour aller plus loin nous avons besoin du lemme suivant:

Lemme 5.[18]) Si pour une série $\sum_1^{\infty} \alpha_n$

1) $\sigma_n = o(v_n)$, v_n étant une suite de nombres croissants

2) $\Delta \frac{1}{v_n} = O\left(\frac{1}{n\, v_n}\right)$

alors on a pour la suite $w_n = \frac{\alpha_n}{v_n}$ la relation

$$S_n = o(1) + S'_n,$$

où S_n et S'_n designent les n-ièmes termes des moyennes arithmètiques des suites w_n et $s'_n \Delta^2 \frac{1}{v_n}$,

en désignant par s'_n l'expression $\sum_1^n{}' \sum_1^k \alpha_i$.

Démonstration. $S_n = \sum_1^n \frac{\alpha_k}{v_k} (n - k + 1)$.

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_1^n \alpha_k (n-k+1) \frac{1}{v_n} + \frac{1}{n} \sum_1^n{}' \alpha_k (n-k+1) \left(\frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_n}\right).$$

[18]) Pour le cas général v. A. Zygmund 4, Satz II.

La première somme tend d'après l'hypothèse 1) vers zéro; dans la seconde posons

$$\beta_k = (n-k+1)\left(\frac{1}{v_k}-\frac{1}{v_n}\right) \quad \text{pour } k=1,2,\dots n$$

$$\beta_k = 0 \qquad \text{pour } k>n.$$

On a

$$\sum_1^n \alpha_k \beta_k = \sum_1^n \Delta\beta_k . \sum_1^k \alpha_i = \sum_1^n \Delta^2 \beta_k . s'_k.$$

Mais

$$\Delta^2 \beta_k = \Delta . \frac{1}{v_k} + \Delta \frac{1}{v_{k+1}} + (n-k)\, \Delta^2 \frac{1}{v_k},$$

donc

$$\sum_1^n s'_k . \Delta^2 \beta_k = \sum_1^n s'_k \left(\Delta \frac{1}{v_k} + \Delta \frac{1}{v_{k+1}}\right) + \sum_1^n s'_n . (n-k)\, \Delta^2 \frac{1}{v_k}.$$

Il suit de l'hypothèse 2), que

$$\sum_1^n s'_k\, \Delta \frac{1}{v_k} = \Sigma\, o(k v_k) . O\left(\frac{1}{k v_k}\right) = o(n)$$

$$\sum_1^n s'_k\, \Delta \frac{1}{v_{k+1}} = o(n),$$

d'autre part

$$\frac{1}{n}\sum_1^n s'_k (n-k)\, \Delta^2 \frac{1}{v_k} = S'_n + \frac{1}{n}\sum_1^n s'_k\, \Delta^2 \frac{1}{v_k}.$$

Le second terme tend vers zéro, ce qui achève la démonstration.

Théorème 19. Si 1) $\varrho'_n(x) \leqslant F(x) . u(n)$

2) $\Delta \frac{1}{u(n)} = O\left[\frac{1}{n\, u(n)}\right]$,

3) $\sum_1^\infty k \left|\Delta^2 \frac{1}{u(k)}\right| < \infty$

4) $\sum_1^\infty a_n^2 u^2(n) < \infty$,

alors la série (1) est presque partout sommable $(C, 1)$.

Démonstration. D'après le théorème 17 on a presque partout pour toute série (1)

$$\sigma_n = o[u(n)],$$

donc aussi pour la série $\sum_1^\infty a_n u(n) \varphi_n(x)$.

Pour prouver la convergence de la suite $\sigma_n(x)$ de la série (1), il suffit selon le lemme 5 de démontrer la sommabilité $(C, 1)$ de la série $\sum s'_k . \Delta^2 \frac{1}{u(k)}$. Nous démontrerons, que cette série est presque partout convergente, donc aussi sommable $(C, 1)$. En effet on a

$$\int_0^1 |s'_k|\, dx \leqslant \sqrt{\sum_1^k a_i^2 (k-1)^2} \leqslant k \sqrt{\sum_1^k a_i^2} < k . A$$

où

$$A = \sqrt{\sum_1^\infty a_i^2}, \text{ donc}$$

$$\int_0^1 |s'_k| \left|\Delta^2 \frac{1}{u(k)}\right| dx \leqslant A . k \left|\Delta^2 \frac{1}{u(k)}\right|.$$

D'aprés l'hypothèse 3) la série $\sum k \left|\Delta^2 \frac{1}{u(k)}\right|$ converge, ce qui fait que notre série converge presque partout.

Remarque. Les hypothèses 2) et 3) sont vérifiées pour $u(n) = \lg n$, $\lg\lg n$ etc.

On peut généraliser les théorèmes précitées sur les méthodes (C, r), $r = 2, 3, \dots$. Pour cela nous nous appuyons sur le lemme suivant:

Lemme 6. Si $f_r(x) = \left[\left(1-\frac{x}{p}\right)\left(1-\frac{x}{q}\right)\right]^r$, $\quad r = 1, 2, \dots$

pour $\quad p < q, \; 0 < x \leqslant p$,

alors il existe une constante C_r telle, que l'on a

$$|\Delta^i f_r(x)| \leqslant \frac{C_r}{p^i}. \qquad 1 \leqslant i \leqslant r+1.$$

Démonstration. Pour $i = 1$ on a

$$\Delta f_r(x) = f_r(x+1) - f_r(x) = f'_r(x+\vartheta) =$$

$$= r f_{r-1}(x+\vartheta) . \left[\frac{2(x+\vartheta)}{pq} - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right],$$

où $\quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$,

donc

$$|\Delta f_r(x)| \leqslant r \left|\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{2(x+\vartheta)}{pq}\right| < r \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right| < \frac{r}{p}.$$

Supposons, que pour $k \leqslant i$ on a

$$\left| f_{r-1}^{k-1}(y) \right| \leqslant \frac{C_{r-1}}{p^{k-1}}$$

pour $0 < y < p+r+1$. Alors

$$f_r^i(y) = r\left[f_{r-1}(y) \cdot \left(\frac{2y}{pq} - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \right]^{(i-1)} =$$

$$= r\left[f_{r-1}^{i-1}(y) \cdot \left(\frac{2y}{pq} - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) + (i-1) \cdot f_{r-1}^{i-2}(y) \cdot \frac{2}{pq} \right],$$

donc

$$|f_r^i(y)| \leqslant r\left[\frac{C_{r-1}}{p^{i-1}} \left(\frac{2(p+r+1)}{pq} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) + (i-1)\, \frac{C_{r-1}}{p^{i-2}}\, \frac{2}{pq} \right]$$

$$\leqslant \frac{r\, C_{r-1}}{p^i} \left(\frac{2p+2r+2}{q} + 2 + 2r \right) = \frac{C_r}{p^i}.$$

D'autre part

$$\Delta^i f_r(x) = f_r^{(i)}(x + \vartheta i),$$

et puisque $x + \vartheta i < p+r+1$, cela implique

$$|\Delta^i f_r(x)| < \frac{C_i}{p^i},$$

c. q. f. d.

Pour aller plus loin, désignons par $K_n^r(x,y)$ le n-ième terme de la suite des moyennes (C, r) pour la série

$$\sum_1^\infty \varphi_n(x)\, \varphi_n(y).$$

Soit de plus $\sigma_n^r(x)$ la suite des moyennes de Riesz (R, r) pour la série (1) c'est à dire

$$\sigma_n^r(x) = \sum_1^n a_k\, \varphi_k(x) \left(1 - \frac{k}{n}\right)^r.$$

Pour démontrer sous certaines conditions la sommabilité de la série (1) pour la methode $(C, 1)$ il suffit d'après le théorème 12 de prouver, que la série (1) est sommable par la méthode (C, r). Mais on sait, que les méthodes de sommation (C, r) et (R, r) sont équivalentes, il suffit donc de considérer la convergence de la suite $\sigma_n^r(x)$.

Théorème 20. Si 1) $u(n) \leqslant u(n+1)$

$$2) \quad \int_0^1 F(x)\, dx < +\infty$$

$$3) \quad \int_0^1 |K_n^r(x,y)|\, dy < F(x)\, u^2(n),$$

alors la suite

$$\frac{\sigma_n^r(x)}{u(n)}$$

converge presque partout.

Démonstration. Désignons par analogie au théorème 17 par $v_n(x)$ l'expression

$$\frac{1}{u(p)}\, \sigma_p^r(x), \qquad p = p(x).$$

Pour démontrer notre thèse, il suffit d'après le théorème A de prouver, que la suite croissante

$$I_n = \int_0^1 v_n(x)\, dx$$

est bornée. On a en effet

$$I_n = \int_0^1 f(t)\, dt \int_0^1 \frac{1}{u(p)} \sum_1^p \varphi_k(x)\, \varphi_k(t) \left(1 - \frac{k}{p}\right)^r dx,$$

donc

$$I_n^2 \leqslant A \cdot \int\!\!\int \frac{1}{u(p)\, u(q)} \cdot \sum_1^\lambda \varphi_k(x)\, \varphi_k(y) \left(1 - \frac{k}{p}\right)^r \left(1 - \frac{k}{q}\right)^r dx\, dy$$

d'après les notations du théorème 17.

Posons pour abréger

$$\alpha_k = \left[\left(1 - \frac{k}{p}\right)\left(1 - \frac{k}{q}\right) \right]^r,$$

$$S_k^0(x,y) = K_n(x,y) = \sum_1^k \varphi_i(x)\, \varphi_i(y), \quad S_k^{i+1}(x,y) = \sum_{i=1}^k S_n^i(x,y),$$

$$L(x,y) = \sum_1^\lambda \varphi_k(x)\, \varphi_k(y) \cdot \alpha_k.$$

On aura

$$L(x,y)=\sum_{1}^{\lambda-1} S_k^0 \varDelta \alpha_k=\sum_{1}^{\lambda-1} S_k^1 \varDelta^2 \alpha_k+S_{\lambda-1}^1 \varDelta \alpha_\lambda=$$

$$=\sum_{1}^{\lambda-1} S_k^r \varDelta^{r+1} \alpha_k+\sum_{s=1}^{r} S_{\lambda-1}^s \varDelta^s \alpha_\lambda.$$

En s'appuyant sur le lemme A on obtient

$$I_n^2 \leqslant 2A\int dx \int \frac{1}{u^2(p)}\left[\sum_{1}^{p} |S_k^r \varDelta^{r+1}\alpha_k| + \sum_{1}^{r} |S_{p-1}^s \varDelta^s \alpha_p|\right].\, dy.$$

Or, on démontre aisément par l'induction, que

$$\int_0^1 |S_k^r|\, dy \leqslant F(x)\,.\,k^r\,.\,u^2(k),$$

$$\int_0^1 |S_p^s|\, dy \leqslant F(x)\,.\,p^r\,.\,u^2(p)\,.\,C,$$

où C est une constante. On a aussi

$$|\varDelta^s \alpha_p| = \left|\sum_{i=0}^{s} (-1)^{s-i}\binom{s}{i}\alpha_{p+i-s}\right| \leqslant 2^s.\left(1-\frac{p-s}{p}\right)^r=\frac{2^s.\,s^r}{p^r}=\frac{D}{p^r}.$$

En tenant compte du lemme 6 et des inégalités ci-dessus on déduit

$$I_n^2 \leqslant 2A\int \frac{dx}{u^2(p)}.\left[\sum_{1}^{p} F(x)\,u^2(k)\,k^r.\frac{C_r}{p^{r+1}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{1}^{r} F(x)\,u^2(p)\frac{D}{p^r}.\,C.\,p^r\right]$$

$$\leqslant 2A\,[C_r+CD.\,r]\int F(x)\,dx.$$

La suite I_n étant bornée nous voyons que la suite

$$\frac{\sigma_n^r(x)}{u(n)}$$

converge presque partout.

Remarque. Si $u(n)\to\infty$ on voit, que

$$\sigma_n^r(x)=o\,[u(n)].$$

Théorème 21. Si 1) $\int_0^1 F(x)\,dx < +\infty$

2) $\int_0^1 |K_n^r(x,y)|\,dy \leqslant F(x),$

alors la série (1) est presque partout sommable $(C,1)$.

En effet, d'après le théorème 20 la suite $\sigma_n^r(x)$ converge presque partout, si l'on pose $u(n)=1$. La série (1) est de ce fait sommable (C,r), donc aussi $(C,1)$.

§ 4. On peut poser la question, si les fonctions de Lebesgue pour les méthodes (C,r) et (R,r), $r=1,2,\dots$, que nous désignons par $\int |CK_n(x,y)|\,dy$ et $\int |RK_n(x,y)|\,dy$, sont du même ordre de croissance. La réponse est positive:

Lemme 7. On a presque partout

$$D_n=\left|\int |CK_n(x,y)|\,dy-\int |RK_n(x,y)|\,dy\right|=o(1).$$

Démonstration. $$CK_n=\frac{1}{\binom{n+r}{r}}\sum_{1}^{n}\varphi_k(x)\,\varphi_k(y)\binom{n+r-k}{r}$$

$$RK_n=\sum_{1}^{n}\varphi_k(x)\,\varphi_k(y)\left(1-\frac{k}{n}\right)^r.$$

Il s'en suit

$$D_n \leqslant \int |CK_n-RK_n|\,dy=\int \left|\sum_{1}^{n}\varphi_k(x)\,\varphi_k(y)\,c_k\right|dy$$

en posant

$$c_k=\frac{\binom{n+r-k}{r}}{\binom{n+r}{r}}-\left(1-\frac{k}{n}\right)^r.$$

On a de plus

$$D_n^2 \leqslant \sum_{1}^{n}\varphi_n^2(x)\,.\,c_k^2,$$

mais

$$c_k<\left(1-\frac{k}{n+r}\right)^r-\left(1-\frac{k}{n}\right)^r<rk\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+r}\right)=\frac{r^2k}{n(n+r)}$$

donc

$$D_n^2 \leqslant r^4 \sum_1^n \varphi_k^2(x) \frac{k^2}{n^2(n+r)^2} < r^4 \frac{\sum_1^n k^2 \varphi_k^2(x)}{n^4}.$$

Le second terme tend vers zéro presque partout et le lemme est établi.

Pour aller plus loin nous avons besoin des théorèmes suivants:

Théorème 22. Si $r \geqslant 1$, on a presque partout pour les moyennes de Riesz de la série (1)

$$\sigma_n^r - \sigma_n \to 0.$$

Démonstration. Nous savons, que les méthodes

$$(R, 1) \,.\, (R, r) \text{ et } (R, 1+r)$$

sont équivalentes, il suffit donc de démontrer, que l'on a presque partout pour $r > 0$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\sigma_k^r - \sigma_k^{r-1}) \to 0.$$

A ce but remarquons, que la série

$$\sum_1^\infty w(2^n), \qquad w(p) = \frac{1}{p} \sum_1^p (\sigma_k^r - \sigma_k^{r-1})^2$$

converge presque partout. En effet

$$\int_0^1 (\sigma_k^r - \sigma_k^{r-1})^2 dx = \frac{1}{k^2} \sum_1^k a_i^2 i^2 A_{ik}, \quad A_{ik} = \left(1 - \frac{i}{k}\right)^{2r-2},$$

donc

$$\int_0^1 w(p)\, dx = \frac{1}{p} \sum_1^p \frac{1}{k^2} \sum_1^k a_i^2 i^2 A_{ik} = \frac{1}{p} \sum_1^p a_i^2 i^2 \sum_{i+1}^p \frac{A_{ik}}{k^2}.$$

Mais

$$\sum_{i-1}^p \frac{A_{ik}}{k^2} \leqslant \sum_{i+1}^\infty \frac{(k-i)^{2r-2}}{k^{2r}} = \sum_1^\infty \frac{l^{2r-2}}{(i+l)^{2r}} < \sum_1^\infty \frac{1}{(i+l)^2} < \frac{1}{i},$$

donc par conséquant

$$\sum_1^\infty \int_0^1 w(2^n)\, dx < \sum_1^\infty \frac{1}{2^n} \sum_1^{2^n} a_i^2 i < C \sum_1^\infty a_i^2.$$

La série $\Sigma\, w(2^n)$ étant convergente nous savons, que

$$w(2^n) \to 0.$$

D'autre part on a pour $2^n < p < 2^{n+1}$

$$w(p) \leqslant \frac{1}{p} \sum_1^{2^{n+1}} (\sigma_k^r - \sigma_k^{r-1})^2 < 2\, w(2^{n+1}),$$

ce qui donne

$$w(p) \to 0.$$

L'inégalité de Schwarz fournit

$$\left| \frac{1}{n} \sum_1^n (\sigma_k^r - \sigma^{r-1}) \right|^2 \leqslant \frac{1}{n} \cdot \sum_1^n (\sigma_k^r - \sigma^{r-1})^2 = w(n),$$

ce qui montre que notre suite tend vers zéro.

Théorème 23. Si 1) $\int_0^1 |C K_n(x, y)|\, dy \leqslant F(x)\, u^2(n)$,

$F(x)$ étant une fonction intégrable,

2) $u(n) \leqslant u(n+1), \quad u(n) \to \infty$

3) $\left| \Delta \frac{1}{u(n)} \right| < \frac{C}{n\, u(n)}$

$$\sum_1^\infty k \left| \Delta^2 \frac{1}{u(k)} \right| < +\infty$$

4) $\sum_1^\infty a_n^2 u^2(n) < +\infty$,

alors la série (1) est presque partout sommable $(C, 1)$.

En effet d'après les théorèmes 20 et 22 on a presque partout

$$\sigma_n(x) = o[u(n)],$$

donc notre série est sommable $(C, 1)$ [théorème 21].

§ 6. Nous analyserons encore brièvement d'autres méthodes de sommabilité. Nous savons déjà, qu'aucune des méthodes (C, r) ne contient toutes les séries orthogonales. Il est donc possible, qu'il existe une autre méthode de la sommabilité, valable pour toutes ces séries. Le théorème suivant donne une réponse négative, du moins à ce qui concerne les méthodes linéaires.

Théorème 24.[19]) Étant donnée une méthode linéaire quelconque on peut trouver un système des fonctions orthogonales $\varphi_n(x)$ et une suite de nombres a_n telles, que

1) $\sum\limits_1^\infty a_n^2 < \infty$

2) $\sum a_n \varphi_n(x)$ n'est pas sommable par cette methode pour tous les x.

La démonstration de ce théorème obtient M. Menchoff en construisant des exemples convenables.

Remarque. D'autre part il existe pour chaque série (1) une méthode linéaire spéciale d'après laquelle cette série est sommable presque partout. La méthode suivante en est pour l'exemple:

Soit n_k la suite d'indices telle, que s_{n_k} converge presque partout (lemme 1). Définissons maintenant le tableau linéaire de M. Toeplitz de la façon suivante

$$T_k(X) = \sum_1^{n_k} a_{ki} X_i, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$$a_{ki} = 1 \quad \text{pour} \quad i = n_k,$$

$$a_{ki} = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq n_k.$$

Il est évident, que notre série est sommable par la méthode correspondante à ce tableau.

Enfin nous démontrerons le théorème suivant:

Théorème 25.[20]) Si 1) $W(n)$ est une fonction croissante

$$2) \lim_{n\to\infty} W(n) = +\infty,$$

alors il existe une méthode lineaire d'après laquelle toute série (1) remplisant la condition

$$\sum_1^\infty a_n^2 W(n) < \infty$$

est presque partout sommable.

[19]) Vide D. Menchoff 2.
[20]) Une autre démonstration chez D. Menchoff 2.

Démonstration. Soit n_k le plus grand nombre entier pour lequel

$$\lg^2 k < W(n_k) \leqslant \lg^2 (k+1).$$

La suite $s_{n_k}(x)$ converge d'après le lemme 3 presque partout. Cette suite donne, selon la remarque précédente, une méthode linéaire de sommation.

(Reçu par la Rédaction le 30. IV. 1928).