Une remarque sur l'homéomorphie des champs fonctionnels

par

S. MAZUR (Lwów).

Désignons par S^p $(p \geqslant 1)$ le champ formé de toutes les fonctions réelles $f(x)$, définies dans $<0, 1>$, mesurables (L), pour lesquelles l'intégrale

$$\int_0^1 |f(x)|^p \, dx$$

existe; soit s^p le champ formé de toutes les suites à termes réels $\{a_n\}$, telles que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$$

converge. Le but de cette Note est de démontrer le suivant

THÉORÈME. *Si $p, q \geqslant 1$, les champs S^p et s^q sont homéomorphes.*

Démonstration.[1]) Posons dans le champ S^1

$$F(f) = \operatorname{sgn} f \, . \, |f|^{\frac{1}{p}}.$$

Cette opération transforme le champ S^1 en S^p d'une façon biunivoque; en désignant par $G(g)$ l'opération inverse de $F(f)$, nous avons

$$G(g) = \operatorname{sgn} g \, . \, |g|^p.$$

1°. *L'opération $F(f)$ est continue dans le champ S^1.*

En effet, supposons que $f_n \,\varepsilon\, S^1$ $(n = 0, 1, \ldots)$ et

$$(1) \qquad \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 |f_n - f_0| \, dx = 0.$$

[1]) Nous supprimons x pour simplifier l'écriture.

Quels que soient les nombres réels a, b, on a

$$\left|\operatorname{sgn} a \,.\, |a|^{\frac{1}{p}} - \operatorname{sgn} b \,.\, |b|^{\frac{1}{p}}\right|^p \leqslant 2^p |a-b|;$$

en tenant compte de cette inégalité et de la définition de l'opération $F(f)$, on obtient

$$(2) \qquad \int_0^1 |F(f_n) - F(f_0)|^p dx \leqslant 2^p \int_0^1 |f_n - f_0|\, dx \quad (n=1, 2, \ldots)$$

En vertu de (1) et (2)

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |F(f_n) - F(f_0)|^p dx = 0$$

ce qui prouve la proposition à démontrer.

2⁰. *L'opération $G(g)$ est continue dans le champ S^p.*

Soit $g_n \varepsilon S^p$ $(n=0, 1, \ldots)$ et

$$(3) \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |g_n - g_0|^p dx = 0.$$

On vérifie facilement que pour tous les a, b réels subsiste l'inégalité

$$|\operatorname{sgn} a \,.\, |a|^p - \operatorname{sgn} b \,.\, |b|^p| \leqslant p\, |a-b|\, (|a|+|b|)^{p-1};$$

par conséquent, pour $n=1, 2, \ldots$

$$(4) \qquad \int_0^1 |G(g_n) - G(g_0)|\, dx \leqslant p \int_0^1 |g_n - g_0|\, (|g_n| + |g_0|)^{p-1} dx.$$

Or, d'après le théorème de Hölder-Riesz on a

$$\int_0^1 |g_n - g_0|\, (|g_n| + |g_0|)^{p-1} dx \leqslant$$

$$(5) \qquad \leqslant \left[\int_0^1 |g_n - g_0|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 (|g_n| + |g_0|)^p dx\right]^{1-\frac{1}{p}}$$

pour $n=1, 2, \ldots$ La relation (3) donne

$$(6) \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |g_n|^p dx = \int_0^1 |g_0|^p dx;$$

en tenant compte de (3), (4), (5), (6) et de l'inégalité évidente

$$\int_0^1 (|g_n| + |g_0|)^p dx \leqslant 2^p \int_0^1 [\operatorname{Max}(|g_n|, |g_0|)]^p dx \leqslant$$

$$\leqslant 2^p \left[\int_0^1 |g_n|^p dx + \int_0^1 |g_0|^p dx\right]$$

$(n=1, 2, \ldots)$ on obtient finalement

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |G(g_n) - G(g_0)|\, dx = 0.$$

Les champs S^1 et S^p sont donc homéomorphes. On peut évidemment énoncer un théorème analogue pour les champs s^1 et s^p. Mais en vertu de l'égalité de Parseval les champs S_2 et s^2 sont homéomorphes; le théorème en question est ainsi démontré complètement.

(Reçu par la Rédaction le 17. X. 1928).