Polska Biblioteka Wirtualna ICM

Sur les équations linéaires aux différentielles totales

par

W. NIKLIBORC (Lwów).

Envisageons le système des équations linéaires aux différentielles totales:

$$dz_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, dx_k \qquad (i=1, 2, \dots m). \tag{1}$$

On suppose, que les a_{ik} sont des fonctions des variables

$$x_1,\ x_2 \dots x_n,\ z_1, \dots z_m$$

définies dans un certain domaine (D) à $m+n$ dimensions.

Le problème de Cauchy pour les équations (1) consiste dans la recherche des fonctions

$$z_1 (x_1 \dots x_n), \dots z_m (x_1 \dots x_n),$$

satisfaisant aux équations (1) et vérifiant d'autre part *„les conditions initiales“*:

$$z_i (x_1^{(o)} \dots x_n^{(o)}) = z_i^{(o)}, \qquad (i=1, 2, \dots m)$$

$(x_1^{(o)} \dots x_n^{(o)}, z_1^{(o)}, \dots z_m^{(o)})$ étant un point intérieur de (D).

Si les équations (1) forment un système *„complètement intégrable“*, c'est-à-dire si l'on a identiquement

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial a_{ik}}{\partial z_\nu} \cdot a_{\nu j} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\nu} \cdot a_{\nu k}, \qquad \begin{matrix}(i=1, 2 \dots m)\\(k, j=1, 2 \dots n)\end{matrix}$$

on peut, sous certaines conditions de régularité des a_{ik}, démontrer, qu'une solution du problème existe.

La démonstration directe de cette proposition n'était donnée à ce que je sais, que dans les cas[1]) où les fonctions a_{ik} sont *holomorphes* dans le voisinage du point $(x_k^{(o)}, z_i^{(o)})$[2]).

---

[1]) V. p. e. Goursat. „Cours d'Analyse“. T. II. I. Éd. p. 357—360, ou les „Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre“ du même Auteur. II. Éd. p. 105—107.

[2]) Pour abréger nous désignos par (x_k, z_i) le point $(x_1 \dots x_n, z_1 \dots z_m)$.

Polska Biblioteka Wirtualna ICM

Lorsqu'on considére des fonctions a_{ik} *non analytiques*, on peut démontrer la possibilité du problème, dont il s'agit, *indirectement*, à savoir par la reduction au certain système des équations différentielles ordinaires [3]). Cette reduction exige certaines suppositions sur les a_{ik}. M. Bieberbach suppose par exemple [4]), que les fonctions a_{ik} possédent des dérivées partielles de quatre premiers ordres. Il dit [5]), il est vrai, qu'on peut diminuer ces hypothèses, mais comme il nous semble, il est nécessaire pour la validité de ce mode de démonstration de supposer, que les a_{ik} possédent des dérivées partielles continues de deux premiers ordres.

Dans ce qui va suivre, nous allons prouver le théorème de Cauchy pour le système (1) d'une manière directe, en utilisant le procédé des approximations succesives.

§ 1. Notations et hypothèses. Envisageons un domaine (D) fermé, situé dans l'espace des variables

$$x_1 \ldots x_n,\ z_1, \ldots z_m,$$

et soient les a_{ik} des fonctions de ces variables. Supposons, que:

1°. Les fonctions a_{ik} sont continues dans (D), et possédent des dérivées partielles du premier ordre continues dans (D) fermé.

2°. Dans tout (D) on a

$$(1,1)\quad \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial a_{ik}}{\partial z_\nu} \cdot a_{\nu j} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\nu}\, a_{\nu,k} \qquad \begin{matrix}(i = 1, 2, \ldots m)\\ (j, k = 1, 2 \ldots n).\end{matrix}$$

Les fonctions $|a_{i,k}|$ étant bornées dans (D), désignons par M la plus petite commune borne supérieure des ces fonctions. De même soit K la plus petite borne supérieure des fonctions $\left|\frac{\partial a_{ik}}{\partial z_j}\right|$.

Pour simplifier l'écriture supposons, que les conditions initiales $(x_k^{(o)}, z_i^{(o)})$ coïncident avec l'origine des coordonnées, qui, d'apres l'hypothèse, est un point intérieur de (D). Ils existent alors deux nombres $a > o$ et $b > o$, tels, que le parallélepipède:

$$|x_k| \leqq a \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$
$$|z_i| \leqq b \qquad (i = 1, 2 \ldots m),$$

est situé dans (D).

[3]) V. p. e. Goursat l. c.
[4]) „Differentialgleichungen". Springer, Berlin, 1923, p. 222.
[5]) L. c. p. 218.

§ 2. Problème et théorème. Envisageons maintenant *le problème* suivant:

„Déterminer 1° un nombre positif δ

2° un système des fonctions

$$z_1(x_1 \ldots x_n), \ldots z_m(x_1 \ldots x_n)$$

définies dans le domaine

$$(2)\qquad |x_k| \leqq \delta \qquad (k = 1, 2 \ldots n),$$

continues dans ce domaine avec les dérivées partielles du premier ordre et

a) vérifiant les équations (1)

b) satisfaisant aux conditions

$$z_i(0\, 0 \ldots 0) = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots m)\text{“}.$$

Nous allons dèmontrer le THÉORÈME:

„Sous les conditions du §-phe précédent il existe toujours une solution de la question proposée. Pour δ on peut prendre le plus petit de deux nombres a et $\frac{b}{nM}$“.

§ 3. Construction des approximations. Nous allons définir une suite infinie des systèmes à m fonctions

$$z_1^{(r)}(x_1 \ldots x_n), \ldots z_m^{(r)}(x_1 \ldots x_n), \qquad (r = 0, 1, 2 \ldots),$$

dites „approximations succesives".

Posons

$$(3)\qquad z_i^{(o)}(x_1 \ldots x_n) \equiv 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots m)$$

et

$$(4)\quad z_i^{(r+1)}(x_1 \ldots x_n) = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,[tx_1, \ldots tx_n,\, z_1^{(r)}(tx_1 \ldots tx_n), \ldots$$
$$\ldots z_m^{(r)}(tx_1 \ldots tx_n)]\,.\, x_k\, dt \qquad \begin{matrix}(i = 1, 2 \ldots m)\\ (r = 0, 1, 2 \ldots).\end{matrix}$$

L'induction permet à démontrer facilement, que nos conventions définissent les $z_i^{(r)}$ dans le domaine (2) [6]) comme des fonctions continues, qui possédent des dérivées partielles du premier ordre, continues.

[6]) Nous choisissons naturellement δ égal à $Min\left(a, \frac{b}{nM}\right)$.

En effet, notre proposition est vraie pour le prémier système de notre suite. Supposons, qu'elle est vraie pour un certain r, et qu' on a de plus

$$| z_i^{(r)} (x_1 \dots x_n) | \leq b$$

dans tout le domaine (2). Alors on voit par les formules (4), que les $z_i^{(r+1)}$ sont continues, possédent des dérivées partielles du premier ordre et — finalement — que

$$| z_i^{(r+1)} (x_1 \dots x_n) | \leq \int_0^1 \sum_{k=1}^n |a_{ik}| . |x_k| \, dt \leq n M . \delta \leq n M \cdot \frac{b}{n M} = b.$$

Notre lemme est donc établi. Remarquons que

$$z_i^{(r)} (0, \dots 0) = 0 \qquad (i = 1, 2 \dots m), \ (r = 0, 1, 2 \dots).$$

§ 4. Convergence des approximations succesives.

Posons pour abréger

(5) $$a_{i,k}^{(r)} = a_{i,k}^{(r)} [x_1 \dots x_n, z_1^{(r)} (x_1 \dots x_n), \dots z_m^{(r)} (x_1 \dots x_n)]$$

et

$$a_{i,k}^{(r)} (t) = a_{i,k}^{(r)} [t x_1 \dots t x_n, z_1^{(r)} (t x_1 \dots t x_n), \dots z_m^{(r)} (t x_1 \dots t x_n)].$$

On a

(6) $$| z_i^{(r+1)} (x_1 \dots x_n) - z_i^{(r)} (x_1 \dots x_n) | =$$

$$= \left| \int_0^1 \sum_{k=1}^n \{ a_{i,k}^{(r)} (t) - a_{i,k}^{(r-1)} (t) \} x_k \, dt \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n | x_k | . \int_0^1 | a_{i,k}^{(r)} (t) - a_{i,k}^{(r-1)} (t) | \, dt \leq$$

$$\leq K \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m | x_k | . \int_0^1 | z_l^{(r)} (t x_1 \dots t x_n) - z_l^{(r-1)} (t x_1 \dots t x_n) | \, dt.$$

Supposons, que

(7) $$| z_i^{(r)} - z_i^{(r-1)} | \leq \frac{M}{mK} \frac{\{ m K \sum_{s=1}^n | x_s | \}^r}{r!} ;$$

il suit de (6), que

$$| z_i^{(r+1)} - z_i^{(r)} | \leq K . \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m | x_k | . \int_0^1 \frac{M}{m K} \frac{\{ m K . \sum_{s=1}^n | t x_s | \}^r}{r!} \, dt =$$

$$= \frac{M}{mK} \cdot \frac{\{ m K . \sum_{s=1}^n | x_s | \}^{r+1}}{(r+1)!}$$

D'autre part on a

$$| z_i^{(1)} - z_i^{(0)} | = | z_i^{(1)} | \leq \sum_{k=1}^n | x_k | \int_0^1 | a_{ik}^{(0)} | \, dt \leq M . \sum_{s=1}^n | x_s |.$$

L'inégalité (12) est alors valable dans tout le domaine (2) et pour tout r naturel. La série

$$\sum_{r=1}^\infty | z_i^{(r)} - z_i^{(r-1)} |$$

étant majorée par la série

$$\sum_{r=1}^\infty \frac{M}{m K} \frac{\{ m K . \sum_{s=1}^n | x_s | \}^r}{r!}$$

[dont la somme est $\frac{M}{m K} (e^{m K \sum_{s=1}^n | x_s |} - 1)$], converge dans (2) uniformément. Par conséquent la suite des systèmes $z_i^{(r)}$ converge aussi uniformément dans le domaine (2).

Désignons par

$$z_1 (x_1 \dots x_n), \ \dots \ z_m (x_1 \dots x_n)$$

la limite de cette suite. Les fonctions z_i sont évidemment continues dans le domaine (2) et on a

$$z_i (0 0 \dots 0) = 0.$$

§ 5. Calcul des dérivées des approximations.

Les formules (4) fournissent:

$$\frac{\partial z_i^{(r+1)}}{\partial x_l} = \int_0^1 \{ a_{i,l}^{(r)} (t) + \sum_{s=1}^n \frac{\partial a_{is}^{(r)}}{\partial x_l} t x_s + \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial a_{i,s}^{(r)}}{\partial z_j} . \frac{\partial z_j^{(r)}}{\partial x_l} t x_s \} \, dt \qquad \begin{matrix} (i=1, 2 \dots m) \\ (l=1, 2 \dots n) \\ (r=0, 1, 2, \dots) \end{matrix}$$

Les dérivées partielles des $a_{i,k}^{(r)}$, qui figurent sous le signe de l'intégrale, doivent être calculées au point

$$t x_1 \dots t x_n, \ z_1^{(r)} (t x_1 \dots t x_n), \dots, z_m^{(r)} (t x_1 \dots t x_n).$$

Or, on vérifie sans difficulté, que l' on a

$$t x_l \frac{\partial a_{il}^{(r)}}{\partial x_l} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial a_{il}^{(r)}}{\partial z_j} . \frac{\partial z_j^{(r)}}{\partial x_l} t x_l = t \frac{d}{dt} a_{il}^{(r)} (t) -$$

$$- \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq l}}^n t x_s \frac{\partial a_{il}^{(r)}}{\partial x_s} - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq l}}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial a_{il}^{(r)}}{\partial z_j} . \frac{\partial z_j^{(r)}}{\partial x_s} . t x_s,$$

Polska Biblioteka Wirtualna ICM

Polska Biblioteka Wirtualna ICM

et par conséquent

$$\frac{\partial z_i^{(r+1)}}{\partial x_l} = \int_0^1 \Big\{ t\frac{d}{dt}\, a_{i,l}^{(r)}(t) + a_{i,l}^{(r)}(t) + \sum_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^n tx_s \cdot \Big[\frac{\partial a_{i,s}^{(r)}}{\partial x_l} - \frac{\partial a_{i,l}^{(r)}}{\partial x_s}\Big] +$$

$$+ \sum_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^n \sum_{j=1}^m tx_s \Big[\frac{\partial a_{i,s}^{(r)}}{\partial z_j}\cdot\frac{\partial z_j^{(r)}}{\partial x_l} - \frac{\partial a_{i,l}^{(r)}}{\partial z_j}\cdot\frac{\partial z_j^{(r)}}{\partial x_s}\Big]\Big\}\, dt.$$

Mais

$$\int_0^1 t\frac{d}{dt}\, a_{i,l}^{(r)}\, dt = t\, a_{i,l}^{(r)} \Big|_0^1 - \int_0^1 a_{i,l}^{(r)}(t)\, dt,$$

donc d'après (5)

$$\frac{\partial z_i^{(r+1)}}{\partial x_l} = a_{i,l}^{(r)} + \int_0^1 \Big\{\sum_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^n tx_s \Big[\frac{\partial a_{i,s}^{(r)}}{\partial x_l} - \frac{\partial a_{i,l}^{(r)}}{\partial x_s}\Big] +$$

$$+\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^n\sum_{j=1}^m tx_s\Big[\frac{\partial a_{i,s}^{(r)}}{\partial z_j}\cdot\frac{\partial z_j^{(r)}}{\partial x_l} - \frac{\partial a_{i,l}^{(r)}}{\partial z_j}\cdot\frac{\partial z_j^{(r)}}{\partial x_s}\Big]\Big\}\, dt$$

D'autre part on a d'aprés $(1,_1)$:

$$\frac{\partial a_{i,s}^{(r)}}{\partial x_l} - \frac{\partial a_{i,l}^{(r)}}{\partial x_s} = \sum_{j=1}^m \Big(\frac{\partial a_{i,l}^{(r)}}{\partial z_j}\, a_{j,s}^{(r)} - \frac{\partial a_{i,s}^{(r)}}{\partial z_j}\cdot a_{j,l}^{(r)}\Big)$$

donc

(8) $$\frac{\partial z_i^{(r+1)}}{\partial x_l} = a_{i,l}^{(r)} + \sum_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^n\sum_{j=1}^m x_s\cdot\int_0^1\Big\{\frac{\partial a_{i,l}^{(r)}}{\partial z_j}\cdot\Big(a_{j,s}^{(r)} - \frac{\partial z_j^{(r)}}{\partial x_s}\Big) -$$

$$- \frac{\partial a_{i,s}^{(r)}}{\partial z_j}\Big(a_{j,l}^{(r)} - \frac{\partial z_j^{(r)}}{\partial x_l}\Big)\Big\}\, tdt.$$

Ainsi nous avons obtenu une formule fondamentale pour ce qui va suivre.

§ 6. Convergence des $\frac{\partial z_i^{(r)}}{\partial x_l}$. De la formule (8) on déduit aussitôt l'inégalité:

$$\Big|\frac{\partial z_i^{(r+1)}}{\partial x_l} - a_{i,l}^{(r+1)}\Big| \leq \big|a_{i,l}^{(r+1)} - a_{i,l}^{(r)}\big| +$$

$$+K\cdot\sum_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^n\sum_{j=1}^m |x_s|\cdot\int_0^1\Big\{\Big|\frac{\partial z_j^{(r)}}{\partial x_l} - a_{j,l}^{(r)}\Big| + \Big|\frac{\partial z_j^{(r)}}{\partial x_s} - a_{j,s}^{(r)}\Big|\Big\}\, tdt.$$

$(i=1,2\ldots m)$, $(l=1,2\ldots n)$, $(r=0,1,2\ldots)$.

En ajoutant ces inégalités pour tous les indices i et l, et en écrivant j au lieu de i dans les deux premières sommes nous obtenons

$$\sum_{j=1}^m\sum_{l=1}^n\Big|\frac{\partial z_j^{(r+1)}}{\partial x_l} - a_{j,l}^{(r+1)}\Big| \leq \sum_{j=1}^m\sum_{l=1}^n \big|a_{j,l}^{(r+1)} - a_{j,l}^{(r)}\big| +$$

$$+ mK\cdot\sum_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^n\sum_{j=1}^m\sum_{l=1}^n|x_s|\cdot\int_0^1\Big|\frac{\partial z_j^{(r)}}{\partial x_l} - a_{j,l}^{(r)}\Big|\cdot tdt +$$

$$+ mn\, K\cdot\sum_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^n\sum_{j=1}^m|x_s|\cdot\int_0^1\Big|\frac{\partial z_j^{(r)}}{\partial x_s} - a_{j,s}^{(r)}\Big|\cdot tdt,$$

ce qui avec

$$\sum_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^n\sum_{j=1}^m\sum_{l=1}^n|x_s|\cdot\int_0^1\Big|\frac{\partial z_j^{(r)}}{\partial x_l} - a_{j,l}^{(r)}\Big|\, tdt \leq$$

$$\leq \Big(\sum_{s=1}^n|x_s|\Big)\cdot\sum_{j=1}^m\sum_{l=1}^n\int_0^1\Big|\frac{\partial z_j^{(r)}}{\partial x_l} - a_{j,l}^{(r)}\Big|\cdot tdt,$$

$$\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^n\sum_{j=1}^m|x_s|\cdot\int_0^1\Big|\frac{\partial z_j^{(r)}}{\partial x_s} - a_{j,s}^{(r)}\Big|\, tdt \leq$$

$$\leq\Big(\sum_{s=1}^n|x_s|\Big)\cdot\sum_{s=1}^n\sum_{j=1}^m\int_0^1\Big|\frac{\partial z_j^{(r)}}{\partial x_s} - a_{j,s}^{(r)}\Big|\, tdt,$$

$$\big|a_{j,l}^{(r+1)} - a_{j,l}^{(r)}\big| \leq K\cdot\sum_{\nu=1}^m\big|z_\nu^{(r+1)} - z_\nu^{(r)}\big|$$

donne

$$\sum_{j=1}^m\sum_{l=1}^n\Big|\frac{\partial z_j^{(r+1)}}{\partial x_l} - a_{j,l}^{(r+1)}\Big| \leq mnK\cdot\sum_{\nu=1}^m\big|z_\nu^{(r+1)} - z_\nu^{(r)}\big| +$$

$$+2\,mn\cdot K\cdot\Big(\sum_{s=1}^n|x_s|\Big)\cdot\sum_{l=1}^n\sum_{j=1}^m\int_0^1\Big|\frac{\partial z_j^{(r)}}{\partial x_l} - a_{j,l}^{(r)}\Big|\, tdt.$$

En posant

$$u^{(r+1)} = \sum_{j=1}^m\sum_{l=1}^n\Big|\frac{\partial z_j^{(r+1)}}{\partial x_l} - a_{j,l}^{(r+1)}\Big|$$

on obtient en vertu de (7):

Polska Biblioteka Wirtualna ICM

$$u^{(r+1)} \leqq M.m.n \frac{m^{r+1}.K^{r+1}.\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|\right)^{r+1}}{(r+1)!} +$$

$$+2mn.K.\left(\sum_{s=1}^{n}|x_s|\right).\int_0^1 u^{(r)}.tdt;$$

d'où (par l'induction) il vient

$$u^{(r)} \leqq Mmn \frac{\left\{3\ m\ n\ K\ .\sum_{s=1}^{n}|x_s|\right\}^r}{r!}.$$

La série

$$\sum_{r=0}^{\infty} u^{(r)}$$

étant donc convergente uniformément, on conclut, que les séries

$$\sum_{r=0}^{\infty}\left|\frac{\partial z_j^{(r+1)}}{\partial x_l} - a_{j,l}^{(r+1)}\right| \qquad \begin{matrix}(j=1,2\ldots m)\\(l=1,2\ldots n)\end{matrix}$$

le sont aussi; les termes

$$\left|\frac{\partial z_j^{(r+1)}}{\partial x_l} - a_{j,l}^{(r+1)}\right|$$

convergent donc uniformément vers zéro, et comme les $a_{j,l}^{(r+1)}$ convergent dans ces conditions uniformément vers les limites

$$a_{j,l}[x_1,\ldots x_n,\ z_1(x_1\ldots x_n),\ldots z_m(x_1\ldots x_n)],$$

nous voyons que les $\dfrac{\partial z_j^{(r+1)}}{\partial x_l}$ tendent aussi vers les mêmes limites. Il s'en suit que les fonctions-limites z_i possédent des dérivées partielles du prémier ordre, et en plus que $\dfrac{\partial z_i}{\partial x_k} = a_{ik}$.

§ 7. L'unicité de la solution peut être démontré comme il suit: soit z_i une solution quelconque du problème proposé, et les $z_i^{(r+1)}$ soient définis par les formules (3) et (4).

On a évidemment

$$z_i(x_1\ldots\ldots x_n) = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ [tx_1\ldots\ tx_n,\ z_1(tx_1\ldots\ tx_n),\ \ldots\ldots]\ x_k\ dt$$

et par la

$$|z_i - z_i^{(r+1)}| \leqq \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} |a_{ik} - a_{ik}^{(r)}|.|x_k|\,dt \leqq$$

$$\leqq n.K.\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|\right).\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 |z_i - z_i^{(r)}|\,dt,$$

donc

$$\sum_{i=1}^{m}|z_i - z_i^{(r+1)}| \leqq mn\,K.\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|\right).\int_0^1\sum_{i=1}^{m}|z_i - z_i^{(r)}|\,dt,$$

d'où, en désignant par A le maximum de l'expression

$$\sum_{i=1}^{m}|z_i - z_i^{(0)}|,$$

on obtient (par l'induction) l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{m}|z_i - z_i^{(r)}| \leqq A.\frac{\left\{mn\,K.\sum_{k=1}^{n}|x_k|\right\}^r}{r!},$$

qui montre, que les approximations $z_i^{(r)}$, fonctions parfaitement déterminées, convergent vers la solution $z^{(i)}$, donnée à l'avance; cette solution doit donc être unique, c. q. f. d.

Remarque 1. Si $n=1$, on obtient comme cas particulier le théorème classique pour les équations différentielles ordinaires.

Remarque 2. Ajoutons, que le domaine d'existence des solutions z_i est ici, à notre connaissance, détérminé pour la première fois.

(Reçu par la Rédaction le 21. VII. 1928).