Anwendungen der Funktionalanalysis auf einige Fragen der reellen Funktionentheorie

von

H. STEINHAUS (Lwów).

In dieser Arbeit wird der Zweck verfolgt Aufgaben der reellen Funktionentheorie mit Mitteln der Funktionalanalysis zu lösen. Ein Beispiel solchen Vorgehens liefert eine Arbeit des Herrn Banach [1]), wo aus dem Verhalten von linearen Funktionaloperationen die Existenz von nichtdifferenzierbaren stetigen Funktionen erschlossen wird. Diese Methode wurde dann von Herrn Saks [2]) zu anderen Problemen verwendet und es ist die Saks'sche Formulierung des für uns in Betracht kommenden Lemmas der Funktionalanalysis, deren wir aus bedienen werden. Einige scheinbar ganz verschiedene, meistens ungelöste oder nur teilweise gelöste Fragen lassen sich mit Hilfe dieses Lemmas unter einen Gesichtspunkt bringen und ohne rechnerische Kunstgriffe beantworten. Ein jedes Mal wird eine im Wesen der Aufgabe begründete Funktionaloperation herangezogen und ihre Stetigkeit oder Unstetigkeit an Folgen von Sinuspolynomen erprobt. Die Sinusfolge kommt schon bei Herrn Banach vor; auch gibt seine Methode die Möglichkeit effektive Beispiele zu konstruieren; die Saks'sche Fassung vermeidet dagegen Rechnungen, erlaubt Funktionen zu erhalten, welche *fast überall* (nicht bloß außerhalb maßkleinen Mengen) verlangte Singularitäten aufweisen und sagt auch etwas über die Verteilung der gesuchten Funktionen im Funktionenraum aus. Das Verfahren wird meistens so verlaufen:

---

[1]) Sur la convergence presque partout de fonctionnelles linéaires. Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. L (1926).

[2]) Sur les fonctionnelles de M. Banach et leur application aux développements des fonctions. Fundamenta Mathematicae X (1927), pp. 186—196; p. 192, Théorème 6.

Die Funktionaloperation wird von dem Problem selbst nahegelegt. Da sie aber als Grenze einer Folge von linearen Operationen erscheint, und daher — wenn sie im ganzen Funktionenraum existieren würde — stetig sein müßte, zeigt die Unstetigkeit, daß sie in gewissen „Punkten" unausführbar ist. Diese „Punkte" sind eben die gesuchten singulären Funktionen einer reellen Variablen. An dem Beispiel der Differenzierbarkeitsfrage sieht das Verfahren so aus: Einer jeden stetigen Funktion $x(\tau)$ entspricht der Differenzenquotient

$$\nu\left[x\left(\tau+\frac{1}{\nu}\right)-x(\tau)\right]=F_\nu(x).$$

Für differenzierbare Funktionen $x(\tau)$ ist $\operatorname*{Lim}_{\nu\to\infty} F_\nu(x)=x'(\tau)=F(x)$. Nun ist aber

$$F\left(\frac{\sin q\tau}{q}\right)=\cos q\tau$$

und obwohl $\dfrac{\sin q\tau}{q}$ für $x\to\infty$ gleichmäßig gegen Null strebt, konvergiert $\cos q\tau$ nicht einmal asymptotisch gegen Null. Also ist F unstetig, also gibt es nichtdifferenzierbare, stetige $x(\tau)$. Das ist in rohen Umrissen die Banach-Saks'sche Methode. (Allerdings kommt weder die Differenzierbarkeitsfrage noch die Sinusfolge bei Herrn Saks vor). Es ist nun merkwürdig, daß man bei ganz verschiedenen Problemen mit der Sinusfolge durchkommt.

§ 1 bringt die Definitionen und das Lemma.

§ 2 behandelt die Existenz von nichtdifferenzierbaren Funktionen mit vorgeschriebenem Stetigkeitsgrad.

Wie dem Verfasser mitgeteilt wurde, hat Herr Ruziewicz nichtdifferenzierbare $x(\tau)$ konstruiert mit der Bedingung

$$|x(\tau+\varepsilon)-x(\tau)|\leqslant\varphi(|\varepsilon|),$$

wo $\varphi(|\varepsilon|)=|\varepsilon|^\alpha$ und zwar für jeden echten Bruch α $(0\leqslant\alpha<1)$ und dasselbe gelang Herrn Zygmund für allgemeine $\varphi(|\varepsilon|)$, so daß wir mit unseren bloß *fast überall* nichtdifferenzierbaren Funktionen im Nachteil bleiben. Dagegen ist es ein Vorteil unserer Methode, daß wir jedes Mal Funktionen finden, für welche

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{x(\tau+\varepsilon_n)-x(\tau)}{\varepsilon_n}\right|=\infty,\quad \varepsilon_n>0,\quad \varepsilon_n\to 0$$

fast überall gilt, nachdem $\{\varepsilon_n\}$ vorgegeben wurde. Dieses wäre sogar für stetige Funktionen ohne Nebenbedingung neu. Auch

erweist sich ein jedes Mal die Menge der regulären Funktionen als von der Kategorie *eins* im entsprechenden Funktionenraum. (Dieser Raum ist z. B. im Falle der klassischen Nichtdifferenzierbarkeitsfrage der Raum aller stetigen Funktionen mit üblichem Distanzbegriff).

§ 3 behandelt den „unsymmetrischen Ausdruck"

$$\int_0^1 |x(\xi+\tau)-x(\xi)|\,.\,|w(\tau)|\,.\,d\tau.$$

Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen gefunden, damit es stetige Funktionen $x(\tau)$ gibt, die diesen Ausdruck für fast alle ξ unendlich machen. Kurz lassen sich diese Bedingungen als $\int_0^1 |w(\tau)|\,d\tau=\infty$ schreiben. Ähnliches wird auch bei der Fortlassung der ersten Modulzeichen | | bewiesen.

§ 4 zeigt, daß der „symmetrische Ausdruck"

$$\int_0^1 |x(\xi+\tau)-x(\xi-\tau)|\,.\,|w(\tau)|\,.\,d\tau$$

die Eigenschaften des unsymmetrischen aufweist, solange man die Modulzeichen behält.

Läßt man sie fort, so läßt sich das Problem teilweise auf die Konvergenzfrage der Fourierentwickelung einer einfach mit $w(\tau)$ verknüpften Funktion zurückführen.

Der Spezialfall des § 4 $w(\tau)=\dfrac{1}{\tau}$ ist der Gegenstand eines im J. 1923 von Herrn Besikovitch an den Verfasser gerichteten Briefes; es wird daselbst eine beschränkte Funktion $x(\tau)$ angegeben, die den symmetrischen Ausdruck mit Modulzeichen fast überall unendlich macht. Läßt man die Modulzeichen weg, so bekommt man

$$y(\xi)=\int_0^1\frac{x(\xi+\tau)-x(\xi-\tau)}{\tau}\,d\tau,$$

von welchem Ausdruck Herr Lusin gezeigt hat, daß er, als $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1$ verstanden, bei quadratisch integrierbarem $x(\tau)$ fast überall existiert[3]); es ist auch — wie Herr Besikovitch beweist [4]) — dann

$$\int_0^1 y^2(\xi)\,d\xi \leq 2\pi^2 \int_0^1 x^2(\xi)\,d\xi.$$

Im § 5 beweisen wir nun — mit Hilfe eines anderen Hilfssatzes aus der Funktionalanalysis als der in §§ 1—4 gebrauchte, — daß das Integral noch in einem anderen Sinne existiert und ersetzen $2\pi^2$ durch eine Konstante, die nicht mehr verkleinert werden kann.

Im § 6 werden einige mit unserem Thema zusammenhängende, nicht gelöste Fragen aufgestellt.

Es wird durchweg das Lebesgue'sche Integral verwendet; „integrierbar" heißt also „absolut nach L. integrierbar" solange nicht eine Modifikation angezeigt wird. „Gleichheit zweier messbarer Funktionen" bedeutet soviel als Gleichheit fast überall d. h. abgesehen von einer Nullmenge. „Nullmenge" bedeutet eine Menge vom Lebesgue'schen Maße Null.

§ 1. Definitionen und das Saks'sche Lemma.

1. Der B-Raum.

Wir nennen — mit Herrn Fréchet — einen Banach'schen *Raum*, kurz einen B-Raum eine abstrakte Menge E mit folgenden Eigenschaften:

I. In E ist eine eindeutige, immer mögliche *Addition* erklärt; ihr gegenüber ist ein *Element* Θ indifferent, spielt also die Rolle der *Null*: $a + \Theta = a$. Außerdem ist die *Multiplikation* von E-Elementen durch reelle Zahlen stets eindeutig und möglich. Diese beiden Spezies gehorchen den gewöhnlichen algebraischen Regeln; die Bezeichnung $-a$ bedeutet soviel wie $(-1) \times a$.

II. Einem jeden Element e von E entspricht eine nichtnegative Zahl, die *Norm* von e, in Zeichen $\|e\|$. Es ist $\|e\| = 1$ für gewisse e und $\|e\| = 0$ nur für $e = \Theta$. Es ist ferner

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

und für reelle λ

$$\|\lambda e\| = |\lambda| . \|e\|$$

[3]) Comptes Rendus, vol. CLVI (1913), p. 1655.

[4]) Sur la nature des fonctions à carré sommable et des ensembles mesurables. Fundamenta Mathematicae, IV (1924), pp. 172—195.

III. Definiert man die *Konvergenz* einer Folge $\{e_n\}$ durch

$$\lim_{p \geqq q \to \infty} \|e_p - e_q\| = 0$$

und die *Grenze* e einer Folge $\{e_n\}$ durch

$$\lim_{n \to \infty} \|e - e_n\| = 0,$$

so wird postuliert (Cauchy'sches Postulat): *Eine konvergente Folge hat immer eine Grenze.* Hat $\{e_n\}$ e zur Grenze, so schreiben wir $e_n \to e$ oder

$$\mathrm{Lim}\; e_n = e,$$

während wir das mit kleinem l geschriebene lim-Zeichen für gewöhnliche Konvergenz reservieren.

Wir werden die gewöhnliche reelle Variable mit griechischen kleinen Buchstaben bezeichnen. Die Elemente („*Punkte*") der abstrakten Mengen (des Funktionen-„*Raumes*") werden mit kleinen lateinischen Buchstaben versehen [5]).

2. Lineare und quasilineare Operationen.

Wir werden uns mit einer gewissen speziellen Art von *Funktionaloperationen* zu befassen haben. Sie entstehen, wenn man einem jeden Element x eines B-Raumes ein $y = F(x)$ zuordnet; dabei ist $y = y(\tau)$ eine messbare Funktion der reellen Variabeln τ; (es ist also y ein Element der (abstrakten) Menge aller meßbaren Funktionen — nichtdestoweniger ist $y(\tau)$ für jedes bestimmte τ eine reelle Zahl).

Wir werden sagen, eine Funktionaloperation $y = F(x)$ sei *stetig* in B, wenn aus

$$\mathrm{Lim}_{q \to \infty}\, x_q = x_0$$

stets

$$\mathrm{Lim}_{q \to \infty}\, F(x_q) = F(x_0)$$

folgt. Nun hat vorlaüfig die letztgeschriebene Beziehung keinen Sinn; wir wollen sie folgendermaßen verstehen.

Setzt man $F(x_q) = y_q$, $F(x_0) = y_0$ so soll die Beziehung bedeuten, daß die Folge $\{y_q(\tau)\}$ gegen $y_0(\tau)$ *asymptotisch* konvergiert.

[5]) Doch wird davon manchmal abgewichen, wo Mißverständnisse nicht zu befürchten sind.

Die *asymptotische Konvergenz* einer Folge $y_q(\tau)$ gegen $y_0(\tau)$ in einem endlichen Intervall $\varDelta$ oder in einer beschränkten τ-Punktmenge $\varDelta$ findet dann und nur dann statt, wenn man zu einem jeden positiven ε ein positives $\eta(\varepsilon)$ finden kann, so daß für $q > \eta(\varepsilon)$ die Ungleichung

$$|y_q(\tau) - y_0(\tau)| < \varepsilon$$

in $\varDelta$ nach Ausschluß einer (von ε und q abhängigen) τ-Punktmenge gilt, deren Maß unter ε bleibt. (Sollte $\varDelta$ unbeschränkt sein, so heißt die asymptotische Konvergenz in $\varDelta$ soviel als asymptotische Konvergenz in jedem beschränkten Teil von $\varDelta$).

$F(x)$ heißt *additiv*, wenn für jedes Elementenpaar x', x'' aus B,

$$F(x' + x'') = F(x') + F(x''),$$

homogen, wenn

$$F(\lambda x) = \lambda F(x)$$

für jedes reelle λ und jedes x aus B gilt.

Schwächt man diese Bedingungen, wie folgt, ab:

$$|F(x' + x'')| \leqslant |F(x')| + |F(x'')|$$
$$|F(\lambda x)| \leqslant |\lambda| . |F(x)|,$$

so bekommt man eine *quasiadditive* bzw. eine *quasihomogene* Funktionaloperation.

Eine additive, homogene und stetige Funktionaloperation nennen wir — mit J. Hadamard[6]) — *linear*. Eine quasiadditive, quasihomogene und stetige Operation soll *quasilinear* genannt werden.

3. *Das Lemma.*

Voraussetzung. Es sei $\{F_n(x)\}$ eine Folge von linearen oder auch bloß quasilinearen Operationen. Sie seien alle in demselben B-Raum erklärt und ihre „Werte" $y = F_n(x)$ seien sämtlich auf der τ-Punktmenge $\varDelta$ erklärte, messbare Funktionen $y(\tau)$. ($\varDelta$ sei — wie immer — messbar).

(V) Für alle x^* einer gewissen Teilmenge B^* von B, die in B überall dicht ist, existiere im gewöhnlichen Sinne

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x^*) = F_\infty(x^*)$$

fast überall auf $\varDelta$.

[6]) Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris, 136 (1903) pp. 351—354 (zitiert nach der Encyclopédie des Sc. Math. éd. fr., tome II, vol. 5, fasc 1., II 20, Fußnote nr. 111).

Behauptung. $\varDelta$ zerfällt in zwei meßbare Punktmengen $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ und B zerfällt in zwei abstrakte Mengen B_1 und B_2; B_1 ist in B von der ersten, B_2 von der zweiten Kategorie und für ein jedes x in B existiert im gewöhnlichen Sinne

$$\lim F_n(x) = F_\infty(x)$$

fast überall auf $\varDelta_1$ und die dadurch erklärte Funktionaloperation $F_\infty(x)$ [deren „Werte" bloß auf $\varDelta_1$ erklärte $y(\tau)$ sind] ist in ganz B stetig, während andererseits für sämtliche x in B_2

$$\lim \sup |F_n(x)| = +\infty$$

fast überall in $\varDelta_2$ gilt.

Der Beweis für lineare Operationen ist in der zitierten Arbeit des Herrn Saks zu finden[7]). Da dort aber durchweg bloß von der Konsequenz der Linearität:

$$|F(\lambda x' + \mu x'')| \leqslant |\lambda| . |F(x')| + |\mu| . |(Fx')|$$

Gebrauch gemacht wird, die augenscheinlich auch für *quasilineare* Operationen erfüllt ist, ist unsere Erweiterung auf solche Operationen gerechtfertigt.

§ 2. Nichtdifferenzierbare Funktionen mit vorgeschriebenem Stetigkeitsgrad.

1. Ist für eine Funktion $f(\tau)$ der reellen Variablen τ die Lipschitz'sche Bedingung

(1) $$|f(\tau + \omega) - f(\tau)| \leqslant \varkappa |\omega| \qquad (\tau), \; |\omega| \leqslant \eta$$

gültig, wobei $\varkappa$ eine von τ und ω unabhängige Konstante bedeutet und die Ungleichung für jedes τ (und für jedes ω, welches absolut ein von τ unabhängiges η nicht überschreitet) erfüllt, so ist bekanntlich $f(\tau)$ fast überall endlich differenzierbar.

Schreibt man nun eine allgemeinere Ungleichung vor:

(2) $$|f(\tau + \omega) - f(\tau)| \leqslant \varphi(|\omega|), \qquad (\tau)$$

so zeigt folgende einfache Überlegung des Herrn H. Auerbach[8]), daß sie mit der Beziehung

$$\lim_{\omega \to \infty 0} \inf \frac{\varphi(|\omega|)}{|\omega|} = \text{endlich}$$

zusammen wieder (1) impliziert.

[7]) loc. cit. pp. 188—193.
[8]) unpubliziert; hier dargestellt mit Zustimmung des Verfassers.

Diese Überlegung verläuft wie folgt:

Ist
$$\liminf_{\omega\to\infty} \frac{\varphi(|\omega|)}{|\omega|} = \alpha \geqslant 0,$$
so ist für eine Folge $\{\omega_n\}$, deren Terme ohne Einschränkung der Allgemeinheit positiv vorausgesetzt werden,
$$\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{f(\tau+\omega_n)-f(\tau)}{\omega_n}\right| = \beta \leqslant \alpha, \quad \beta \geqslant 0 \qquad (\tau)$$
Daraus folgt für die rechtsseitige untere Derivierte $D_+ f(\tau)$
$$D_+ f(\tau) \leqslant \beta,$$
— denn sonst wäre D_+ also auch D^+ und $\liminf\left|\frac{f(\tau+\omega_n)-f(\tau)}{\omega_n}\right|$ größer als β. Ebenso folgt
$$D^+ f(\tau) \geqslant -\beta.$$

Nach einem Satz von Dini[9]) sind aber die oberen und unteren Grenzen die gleichen für alle vier Derivierten und für den Differenzenquotienten in einem Intervall; es ist also
$$\left|D^{\pm}_{\pm} f(\tau)\right| \leqslant \beta$$
und
$$\left|\frac{f(\tau+\omega)-f(\tau)}{\omega}\right| \leqslant \beta, \qquad (\tau) \qquad (\omega \neq 0)$$
was bereits (1) mit $\varkappa = \beta$ ergibt.

Soll also eine Funktion $f(\tau)$ einer Bedingung (2) genügen, ohne fast überall differenzierbar zu sein, so muß zunächst in (2)

(3) $$\varphi(|\omega|) = |\omega| . \lambda(|\omega|) \qquad (\omega \neq 0)$$

mit

(4) $$\lim_{\substack{\omega\to 0\\ \omega\neq 0}} \lambda(|\omega|) = +\infty$$

angenommen werden. Daher ist auch $\lambda(|\omega|) \geqslant 1$ für $0 < |\omega| < \eta$, wo η eine passende positive Zahl ist. Wir werden folgendes beweisen.

Satz. Ist $\varphi(\omega)$ eine nichtnegative Funktion von der Gestalt (3) mit (4), so gibt es durchweg stetige Funktionen, die der Bedingung (2) genügen (und zwar für jedes ω des Bereiches $0 < |\omega| < \eta$, wo η die eben erwähnte Zahl ist) und dennoch fast überall nichtdifferenzierbar sind.

[9]) Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen Größe, Leipzig, Teubner, 1892. Elftes Kapitel, § 146, pp. 262–4. (Die italienische Urausgabe ist vom 1878).

2. Beweis. Dieser Beweis weicht von den sonst in dieser Arbeit vorkommenden analogen Überlegungen insofern ab, als man die überall dichte Teilmenge B^* der Voraussetzung des Lemmas zuerst angibt und sie dann zu B abschließt. Herr Banach war es, der diesen Umweg fand, so daß er als Mitverfasser des obigen Satzes anzusehen ist.

Erster Schritt. Wir konstruieren die Menge B^*_λ aller endlichen trigonometrischen Polynome
$$x^*(\tau) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \cos \nu_i \tau + \beta_i \sin \nu_i \tau),$$
wo α_i, β_i reelle Koëffizienten, ν_i ganz rational sind und schließen sie zu B_λ ab, indem wir alle x_∞ hinzufügen, die als
$$x_\infty = \operatorname{Lim} x^*_q$$
darstellbar sind, wobei $\{x^*_q\}$ aus B^*_λ - Elementen besteht.

Nun ist das das Zeichen „Lim" erst nach Einführung einer Norm verständlich; wir wollen diese wie folgt erklären:

(5) $$\|x\| = \text{Obere Grenze von } \frac{|x(\tau+\omega)-x(\tau)|}{\varphi(|\omega|)} + \operatorname{Max}|x(\tau)|,$$

wo die obere Grenze sich auf den Bereich „$0 < |\omega| \leqslant \eta$, τ beliebig", das Maximum aber auf „τ beliebig" bezieht.

Diese Norm ist für ein $x = x^*$ sicher endlich, denn für $0 < |\omega| \leqslant \eta$ ist
$$\frac{|x(\tau+\omega)-x(\tau)|}{\varphi(|\omega|)} \leqslant \frac{|x(\tau+\omega)-x(\tau)|}{|\omega|},$$
die x^* aber differenzierbar sind; da sie stetig-periodisch sind, so ist auch $\operatorname{Max}|x^*|$ endlich.

Für die Haüfungspunkte x von B^*_λ impliziert ihre Definition eine (endliche) Norm: es bedeutet nämlich $x = \operatorname{Lim}_{q\to\infty} x^*_q$ nichts anderes als
$$\lim_{q\to\infty} \|x - x^*_q\| = 0,$$
es muß also $x - x^*_q$ eine Norm haben; nun hatte x^*_q ja eine und unsere Erklärung (5) ist derart, daß $\|a+b\|$ immer einen endlichen Wert hat, sobald dies für $\|a\|$ und $\|b\|$ zutrifft.

Das Postulat III des § 1 muß erst noch nachgeprüft werden: Es sei

(6) $$\mathit{lim}_{\substack{p\\ q}\,\}\to\infty} \|x_p - x_q\| = 0;$$

es folgt

$$\lim_{\substack{p \\ q}\}\to\infty} \operatorname{Max} |x_p(\tau) - x_q(\tau)| = 0,$$

also die gleichmäßige Konvergenz von $x_p(\tau)$ gegen eine Funktion $x_\infty(\tau)$ d. h,

$$\lim_{p\to\infty} \operatorname{Max} |x_\infty(\tau) - x_p(\tau)| = 0. \tag{7}$$

Nach (6) ist nun für $p,\ q > N(\varepsilon),\ \varepsilon > 0$:

$$\underset{(\tau),\ 0 < |\omega| \leqslant \eta}{\text{Obere Grenze von}} \frac{1}{\varphi(|\omega|)} \cdot |x_p(\tau+\omega) - x_q(\tau+\omega) - x_p(\tau) + x_q(\tau)| < \varepsilon. \tag{8}$$

Wäre nun für ein gewisses $q_0 > N(\varepsilon)$.

$$\text{O. G. v.} \frac{1}{\varphi(|\omega|)} |x_\infty(\tau+\omega) - x_{q_0}(\tau+\omega) - x_\infty(\tau) + x_{q_0}(\tau)| > \varepsilon, \tag{9}$$

so wäre eo ipso für ein τ_0 und ein ω_0 $(0 < |\omega_0| \leqslant \eta)$,

$$\frac{1}{\varphi(|\omega_0|)} |x_\infty(\tau_0+\omega_0) - x_{q_0}(\tau_0+\omega_0) - x_\infty(\tau_0) + x_{q_0}(\tau_0)| > \varepsilon.$$

Wegen $\operatorname{Lim} x_p(\tau_0) = x_\infty(\tau_0)$ kann man in der letztgeschriebenen Ungleichung x_∞ durch x_{p_0} ersetzen, indem man p_0 genügend groß wählt. Wählt man es aber größer als $N(\varepsilon)$, so bekommt man einem Widerspruch mit (8). Also ist (9) zu verneinen, was einer Limesbeziehung gleichkommt. Diese mit (7) ergibt

$$\lim_{p\to\infty} \| x_\infty - x_p \| = 0 \quad \text{oder} \quad \operatorname*{Lim}_{p\to\infty} = x_\infty.$$

Es bleibt noch zu beweisen, daß x_∞ zu B_λ gehört. Nun ist ohne weiteres ersichtlich, daß die Norm (5) die Ungleichung des Postulates II des § 1 erfüllt. Diese erlaubt sofort zu schließen, daß ein Haüfungspunkt von Haüfungspunkten einer Menge selbst Haüfungspunkt der Menge ist. Nun besteht B_λ aus B_λ^* und dessen Haüfungspunkten, ist also abgeschlossen. Aus $x_\infty = \operatorname*{Lim}_{p\to\infty} x_p$ folgt jetzt, daß x_∞ zu B_λ gehört.

Wenn man noch die Addition $\oplus$ und Multiplikation $\otimes$ wie folgt erklärt:

$$x \oplus y = x(\tau) + y(\tau), \qquad \varkappa \otimes x = \varkappa x(\tau),$$

für Θ aber die identische Null nimmt, so sind alle Postulate erfüllt. Alle zu B_λ gehörigen $x(\tau)$ sind als Grenzwerte von gleichmäßig konvergenten $x^*(\tau)$—Folgen stetig-periodisch.

Aus der Endlichkeit der Norm folgt für alle x in B_λ:

$$|x(\tau+\omega) - x(\tau)| \leqslant \varkappa\varphi(|\omega|) = \varkappa|\omega|\lambda(|\omega|) \qquad (\tau) \tag{10}$$

für jedes τ und für $0 < |\omega| \leqslant \eta$; $\varkappa$ ist eine Konstante.

Zweiter Schritt. Das Sachs'sche Lemma soll jetzt auf eine geeignete Folge $\{F_n\}$ von Funktionaloperationen angewendet werden.

Es sei $\{\omega_n\}$ eine beliebige gegen Null konvergierende, reelle Folge und alle $\omega_n \neq 0$. Dann ist

$$F_n(x) = \frac{x(\tau+\omega_n) - x(\tau)}{\omega_n}$$

für jedes n eine in B_λ erklärte lineare Operation. Die Voraussetzung des Lemmas ist erfüllt, denn B_λ^* ist überall dicht in B_λ und für ein x^* aus B_λ^* existiert sicher

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^*(\tau+\omega_n) - x^*(\tau)}{\omega_n}$$

$\left(= \frac{dx^*(\tau)}{d\tau}\right)$, da die x^* als trigonometrische Polynome differenzierbar sind. Unser Zweck ist jetzt Δ_1 und Δ_2 zu bestimmen. Dazu betrachten wir die spezielle Folge $\{x_q\}$:

$$x_q(\tau) = \frac{\sin q\tau}{q}.$$

Wir behaupten zunächst:

$$\operatorname{Lim} x_q = \Theta. \tag{11}$$

Da offenbar

$$\lim_{q\to\infty} \operatorname{Max} |x_q(\tau)| = 0,$$

bleibt zu beweisen:

$$\lim_{q\to\infty} \left(\underset{(\tau),\ 0 < |\omega| \leqslant \eta}{\text{Obere Grenze von}} \frac{1}{q} \cdot \frac{|\sin q(\tau+\omega) - \sin q\tau|}{|\omega|\lambda(|\omega|)} \right) = 0.$$

Sei q fest; wir unterscheiden zwei Fälle

$$1^0: \quad |\omega| \geqslant \frac{1}{\sqrt{q}}, \qquad 2^0: \quad |\omega| < \frac{1}{\sqrt{q}}.$$

Im ersten Fall ist — da ja $\lambda(|\omega|) \geqslant$ für $|\omega| \leqslant \eta$ —

$$\frac{1}{q} \cdot \frac{|\sin q(\tau+\omega) - \sin q\tau|}{|\omega| \cdot |\lambda(|\omega|)} \leqslant \frac{2}{q \cdot |\omega|} \cdot \leqslant \frac{2}{\sqrt{q}};$$

im zweiten Fall liefert der Mittelwertsatz

$$\frac{1}{q}\cdot\frac{|\sin q(\tau+\omega)-\sin q\tau|}{|\omega|.\lambda(|\omega|)}=\frac{|\cos q(\tau+\vartheta\omega)|}{\lambda(|\omega|)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\lambda(|\omega|)}\qquad(0<\vartheta<1).$$

Da $\lim\limits_{\omega\to\infty}\lambda(|\omega|)=\infty$, können wir q_0 so groß wählen, daß für $|\omega|<\frac{1}{\sqrt{q_0}}$

$$\lambda(|\omega|)>\frac{1}{\varepsilon}$$

sei, und dabei so groß, daß $\frac{2}{\sqrt{q_0}}<\varepsilon$ sei. Dann ist für $q>q_0$ in beiden Fällen

$$\frac{|x_q(\tau+\omega)-x_q(\tau)|}{|\omega|\lambda(|\omega|)}<\varepsilon,$$

also ist auch die obere Grenze dieses Ausdrucks $\leqslant\varepsilon$ für $q>q_0$.

Damit ist (11) bewiesen.

Wir berechnen jetzt

$$(12)\qquad F_\infty(x_q)=\lim_{n\to\infty}F_n(x_q)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_q(\tau+\omega_n)-x_q(\tau)}{\omega_n}=\frac{d\,x(\tau)}{d\tau}=$$

$=\cos q\tau$; ebenso ist

$$(13)\qquad F_\infty(\Theta)=\frac{d\,\Theta}{d\tau}=\Theta \text{ (identisch Null).}$$

Nun ist nach dem Lemma $F_\infty(x)$ in ganz B stetig, wenn man die „Werte“ $y(\tau)=F_\infty(x)$ bloß auf $\varDelta_1$ betrachtet; es folgt also aus (11) und (13)

$$\operatorname{Lim}F_\infty(x_q)=F_\infty(\Theta)=\Theta$$

oder — wegen (12) —

$$\text{asympt.}\lim_{q\to\infty}\cos q\tau=0 \text{ auf } \varDelta_1.$$

Nun kann der *asymptotische* $\lim\cos q\tau$ bloß auf einer Nullmenge Null sein, wie eine elementare Überlegung zeigt, also ist $\varDelta_1$ eine Nullmenge. $\varDelta_2$ ist also die Menge aller reellen Zahlen mit Ausnahme von höchstens einer Nullmenge. Nach dem Schlußsatz des Lemmas gibt es daher eine nichtleere Teilmenge B_2 von der zweiten Kategorie im B_λ-Raum, deren Elemente x die Beziehung

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{x(\tau+\omega_n)-(\tau)}{\omega_n}\right|=+\infty$$

fast überall erfüllen.

Da die x zu B_λ gehören, sind sie periodisch, stetig und erfüllen die Ungleichung (10). Die Konstante $\varkappa$ hängt von τ nicht ab; die Funktionen

$$\bar{x}(\tau)=\frac{x(\tau)}{\varkappa}$$

erfüllen also die Ungleichung (2) und es ist fast überall

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{\bar{x}(\tau+\omega_n)-\bar{x}(\tau)}{\omega_n}\right|=+\infty.$$

Es wurde also mehr bewiesen, als der Satz aussagt; dieses sieht man am besten im folgenden Fall, wo der Beweis einfacher verläuft.

3. *Stetige, nichtdifferenzierbare Funktionen.*

Baut man den B-Raum aus allen stetigen Funktionen von der Periode 2π auf und definiert die Norm $\|x\|$ als

$$\|x\|=\operatorname*{Max}_{(\tau)}|x(\tau)|$$

› bilden die trigonometrischen Polynome $x^*(\tau)$ in B eine überl-dichte Teilmenge B^*. Ist $\{\omega_n\}$ und $\{F\}$ so definiert, wie üher, so gibt die Anwendung des Lemmas folgendes Re-ultat:

„Für eine beliebige gegen Null konvergente Folge $\{\omega_n\}$ wobei $\omega_n\neq 0$) gibt es stetige, periodische Funktionen, für welche

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{x(\tau+\omega_n)-x(\tau)}{\omega_n}\right|=\infty$$

für fast alle τ ist. Diese $x(\tau)$ bilden im Raume der stetig-periodischen Funktionen bei gewöhnlicher Definition der Norm (also als Maximum in $<0\,2\pi>$) eine Menge von der zweiten Kategorie, während die Komplementärmenge von der ersten Kategorie ist“.

Diese Formulierung läßt den Unterschied unserer Resultate und der auf direktem Wege gewonnenen hervortreten.

§ 3. Der unsymmetrische Ausdruck

$$\int_0^1 |[f(\xi+\tau)-f(\xi)]\,\omega(\tau)\,|\,d\tau.$$

1. Die sogenannte Dini'sche hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Fourier-Entwickelung von $f(\sigma)$ an der Stelle $\sigma=\xi$ besteht in der Endlichkeit des Ausdruckes

$$\int_0^1 \left|\frac{f(\xi+\tau)-f(\xi)}{\tau}\right| d\tau. \tag{14}$$

Dieses veranlasste die Frage ob dieser Ausdruck — etwa für stetige $f(\xi)$ — überhaupt durchweg (oder fast durchweg) unendlich sein könnte. Ein Beispiel dafür (mit der Abschwächung „fast") gab Lusin [10]).

Wir wollen hier an Stelle von $\frac{1}{\tau}$ eine allgemeine Funktion $w(\tau)$ einführen und fragen nach hinreichenden und notwendigen Bedingungen für $w(\tau)$, damit der Ausdruck

$$\int_0^1 |f(\xi+\tau)-f(\xi)|\,.\,|w(\tau)|\,.\,d\tau \tag{15}$$

für entsprechend gewählte stetige $f(\xi)$ den Wert Unendlich für fast alle ξ anzunehmen fähig sei.

Wir verlangen also, daß für diese ξ das Lebesgue'sche Integral

$$\int_\varepsilon^1 |f(\xi+\tau)-f(\xi)|\,.\,|w(\tau)|\,.\,d\tau \tag{16}$$

bestimmt und endlich ausfällt, solange $0<\varepsilon<1$, daß aber

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 = +\infty$$

sei.

---

[10]) In einem Brief des Hernn Besikovitch an der Verfasser wird eine beschränkte Funktion dieser Art konstruiert und Lusin als derjenige erwähnt, der die Existenz solcher Funktionen behauptet hätte. Der Brief ist vom 11. 2. 1923.

Die notwendigen Bedingungen ergeben sich leicht. Da bloß $|w(\tau)|$ vorkommt, schreiben wir $w(\tau)$ anstatt $|w(\tau)|$ und $w(\tau)$ muss nichtnegativ sein.

Nun muß aber $w(\tau)$ in jedem Intervall $<\varepsilon, 1>$ integrierbar sein, sobald $0<\varepsilon<1$. Denn sonst müßte die stetige Funktion $f(\xi+\tau)-f(\xi)$ in einer gewissen τ-Menge T vom positiven Maße verschwinden, damit (16) einen Sinn habe. Gehörte also τ_0 zu T, so müßte

$$f(\xi+\tau_0)-f(\xi)=0$$

sein für fast alle ξ, also — wegen der Stetigkeit — für alle ξ. Es hätte also $f(\xi)$ τ_0 zur Periode und somit alle τ der T-Menge zu Perioden und wäre *konstant*.

Dann aber könnte (15) nicht unendlich sein.

Ferner muß $\int_0^1 w(\tau)\,d\tau=\infty$ sein, denn sonst wäre für stetige $f(\xi)$ (15) immer endlich.

2. Diese *notwendigen* Bedingungen sind — wie wir jetzt behaupten — bereits auch *hinreichend*. Es gilt also folgender.

Satz. Ist $w(\tau)$ eine nichtnegative, in $<0\,1>$ erklärte Funktion, für welche das Lebesgue'sche Integral

$$\int_\varepsilon^1 w(\tau)\,d\tau$$

endlich, falls $0<\varepsilon<1$, aber unendlich für $\varepsilon=0$ wird, so gibt es durchweg stetige Funktionen $f(\xi)$ derart daß

$$\int_0^1 |f(\xi+\tau)-f(\xi)|\,w(\tau)\,d\tau=+\infty \tag{17}$$

für fast alle reellen ξ ausfällt.

3. ***Beweis.*** Ist $\int_0^1 \tau\, w(\tau)\,d\tau=\infty$, so wird der Satz trivial, denn $f(\xi)=\xi$ liefert dann die stetige Funktion der Behauptung. Wir dürfen uns daher auf den Fall

$$\int_0^1 \tau\, w(\tau)\,d\tau=\text{endlich} \tag{18}$$

beschränken.

Wir nehmen dieses Mal als B-Raum die Gesammtheit aller ungeraden, stetigen, in 0 und 1 verschwindenden Funktionen $x(\tau)$ von der Periode zwei, definieren $\|x\|$ als das Maximum von $|x(\tau)|$ und erklären die Spezies und Θ, wie in früheren §§.

Wir definieren folgende Operation

$$F_n(x) = \int_{\varepsilon_n}^{1} [x(\xi+\tau) - x(\xi)]\, w(\tau)\, d\tau; \tag{19}$$

dabei ist $0 < \varepsilon_n < 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Die Additivität und Homogenität von F_n ist unmittelbar klar. Was die *Stetigkeit* anbelangt, so ist

$$|F_n(x_q) - F_n(x)| \leqslant \int_{\varepsilon_n}^{1} w(\tau)\, d\tau \,.\, 2\|x_q - x\|;$$

ist also

$$x = \operatorname*{Lim}_{q\to\infty} x_q$$

so konvergiert $F_n(x_q)$ gegen $F(x)$ — als Funktion von ξ betrachtet — *gleichmäßig* also a fortiori *asymptotisch*.

Um das Lemma anwenden zu können, konstruieren wir als B^*-Menge alle Polynome

$$p_k(\tau) = \sum_{q=1}^{q=k} \alpha_q \sin q\pi\tau$$

mitt reellen, konstanten Koeffizienten α_q. B^* ist in B überall dicht, wie die Theorie der trigonometrischen Approximation lehrt.

Um zu zeigen, daß

$$\lim_{n\to\infty} F_n(p_k)$$

existiert, genügt es diese Existenz für $p_k = \sin q\pi\tau$ zu beweisen. Wir werden den

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\sin q\pi\tau)$$

hinschreiben:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\sin q\pi\tau) = \int_0^1 [\sin q\pi(\tau+\xi) - \sin q\pi\xi]\, w(\tau)\, d\tau =$$

$$= \cos q\pi\xi \,.\int_0^1 w(\tau) \sin q\pi\tau \,.\, d\tau - 2\sin q\pi\xi \int_0^1 w(\tau) \sin^2 \frac{q\pi\tau}{2}\, d\tau,$$

und die beiden Integrale $\int_0^1$ sind endlich, da wir uns im Falle (18) befinden, die Funktionen $\sin q\pi\tau$, $\sin^2 \frac{q\pi\tau}{2}$ aber — dem Betrage nach — $q\pi\tau$ nicht übertreffen.

Wir setzen

$$\int_0^1 w(\tau) \sin^2 \frac{q\pi\tau}{2}\, d\tau = \beta_q$$

und werden zeigen, daß

$$\lim \beta_q = \infty$$

ist. Es ist nämlich

$$\lim_{q\to\infty} \int_\varepsilon^1 w(\tau) \sin^2 \frac{q\pi\tau}{2}\, d\tau = \frac{1}{2} \int_\varepsilon^1 w(\tau)\, d\tau, \qquad (0 < \varepsilon < 1) \tag{20}$$

(was wir gleich begründen werden) und infolgedessen ist, — wenn man $w(\tau) \geqslant 0$ beachtet —

$$\liminf_{q\to\infty} \beta_q \geqslant \frac{1}{2} \int_\varepsilon^1 w(\tau)\, d\tau,$$

was mit $\int_0^1 w(\tau)\, d\tau = \infty$ bereits $\beta_q \to \infty$ ergibt.

Die Begründung von (20) verläuft wie folgt: $w(\tau)$ ist in $<\varepsilon, 1>$ integrierbar und man hat ohne weiteres

$$\int_\varepsilon^1 w(\tau) \sin^2 \frac{q\pi\tau}{2}\, d\tau = \int_0^1 w(\tau)\, \frac{1 - \cos q\pi\tau}{2}\, d\tau \to \frac{1}{2} \int_\varepsilon^1 w(\tau)\, d\tau.$$

Aus $\beta_q \to \infty$ folgt

$$\beta_q > 0$$

für $q > q_0$ und

$$x_q(\tau) = \frac{\sin q\pi\tau}{\beta_q} \qquad (q > q_0)$$

konvergiert gleichmäßig gegen Null für $q \to \infty$; m. a. W.:

$$\operatorname{Lim} x_q = \Theta$$

Bezeichnen wir wieder mit $F_\infty(x)$ den

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)$$

(für diese x, für welche er existiert). Es ist:

$$(21) \qquad F_{\infty}(x) = \int_0^1 [x(\xi + \tau) - x(\xi)]\, w(\tau)\, d\tau.$$

Wir wenden jetzt das Lemma an. $F_{\infty}(x)$ ist für alle x stetig in Bezug auf $\varDelta_1$. Da $x_q \to \Theta$, muß

$$\operatorname*{Lim}_{q \to \infty} F_{\infty}(x_q) = F(\Theta) = \Theta$$

sein — in Bezug auf $\varDelta_1$. Nun ist

$$F_{\infty}(x_q) = \frac{\cos q\pi\xi}{\beta_q} \int_0^1 w(\tau) \sin q\pi\tau \,.\, d\tau - 2 \sin q\pi\xi$$

und dieser Ausdruck muß als Funktion von ξ betrachtet auf $\varDelta_1$ asymptotisch gegen Null konvergieren für $q \to \infty$. Schreibt man γ_q für

$$\frac{1}{\beta_q} \int_0^1 w(\tau) \sin q\pi\tau \,.\, d\tau,$$

so ist zu untersuchen, auf welcher ξ-Punktmenge $\varDelta_1$ die asymptotische Konvergenz gegen Null von

$$\gamma_q \cos q\pi\xi - 2 \sin q\pi\xi \qquad (q \to \infty)$$

stattfinden kann. Man sieht leicht, daß — wie auch $\{\gamma_q\}$ beschaffen sei — dieses nur auf einer Nullmenge geschehen kann. (Um den Beweisgang vom Hauptziel nicht abzulenken, wird die Begründung auf den Schluß dieses § verlegt). Es ist also wieder $\varDelta_1$ eine Nullmenge.

Genau wie im vorigen § ist jetzt der zweite Teil der Behauptung des Lemmas zu verwerten und ergibt zunächst folgendes:

„Für jedes vorgegebene $w(\tau) > 0$, welches in $< \varepsilon\, 1 >$ $(0 < \varepsilon < 1)$ aber nicht in $< 0\, 1 >$ integrierbar ist und für jede vorgegebene Folge $\{\varepsilon_n\}$ mit der Eigenschaft:

$$0 < \varepsilon_n < 1, \quad \varepsilon_n \to 0,$$

gibt es stetige Funktionen $x(\tau)$ derart daß für fast alle reellen ξ

$$(22) \qquad \limsup_{n \to \infty} \left| \int_{\varepsilon_n}^1 [x(\xi + \tau) - x(\xi)]\, w(\tau)\, d\tau \right| = +\infty$$

ausfällt“.

Das ist bereits mehr als der Satz in (17) aussagt und liefert sogar im Falle $w(\tau) = \frac{1}{\tau}$ — wo Lusin den Satz beweisen konnte — etwas neues, denn wir haben gezeigt, daß das Integral

$$\int_0^1 [f(\xi + \tau) - f(\xi)]\, w(\tau)\, d\tau$$

für gewisse stetigen $f(\tau)$ und für fast alle ξ nicht einmal *bedingt* zu konvergieren braucht.

4. Was die Menge B_2 der Funktionen $x(\tau)$ von der Eigenschaft (22) in dem von uns in diesem § definierten B-Raum betriff, so zeigt das Lemma in dem Fall (18), daß B_2 von der zweiten Kategorie, die Komplementärmenge B_1 von der ersten ist.

Im Falle

$$(23) \qquad \int_0^1 \tau\, w(\tau)\, d\tau = \infty,$$

ist die Funktion

$$(24) \qquad \begin{array}{lll} x(\tau) = & \tau & 0 \leqslant \tau \leqslant 1 \\ x(\tau) = & 2 - \tau & 1 \leqslant \tau \leqslant 2, \end{array}$$

die man für alle τ so fortsetzt, daß die Periode zwei auftritt, ein Element unseres B-Raumes. Sie hat offenbar die Eigenschaft (22). Das Lemma lehrt aber, daß $F_{\infty}(x)$ für alle x in B einen „Wert“ $y(\xi)$ hat, welcher für $\xi \varepsilon \varDelta_1$ bestimmt ist. Setzt man aber in (21) das $x(\tau)$ aus (24) ein, so lehrt (23), daß $F_{\infty}(x)$ höchstens für ganzzahlige ξ endlich sein könnte. Es ist also $\varDelta_1$ abzählbar, also wieder eine Nullmenge. Man braucht die Fälle (18) und (23) also nicht mehr zu unterscheiden.

Man kann noch einem Schritt weiter gehen: Es sei $\{w_j\}$ $(j = 1, 2, 3\ldots)$ eine Folge von Funktionen $w(\tau)$ der in 1. beschriebenen Art. (Man möge sie z. B. so definieren, daß die Singularität in der Nähe von 0 unbegrenzt abgeschwächt wird mit wachsendem j). Die Folge $\{\varepsilon_n\}$ sei gewählt. Wir wissen bereits, daß für jedes $w = w_j(\tau)$ ein $x = x_j(\tau)$ existiert, für welches (22) gilt. Für jedes $w_j(\tau)$ existiert im Raume B (der für alle j derselbe ist) eine Teilmenge $B_1^{(j)}$ zusammengesetzt aus allen Elementen x die — für das betrachtete $w_j(\tau)$ — (22) nicht erfüllen. Da $B_1^{(}$ von der ersten Kategorie ist, so ist

$$\sum_{j=1}^{\infty} B_1^{(j)}$$

wieder eine Menge B_1 von der ersten Kategorie. Die Komplementärmenge $B - B_1 = B_2$ ist also eine nichtleere Menge von der zweiten Kategorie in B. Für alle $x(\tau)$ aus B_2 gilt (22) *simultan* für $w(\tau) = w_j(\tau)$ bei *allen* j. (Das die Nullmenge der ξ wo (22) nicht gilt, bei einem solchen $x(\tau)$ dennoch mit j variiert, macht nichts aus, denn die Summe dieser Nullmengen ist wieder eine Nullmenge und man braucht nur diese in der Aussage zu beachten).

5. Wir haben noch den Beweis nachzutragen, daß die Folge

$$\{\gamma_q \cos q\pi\xi - 2\sin q\pi\xi\} \tag{25}$$

für $q \to \infty$ höchstens auf einer ξ-Punktmenge vom Maße Null gegen die identische Null asymptotisch konvergieren kann. Es ist aber

$$\gamma_q \cos q\pi\xi - 2\sin q\pi\xi = \sqrt{\gamma_q^2 + 4}\,.\left[\frac{\gamma_q}{\sqrt{\gamma_q^2+4}}\cos q\pi\xi - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{\sqrt{\gamma_q^2+4}}\sin q\pi\xi\right] = \sqrt{\gamma_q^2+4}\,.\cos q\pi(\xi - \sigma_b)$$

bei passend gewähltem σ_q.

Nun hat augenscheinlich die Folge $\{\cos q\pi(\xi - \sigma_q)\}$ die Eigenschaft, die für die Folge (25) zu beweisen ist; diese Eigenschaft bleibt aber erhalten, wenn man alle Terme absolut vergrößert, indem man sie mit $\sqrt{\gamma_q^2 + 4} \geqslant 2$ multipliziert.

§ 4. Der symmetrische Ausdruck

$$\int_0^1 [f(\xi+\tau) - f(\xi-\tau)]\,\omega(\tau)\,d\tau.$$

1. Wenn wir die Analogie mit dem vorigen § verfolgen und als lineare Funktionaloperationen

$$F_n(x) = \int_{\varepsilon_n}^1 [x(\xi+\tau) - x(\xi-\tau)]\,w(\tau)\,d\tau$$

einführen, so zeigt sich bereits im Spezialfalle $w(\tau) = \frac{1}{\tau}$ ein Un-

terschied, dessen Tragweite unsere Methode abzuschätzen lehrt. Berechnen wir — wie früher —

$$F_\infty(\sin q\pi\tau) = \int_0^1 [\sin q\pi(\xi+\tau) - \sin q\pi(\xi-\tau)]\,d\tau =$$
$$= 2\cos q\pi\xi\,.\int_0^1 \frac{\sin q\pi\tau}{\tau}\,d\tau$$

...und der Grenzwert des Integrals für große q ist nicht mehr unendlich, wie früher, sondern $\frac{\pi}{2}$. [Diese Tatsache wird noch später positiv verwertet werden]. Das stört die Analogie und wir müssen unter dem $\int$-Zeichen die absoluten Beträge von Anfang an einführen:

Wir definieren also

$$F_n^*(x) = \int_{\varepsilon_n}^1 |x(\xi+\tau) - x(\xi-\tau)|\,w(\tau)\,d\tau. \tag{26}$$

Diese Operationen sind zwar stetig in dem B-Raum des § 3, aber nicht mehr homogen-additiv, sondern quasihomogen und quasiadditiv, d. h. es ist

$$|F_n^*(\lambda x)| = |\lambda|\,.\,|F_n^*(x)|$$
$$|F_n^*(x' + x'')| \leqslant |F_n(x')| + |F_n(x'')|.$$

Wir haben also eine Folge von quasilinearen Operationen vor uns und können das Lemma anwenden.

Es ist

$$F_n^*(\sin q\pi\tau) = 2|\cos q\pi\xi|\,.\int_{\varepsilon_n}^1 |\sin q\pi\tau|\,w(\tau)\,.\,d\tau$$

und unter denselben Voraussetzungen für $w(\tau)$ wie im § 3 erhält man

$$F_\infty^*(\sin q\pi\tau) = \lim_{n\to\infty} F_n^*(\sin q\pi\tau) = 2|\cos q\pi\xi|\,.\int_0^1 |\sin q\pi\tau|\,.\,w(\tau)\,d\tau.$$

Es ist leicht nachzuprüfen daß F_∞^* d. h. $\lim\limits_{n\to\infty} F_n^*(x)$ existiert, falls man $x = p_k(\tau)$ setzt, wo $p_k(\tau)$ das Sinuspolynom des

§ 3 ist: man hat nur zu beachten, daß dann $|x(\xi+\tau)-x(\xi-\tau)|$ als Funktion von τ eine Lipschitz'sche Bedingung erfüllt und daß (18) noch immer gilt.

Es ist ferner $(0<\varepsilon<1)$

$$\lim_{q\to\infty}\int_\varepsilon^1 |\sin q\pi\tau|\,.\,w(\tau)\,.\,d\tau=\frac{2}{\pi}\int_\varepsilon^1 w(\tau)\,.\,d\tau$$

und daher — da ja $\int_0^1 w(\tau)\,d\tau$ unendlich ist —

$$\lim_{q\to\infty}\int_0^1 |\sin q\pi\tau|\,.\,w(\tau)\,d\tau=\infty\,.$$

Setzt man also

$$\delta_q=1:\int_0^1 |\sin q\pi\tau|\,.\,w(\tau)\,d\tau$$

$$x_q=\delta_q\,.\,\sin q\pi\tau,$$

so ist

$$\operatorname*{Lim}_{q\to\infty} x_q=\Theta$$

und

$$F^*_\infty\;(x_q)=2\,|\cos q\pi\xi\,|.$$

Da letzter Ausdruck für $q\to\infty$ höchstens auf einer Nullmenge gegen id. Null asymptotisch konvergieren kann, so bekommen wir alle Schlüsse, die wir im § 3 gewonnen haben, mit allen Korollaren auch für den symmetrischen, *aber mit den Modulzeichen unter dem* $\int$ versehenen Ausdruck

$$\int_0^1 |f(\xi+\tau)-f(\xi-\tau)|\,w(\tau)\,.\,d\tau.$$

2. Wir wollen jetzt den symmetrischen Ausdruck ohne Modulzeichen

$$\int_0^1 [f(\xi+\tau)-f(\xi-\tau)]\,w(\tau)\,d\tau \tag{27}$$

untersuchen. Wir führen die Funktion $\psi(\tau)$ ein:

$$\psi(\tau)=\tau\,w(\tau).$$

Ist

$$\int_0^1 \psi(\tau)\,d\tau \tag{28}$$

(als $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \psi(\tau)\,d\tau$ verstanden) unbestimmt, so ist schon für $f(\tau)\equiv\tau$ der Ausdruck (27) für alle ξ unbestimmt. Ist aber (28) bestimmt und endlich, so führt unsere Methode auf das Integral

$$\alpha_q=\int_0^1 \frac{\sin q\pi\tau}{\tau}\,\psi(\tau)\,d\tau$$

dessen Verhalten für $q\to\infty$ zu bestimmen ist. Es ist aber

$$\alpha_{q+\frac{1}{2}}=\int_0^1 \frac{\sin\left(q+\frac{1}{2}\right)\pi\tau}{2\sin\frac{\pi\tau}{2}}\,.\,\frac{2\sin\frac{\pi\tau}{2}}{\tau}\,.\,\psi(\tau)\,d\tau=$$

$$=\int_0^\pi \frac{\sin\left(q+\frac{1}{2}\right)\tau}{2\sin\frac{\tau}{2}}\,.\,\frac{2\sin\frac{\tau}{2}}{\tau}\,.\,\psi\left(\frac{\tau}{\pi}\right)d\tau$$

Es ist also $\alpha_{q+\frac{1}{2}}$ — bis auf einen konstanten Faktor — gleich der q-ten Partialsumme der Fourierentwickelung an der Stelle 0 derjenigen geraden Funktion, die in der positiven Hälfte von $\langle -\pi,\pi\rangle$ durch

$$\frac{2\sin\frac{\tau}{2}}{\tau}\,.\,\psi\left(\frac{\tau}{\pi}\right)$$

erklärt ist.

Da der Faktor $\dfrac{2\sin\frac{\tau}{2}}{\tau}$ in der Umgebung von 0 sogar analytisch ist, ist das Verhalten der Fourierreihe so wie das Verhalten der Fourierreihe von

$$\psi\left(\frac{|\tau|}{\pi}\right)$$

Nun gibt es integrierbare $\psi(\tau)$ für welche die Fourierentwickelung von $\psi\left(\frac{|\tau|}{\pi}\right)$ an der Stelle $\tau=0$ Partialsummen vom unendlichen *lim sup* liefert. Für solche ψ ist die bereits zweimal angewandte Methode wieder brauchbar und liefert für jede Fundamentalfolge $\{\varepsilon_n\}$ stetige Funktionen $x(\tau)$, für welche

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left| \int_{\varepsilon_n}^{1} [x(\xi+\tau)-x(\xi-\tau)]\, w(\tau)\, d\tau \right| = +\infty$$

fast überall ist. Über die Menge dieser Funktionen gelten die vom § 3 her bekannten Aussagen.

Es bleibt der Fall zu untersuchen, wo die Fourierentwickelung von $\psi\left(\frac{|\tau|}{\pi}\right)$ beschränkte Partialsummen aufweist.

In diesem Falle ist uns aber nur ein anderes Problem zugänglich, das im folgenden § gestellt und gelöst wird.

§ 5. Die Konvergenz im Durchschnitt bei dem symmetrischen Ausdruck.

1. Es werde vorausgesetzt, das $w(\tau)$ in $<\varepsilon 1>$ immer messbar und beschränkt sei, wen $0<\varepsilon<1$.

Wir wollen noch einmal den Ausdruck (27) behandeln.

Zu diesem Zwecke führen wir folgenden B-Raum ein: Die Gesammtheit aller in $<0 1>$ erklärten, quadratisch integrierbaren Funktionen $x(\tau)$ von τ — (die man nötigenfalls periodisch fortsetzt) — mit der Norm

$$\|x\| = \sqrt{\int_0^1 x^2(\tau)\, d\tau}. \tag{29}$$

Die Funktionaloperationen $F(x)$ sollen jetzt einem x aus B y — e ebenfalls aus B zuordnen: $y=F(x)$. Stetigkeit verlangt jetzt, daß

$$\operatorname*{Lim}_{q\to\infty} x_q = x_0$$

$\operatorname*{Lim}_{q\to\infty} y_q = y_0$ impliziere, wenn $y_j=F(x_j)$ $(j=0, 1, 2\ldots)$ gesetzt wird, und es sollen jetzt die beiden Limites *dieselbe* vermittels der Normdefinition (29) zu erklärende Bedeutung haben.

Wir werden uns jetzt des folgenden allgemeinen **Hilfssatzes** über Folgen $\{F_n(x)\}$ von linearen Funktionaloperationen bedienen:

Ist $\|F_n(x)\| \leqslant \varkappa \|x\|$, wobei $\varkappa$ eine von x und n unabhängige

Konstante ist, und existiert

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} F_n(x) \tag{30}$$

in dem eben erklärten Sinne für alle x einer in B überall dichten Menge B^*,

so ist der Limes (30) in *ganz* B vorhanden und definiert eine lineare Funktionaloperation $F_\infty(x)$ mit der Eigenschaft

$$\|F_\infty(x)\| \leqslant \varkappa \|x\|^{11)}.$$

Wenden wir diesen Satz auf die Folge der linearen Operationen

$$F_n(x) = \int_{\varepsilon_n}^{1} [x(\xi+\tau)-x(\xi-\tau)]\, w(\tau)\, d\tau \qquad \left(\begin{matrix} 0<\varepsilon_n<1 \\ \varepsilon_n\to 1 \end{matrix}\right)$$

an; man beachte, daß die „Werte" von $F_n(x)$ zu B gehören sobald x zu B gehört.

Die Menge der Sinuspolynome:

$$p_k(\tau) = \sum_{q=1}^{q=k} \alpha_q \sin q\pi\tau$$

ist in B überall-dicht. Es ist nun

$$F_n(p_k) = \sum_{q=1}^{q=k} 2\,\alpha_q \cos\pi\nu\xi \,.\int_{\varepsilon_n}^{1} w(\tau) \sin\pi q\tau \,.\, d\tau. \tag{31}$$

Bezeichnen wir

$$\int_{\varepsilon_n}^{1} w(\tau) \sin\pi q\tau\, d\tau$$

mit λ_{nq}, so ist

$$\|p_k\| = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{k} \alpha^2_q}\,,\quad \|F_n(p_k)\| = \sqrt{2\sum_{q=1}^{k} \alpha_q^2 \lambda_{nq}^2}$$

Sind nun die $|\lambda_{nq}|$ *sämmtlich* $\leqslant\lambda$, *so folgt:*

$$\|F_n(p_k)\| \leqslant 2\lambda \|p_k\|$$

und — da die p_k überall dicht liegen —

$$\|F_n(x)\| \leqslant 2\lambda \|x\| \qquad (x).$$

---

11) Denn ist x beliebig und wird x^* aus B^* nahe an x gewählt, d. h $\|x^*-x\|<\varepsilon$, so ist

$$\|F_p(x)-F_q(x)\| \leqslant \|F_p(x^*)-F_q(x^*)\| + \varkappa\varepsilon$$

und — wegen der Konvergenz von $\{F_p(x^*)\}$ — $\leqslant(\varkappa+1)\varepsilon$ für $p\geqslant q>N(\varepsilon)$, was die Konvergenz von $\{F_p(x)\}$ nach sich zieht die Eigenschaft von $F_\infty(x)$ wird jetzt trivial.

Bei festem k existiert aber der $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(p_k)$, wie man aus (31) sofort abliest, denn die Koeffizienten $\int\limits_{\varepsilon_n}^{1}$ konvergieren gegen

$$\int_0^1 w(\tau)\sin\pi q\tau\,d\tau \qquad (q=1,\ 2\ldots k)$$

welches Integral nach Voraussetzung existiert.

Der Hilfssatz kann also angewendet werden und ergibt die Existenz von $F_\infty(x)$ mit der Ungleichung $\|F_\infty(x)\|\leqslant 2\lambda\|x\|$. Damit erhalten wir folgenden

Satz. Ist $w(\tau)$ messbar und, abgesehen von der Nullumgebung, beschränkt, existiert ferner $\int\limits_0^1 \tau w(\tau)\,d\tau$ $\Big($ im Sinne $\lim \int\limits_\varepsilon^1\Big)$ und ist

$$\left|\int_\varepsilon^1 w(\tau).\sin\gamma\tau.d\tau\right|\leqslant\lambda$$

für alle $\gamma>0$, $0<\varepsilon<1$, so stellt bei einer beliebigen mit ihrem Quadrate integrierbaren Funktion $x(\tau)$ der symmetrische Ausdruck

(32) $$y(\xi)=\int_0^1[x(\xi+\tau)-x(\xi-\tau)]\,w(\tau)\,d\tau \qquad (0\leqslant\xi\leqslant1)$$

eine ebensolche Funktion $y(\xi)$ dar, für welche

$$\sqrt{\int_0^1 y^2(\xi)\,d\xi}\leqslant 2\lambda\sqrt{\int_0^1 x^2(\tau)\,d\tau}$$

gilt, die Beziehung (32) aber als

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_0\left(y(\xi)-\int_\varepsilon^1[\;]\,w\,d\tau\right)^2 d\xi=0$$

verstanden werden soll.

2. Wir wollen das eben erhaltene Resultat auf den Fall $w(\tau)=\frac{1}{\tau}$ anwenden. Es ist

$$\int_\varepsilon^1\frac{\sin\gamma\tau}{\tau}\,d\tau=\int_{\gamma\varepsilon}^{\gamma}\frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau;$$

wir werden zunächst zeigen, daß für $0\leqslant\alpha\leqslant\beta$

$$\left|\int_\alpha^\beta\frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau\right|\leqslant\int_0^\pi\frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau=1{\cdot}8519\ldots$$

Setzt man nämlich

$$\int_{p\pi}^{(p+1)\pi}\frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau=\mu_p,$$

so ist

$$|\mu_0|>|\mu_1|>|\mu_2|>\ldots$$

und

$$\operatorname{sign}\mu_p=(-1)^p;$$

$$\int_\alpha^\beta\frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau=\vartheta'\mu_r+\sum_{p=r+1}^{p=s-1}\mu_p+\vartheta''\mu_s;$$

dabei ist $0\leqslant\vartheta'\leqslant1$, $0\leqslant\vartheta''<1$, $s>r\geqslant0$, und die Summe Σ ist im Falle $s=r+1$ als Null zu lesen.

Augenscheinlich wird der Ausdruck $\int\limits_\alpha^\beta\frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau$ absolut nicht verkleinert, wenn man die Terme $\vartheta'\mu_r$, $\vartheta''\mu_s$ durch μ_r, μ_s ersetzt oder unterdrückt, je nachdem ihr Vorzeichen mit dem des ganzen übereinstimmt oder nicht. So entsteht

$$\sum_{p=i}^{p=j}\mu_p; \qquad (j\geqslant i\geqslant0)$$

es ist aber

$$\left|\sum_{p=i}^{p=j}\mu_p\right|\leqslant|\mu_i|\leqslant\mu_0=\int_0^\pi\frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau,$$

wobei die Gleichheitszeichen nur dann beide zugleich gelten, wenn $i=j=0$ ist. — Nun sind die früher mit λ_{nq} bezeichneten Größen jetzt

$$\lambda_{nq}=\int_{\varepsilon_n}^1\frac{\sin\pi q\tau}{\tau}\,d\tau$$

und die Annahme $|\lambda_{nq}|\leqslant\lambda$ ist erfüllt für $\lambda=\int\limits_0^\pi\frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau.$

Der Satz dieses § gilt also für $w(\tau)=\frac{1}{\tau}$ mit diesem λ und zeigt, daß

(33) $$y(\xi)=\int_0^1 \frac{x(\xi+\tau)-x(\xi-\tau)}{\tau}\,d\tau$$

für alle quadratisch integrierbaren $x(\tau)$ ein ebensolches $y(\xi)$ liefert, wobei

(34) $$\int_0^1 y^2(\xi)\,d\xi \leqslant 4\left[\int_0^\pi \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau\right]^2 \cdot \int_0^1 x^2(\tau)\,d\tau,$$

die Beziehung (33) aber in demselben Sinne, wie (32) gilt.

Nun hat Besikovitch bewiesen, daß für quadratisch integrierbare $x(\tau)$

$$\int_0^1 \frac{x(\xi+\tau)-x(\xi-\tau)}{\tau}\,d\tau$$

im Sinne des für fast alle ξ in $\langle 01 \rangle$ vorhandenen gewöhnlichen Limes

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{x(\xi+\tau)-x(\xi-\tau)}{\tau}\,d\tau$$

existiert und eine Funktion $y(\xi)$ darstellt, für welche

$$\int_0^1 y^2(\xi)\,d\xi \leqslant 2\pi^2\int_0^1 x^2(\tau)\,d\tau$$

ist[12]. Da aber bekanntlich der gewöhnliche Limes von Funktionenfolgen von dem *durchschnittlichen* höchstens in einer Nullmenge verschieden sein kann, so ist unsere Funktion $y(\xi)$ der des Herrn Besikovitch bis auf eine Nullmenge gleich. Infolgedessen kann man in der Ungleichung des Herrn Besikovitch die Konstante $2\pi^2=19{\cdot}7392\ldots$ durch

$$4\left[\int_0^\pi \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau\right]^2=13{\cdot}718\ldots\text{[13])}$$

ersetzen.

Weiter kann nicht gegangen werden: wir werden zeigen, daß in (34) im Falle

$$x(\tau)=\varrho\sin\pi\tau \qquad (\varrho \text{ beliebig reell})$$

und nur in diesem Falle das *Gleichheitszeichen* gilt.

[12]) loc. cit., théorème 4.

[13]) Die Quadratwurzel dieser Zahl ist $\pi\times$Koeffizient der Gibbs'schen Erscheinung. [Anm. b. d. Korr.].

Wir haben früher berechnet:

$$\|F_n(p_k)\|=\sqrt{2\sum_{q=1}^{k}\alpha_q^2\lambda_{nq}^2}$$

Nun ist Lim $F_n(p_k)=F_\infty(p_k)$; daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty}\|F_n(p_k)\|=\|F_\infty(p_k)\|$$

also

(35) $$\|F_\infty(p_k)\|=\sqrt{2\sum_{q=1}^{k}\alpha^2\lambda_{\infty q}^2}$$

wobei

$$\lambda_{\infty q} \text{ für } \lim_{n\to\infty}\lambda_{nq}=\int_0^1\frac{\sin\pi q\tau}{\tau}\,d\tau=\int_0^{q\pi}\frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau$$

gesetzt wurde. Es sei nun $x(\tau)$ quadratisch integrierbar und $\{p_k(\tau)\}$ die Folge der Sinuspolynome, die durch die sukzessiven Partialsummen der Fourierentwickelung von $x(\tau)$ gegeben wird; in der Formel für $p_k(\tau)$ sind die α_q also die Fouriersinuskoeffizienten von $x(\tau)$; man hat dann bekanntlich

$$\operatorname*{Lim}_{k\to\infty} p_k=x$$

und — wegen der Stetigkeit von $F_\infty(x)$ in B —

$$\operatorname*{Lim}_{k\to\infty}\|F_\infty(p_k)\|=\|F_\infty(x)\|;$$

und daher

$$\lim_{k\to\infty}\|F_\infty(p_k)\|=\|F_\infty(x)\|;$$

dieses mit (35) ergibt

$$\|F_\infty(x)\|=\sqrt{2\sum_{q=1}^{\infty}\alpha^2\lambda_{\infty q}^2}$$

Nun aber ist

$$\|p_k\| \text{ zu } \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{k}\alpha_q^2}$$

berechnet worden, woraus

$$\|x\|=\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{\infty}\alpha_q^2}$$

folgt; also

$$\|F_\infty(x)\|=2\lambda\|x\|$$

ist gleichbedeutend mit

$$(36)\qquad \sqrt{2\sum_{q=1}^{\infty}{}'\alpha_q^2\lambda_{\infty q}^2} = \sqrt{2\sum_{q=1}^{\infty}{}'\alpha_q^2\lambda^2}\ ;$$

es ist nun

$$\lambda_{\infty q} = \int_0^{q\pi} \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau \leqq \int_0^{\pi} \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau = \lambda$$

und die *Gleichheit* gilt nur für $q=1$,
so daß (36) dann und nur dann gilt, wenn

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \ldots\ldots = 0$$

oder

$$x(\tau) = \alpha_1 \sin \pi\tau$$

ist, w. z. b. w.[14])

§ 6. Ungelöste Probleme.

Folgende Probleme werden durch das Vorhergehende nahe gelegt.

1. Weder in § 4 noch in § 5 wurden notwendige und hinreichende Bedingungen für $w(\tau)$ gefunden, damit der symmetrische Ausdruck ohne Modulzeichen in dem einen oder in dem anderen Sinne immer (d. h. in der ganzen betrachteten x-Gesammtheit) existiere.

2. Der unsymmetrische Ausdruck ohne Modulzeichen wurde mit den Mitteln des § 5. gar nicht behandelt.

3. In keinem Falle konnte man sich von der Einschränkung „bis auf eine Nullmenge" losmachen. Es erhebt sich also nicht bloß die methodische Forderung z. B. die Existenz der durchweg nicht differenzierbaren Funktionen mit dem Operationskalkül zu beweisen, sondern auch die wichtigere Frage nach der Kategorie der Menge solcher Funktionen im Raume aller stetigen Funktionen. Eine analoge Forderung und analoge Fragen betreffen auch andere in §§ 1—4 behandelten Ausdrücke.

(Reçu par la Rédaction le 29. 4. 1928).

[14]) G. H. Hardy zeigt [The Messenger of Mathematics, Vol. LVI, (1927), Note on some points in the integral calculus (LXII) pp. 10—16], daß $\int_0^{\infty} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\,dt$ fast überall existiert und $\pi g(x)$ ergibt, falls $f(x)$ periodisch und L-integrierbar ist, $g(x)$ aber dieselben Eigenschaften hat und als Fourierreihe die zu der von $f(x)$ konjugierte liefert. L. Lichtenstein hat viel früher [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 141, (1911), pp. 12—42) insbesondere p. 14] die Existenz und quadratische Integrierbarkeit von

$$h(\theta) = \int_0^{\pi} [f(\theta+t)-f(\theta-t)]\,\frac{dt}{t}$$

— allerdings unter der Voraussetzung der Riemann'schen Integrierbarkeit von $f^2(\theta)$ — bewiesen. Dementsprechend ist aber auch die These stärker. A. Plessner hat zunächst, bei ähnlichen Voraussetzungen wie Hardy, gezeigt, daß der Hauptwert von $\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[f(u+t)-f(u-t)]\cot g\,\frac{t}{2}\,dt$ fast überall die konjugierte Funktion $-g(u)$ ergibt [Mitteilungen des Mathematischen Seminars der Universität Giessen, X Heft, 1^0^, 1923, Zur Theorie der konjugierten trigonometrischen Reihen, pp. 1—9, besonders p. 4, Satz 1]. In seiner letzten Arbeit [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 158, (1928), pp. 219—227, insbesondere § 3, setzt er für $f(\theta)$ bloß die Denjoy-Perron'sche Integrierbarkeit voraus, um eine ebensolche fast überall für $\frac{f(\theta+t)-f(\theta-t)}{t}$ behaupten zu können. — [Anm. b. d. Korr.].