

Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen II.

von

W. ORLICZ (Lwów).

Die vorliegende Note bildet eine Ergänzung und naheliegende Verallgemeinerung des § 4 der unter dem Titel: „Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen“ in diesem Bande der „Studia Mathematica“ erschienenen Arbeit des Verfassers<sup>1)</sup>. Im Folgenden werden wir an allen in der obengenannten Arbeit eingeführten Definitionen und Bezeichnungen festhalten.

Wir werden uns hier mit folgenden Problemen befassen:

**Problem I.** Gegeben sei ein  $OS\{\varphi_i(x)\}$ . Von welcher Folge nichtnegativer Zahlen  $\{p_i\}$  kann man folgendes behaupten:

Es existiert in  $S^\delta$  eine Funktion  $f(x)$ , so dass

$$\sum_{v=1}^{\infty} |f_v| p_v = +\infty,$$

wobei  $f_v$  die Koeffizienten der Entwicklung von  $f(x)$  bezeichnen?

**Problem II.** (Das Majorantenproblem). Gegeben sei ein  $OS\{\varphi_i(x)\}$ . Von welcher Folge nichtnegativer Zahlen  $\{p_i\}$  kann man behaupten:

Jede Zahlenfolge  $\{c_i\}$ , die der Ungleichung

$$|c_n| \leq p_n \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

genügt, ist in  $\Omega(\delta)$  enthalten?

Diese Probleme stehen in naher Beziehung zu den Problemen  $I_1, I_2, II_1, II_2, III_1, III_2$  in Ort. Ent.; man kann sie gewissermassen als deren Verallgemeinerung betrachten.

§ 1 dieser Note bringt einige allgemeine Sätze über die sog. unbedingt konvergenten Reihen von Elementen, die einem

<sup>1)</sup> Diese Arbeit werden wir kurz als Ort. Ent. zitieren.

normierten, vollständigen Vektorbereiche angehören<sup>2)</sup>. Es scheint mir, dass Satz 3 dieses § auch an sich von Interesse ist, als Übertragung einer wohlbekannteren Tatsache aus der elementaren Theorie der unendlichen Reihen auf den Fall einer ziemlich allgemeinen Klasse von  $B$ -Räumen.

In § 2 werden die Probleme I, II behandelt.

### § 1.

Es sei  $\mathfrak{B}$  ein  $B$ -Raum. Die Reihe

$$(1) \quad \sum_{v=1}^{\infty} e_v$$

( $e_v \in \mathfrak{B}$ ) nennen wir *unbedingt konvergent*, wenn sie bei jeder Anordnung der Glieder konvergent ist. Es liegt nun die Frage nahe, welche Eigenschaften der gewöhnlichen, unbedingt konvergenten Reihen in allgemeinen  $B$ -Räumen erhalten bleiben. (Bei numerischen Reihen ist bekanntlich die unbedingte Konvergenz mit der absoluten identisch, im Allgemeinen ist dies aber nicht der Fall).

**Satz 1.** Voraussetzung. Die Reihe (1) ist unbedingt konvergent.

Behauptung. Die *Summe* dieser Reihe ist eindeutig bestimmt, d. h. sie ist unabhängig von der Anordnung der Glieder.

**Beweis.** Nur der Vollständigkeit halber geben wir hier den elementaren Beweis dieses Satzes.<sup>3)</sup>

Setzen wir voraus, dass

$$(2) \quad \sum_{v=1}^{\infty} e_{p_v} = e_1, \quad \sum_{v=1}^{\infty} e_{q_v} = e_2,$$

wobei diese Reihen nur in der Anordnung der Glieder von der Reihe (1) verschieden sind. — Wir wählen zuerst den Index  $n_1$

so, dass  $\left\| \sum_{v=1}^{n_1} e_{p_v} - e_1 \right\| < \frac{1}{2^1}$  ist, dann  $n'_1 > n_1$  so, dass die Un-

gleichung  $\left\| \sum_{v=1}^{n'_1} e_{q_v} - e_2 \right\| < \frac{1}{2^1}$  besteht und alle  $e_{p_1}, \dots, e_{p_{n_1}}$  unter

<sup>2)</sup> Wir werden — mit Herrn Fréchet — den normierten, vollständigen Vektorbereich kurz  $B$ -Raum nennen.

<sup>3)</sup> Diesen Satz habe ich schon vorher (ohne Beweis) in der Note: „Über die unabhängig von der Anordnung fast überall konvergenten Funktionenreihen“, Bull. Ac. Pol. (1927), ausgesprochen.

den Elementen  $e_{q_1}, \dots, e_{q_{n_1}}$  enthalten sind. Jetzt wählen wir den Index  $n_2 > n'_1$  so, dass  $\left\| \sum_{v=1}^{n_2} e_{p_v} - e_1 \right\| < \frac{1}{2^2}$  und alle  $e_{q_1}, \dots, e_{q_{n'_1}}$  schon in der Elementenmenge  $e_{p_1}, \dots, e_{p_{n_2}}$  enthalten sind. Dann finden wir ein  $n'_2 > n_2$ , wobei  $\left\| \sum_{v=1}^{n'_2} e_{q_v} - e_2 \right\| < \frac{1}{2^2}$  ist, und alle  $e_{p_1}, \dots, e_{p_{n_2}}$  sich unter den Elementen  $e_{q_1}, \dots, e_{q_{n'_2}}$  befinden — und so fahren wir weiter fort.

Wir konstruieren jetzt die Reihe  $\sum_{v=1}^{\infty} e_{r_v}$  indem wir setzen:

$e_{r_v}$  gleich, für  $1 \leq v \leq n_1$ , den Elementen  $e_{p_1}, \dots, e_{p_{n_1}}$ ; für  $n_1 < v \leq n'_1$  denjenigen Elementen unter den  $e_{q_1}, \dots, e_{q_{n'_1}}$ , die keine  $e_{p_1}, \dots, e_{p_{n_1}}$  sind; für  $n'_1 < v \leq n_2$  denjenigen Elementen unter  $e_{p_1}, \dots, e_{p_{n_2}}$ , die der Elementenmenge  $e_{q_1}, \dots, e_{q_{n'_1}}$  nicht angehören — u. s. w.

Die so konstruierte Reihe unterscheidet sich von der Reihe (1) höchstens in der Anordnung der Glieder und hat die Eigenschaft, dass ihre — den Indizes  $n_1, n_2, \dots, n'_1, n'_2, \dots$  entsprechenden — Partialsummen mit den entsprechenden Partialsummen der Reihen  $\sum_{v=1}^{\infty} e_{p_v}, \sum_{v=1}^{\infty} e_{q_v}$  identisch sind. Die Reihe  $\sum_{v=1}^{\infty} e_{r_v}$  ist konvergent — aus unserer Konstruktion folgt also ohne weiteres, dass ihre Summe identisch ist einerseits mit  $e_1$ , andererseits mit  $e_2$ , also ist  $e_1 = e_2$ .

Beim Beweise des Satzes 2 brauchen wir den folgenden Satz von Herrn S. Banach<sup>4)</sup>, aus der allgemeinen Theorie der linearen Operationen.

**Hilfssatz.** Voraussetzung. Es seien  $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$   $B$ -Räume und  $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$  aber  $\mathfrak{B}'$  nicht mit  $\mathfrak{B}$  identisch.

Behauptung. Ein in  $\mathfrak{B}'$  definiertes Funktional  $\bar{A}(e)$  kann man immer zu einem im ganzen  $\mathfrak{B}$  definierten Funktional  $A(e)$  ergänzen und zwar so, dass in  $\mathfrak{B}'$   $\bar{A}(e) = A(e)$  sei und die Normen dieser Funktionale gleich seien.

<sup>4)</sup> S. Banach: Sur les fonctionelles linéaires, Studia Math. I (1929), p. 212–213. Der Satz ist dort übrigens sogar für beliebige (nicht notwendig vollständige) Vektorbereiche bewiesen. In derselben Arbeit sind (p. 211) die Begriffe *Funktional, linear, Norm* erklärt worden. Wir sagen hier kurz „Funktional“ statt „lineares Funktional“.

Die Folge  $\{e_i\}$ , mit  $e_n \in \mathfrak{B}$ , heisst *schwach konvergent*, wenn für jedes Funktional  $A$   $\lim_{i \rightarrow \infty} A(e_i)$  existiert. Im folgenden setzen wir voraus, dass  $\mathfrak{B}$  folgende Eigenschaft besitzt:

$$(W) \left\{ \begin{array}{l} \text{Aus der schwachen Konvergenz der Folge } \{e_i\} \text{ folgt} \\ \text{die Existenz der schwachen Grenze d. h. es existiert in } \mathfrak{B} \\ \text{ein Element } e, \text{ so dass für ein beliebiges Funktional} \\ \lim_{i \rightarrow \infty} A(e_i) = A(e) \\ \text{gilt.} \end{array} \right.$$

Diese Voraussetzung ist z. B. im Falle von  $B$ -Räumen  $S^d, T^d$ ,  $1 \leq d < \infty$ , erfüllt.

**Satz 2.** Voraussetzung.  $\mathfrak{B}$  besitzt die Eigenschaft (W).

Behauptung. Für die unbedingte Konvergenz der Reihe (1) ist notwendig und hinreichend, dass die Reihe

$$(3) \quad \sum_{v=1}^{\infty} |A(e_v)|$$

für jedes Funktional  $A$  konvergent sei.

**Beweis.** 1°. Die Bedingung ist notwendig.

Angenommen, die Reihe (1) sei unbedingt konvergent. Es existiert dann, wie sogleich ersichtlich, eine Konstante  $K$ , so dass bei beliebigen verschiedenen Indizes  $p_1, p_2, \dots, p_n$  die Ungleichung

$$\left\| \sum_{v=1}^n e_{p_v} \right\| \leq K$$

besteht. Wir haben also

$$\left| \sum_{v=1}^n A(e_{p_v}) \right| \leq \|A\| \cdot \|e_{p_1} + \dots + e_{p_n}\| \leq \|A\| \cdot K,$$

woraus die Konvergenz der Reihe (3) folgt.

2°. Die Bedingung (3) ist hinreichend.

Es genügt folgendes Lemma zu beweisen:

Wenn für die Elementenfolge  $\{a_i\}$  ( $a_i \in \mathfrak{B}$ ) die Ungleichungen

$$\|a_i\| \leq 1 \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

bestehen und die Reihe

$$(4) \quad \sum_{v=1}^{\infty} |A(a_v)|$$

bei jedem  $A$  konvergent ist, so hat das die Relation

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|a_i\| = 0$$

zur Folge.

Nehmen wir für einen Augenblick an, dieses Lemma sei schon bewiesen. Wäre nun (1) keine unbedingt konvergente Reihe, so müsste eine Folge  $e'_i = e_{p_{n_i}} + \dots + e_{p_{n_{i+1}}}$  ( $n_i < n_{i+1}$ ) existieren, so

dass  $\|e'_i\| \geq \varepsilon_0$ . Setzen wir jetzt  $\alpha_i = \frac{e'_i}{\|e'_i\|}$ , so ist die Bedingung (4) erfüllt und ausserdem ist  $\|\alpha_i\| = 1$ . Das ist aber ein Widerspruch mit dem Lemma, nach dem  $\lim_{i \rightarrow \infty} \|\alpha_i\| = 0$  sein muss.

Der Beweis des Lemmas gestaltet sich folgendermassen:

Bezeichnen wir mit  $\overline{\mathfrak{B}}$  den kleinsten  $B$ -Raum welcher alle Elemente  $a_i$  enthält, also den Vektorbereich, welcher aus allen linearen Kombinationen von  $a_i$  und deren Häufungspunkten besteht. —  $\overline{\mathfrak{B}}$  besitzt eine abzählbare überalldichte Teilmenge. Daraus folgt, dass man aus jeder Menge von Funktionalen (die in  $\mathfrak{B}$  definiert sind und beschränkte Normen haben) eine *schwach-konvergente* Folge herausgreifen kann, also eine Folge  $\{\overline{A}_i\}$  mit der Eigenschaft, dass für jedes  $a \in \overline{\mathfrak{B}}$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{A}_i(a) = \overline{A}(a).$$

$\overline{\mathfrak{B}}$  besitzt auch die Eigenschaft (W). Denn nehmen wir an,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{A}(a_i)$  existiere für jedes in  $\mathfrak{B}$  definierte Funktional. Nach dem Hilfssatze kann man jedes  $\overline{A}$  zu einem in  $\mathfrak{B}$  definierten  $A$  ergänzen (wenn überhaupt  $\mathfrak{B} \neq \overline{\mathfrak{B}}$ ) und umgekehrt entspricht jedem  $A$  ein  $\overline{A}$ . Die Folge  $\{a_i\}$  ist also auch in  $\mathfrak{B}$  schwach konvergent und zwar — da doch  $\mathfrak{B}$  die Eigenschaft (W) besitzt — gegen ein Grenzelement  $a$ . Dieses  $a$  muss dem  $\mathfrak{B}$  angehören. Anderenfalls kann man, mit Hilfe des Hilfssatzes, ein Funktional konstruieren, so dass  $A(a_i) = 0, A(a) \neq 0$  ist. Die Existenz eines solchen Funktionalen ist aber nicht mit der schwachen Konvergenz der  $\{a_i\}$  — Folge vereinbar.

Natürlich ist die Reihe

$$(4') \quad \sum_{v=1}^{\infty} |\overline{A}(a_v)|$$

auch für jedes in  $\mathfrak{B}$  definierte Funktional konvergent.

Wir behaupten jetzt:

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $N$ , so dass für jedes Funktional  $\bar{A}$  mit der Norm  $\leq 1$  die Ungleichung

$$(5) \quad \sum_{v=N}^{\infty} |\bar{A}(a_v)| \leq \varepsilon$$

gilt. Ist das nicht der Fall, so existiert  $\varepsilon_0 > 0$ , eine Indexfolge  $\{N_i\}$  (wobei  $N_i \rightarrow \infty$ ) und eine schwachkonvergente Folge  $\{\bar{A}_i\}$  von Funktionalen mit  $\|\bar{A}_i\| \leq 1$ , so dass die Ungleichung

$$(6) \quad \sum_{v=N_i}^{\infty} |\bar{A}_i(a_v)| \geq \varepsilon_0$$

besteht. Es sei  $\{d_i\}$  eine beliebige Zahlenfolge mit  $|d_i| \leq M$ .

Nach (4') ist die Folge  $\bar{A} \left( \sum_{v=1}^n d_v a_v \right) = \sum_{v=1}^n d_v \bar{A}(a_v)$  konvergent für

beliebiges  $\bar{A}$ , es ist also  $\sum_{v=1}^{\infty} d_v \bar{A}(a_v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{A} \left( \sum_{v=1}^n d_v a_v \right) = \bar{A}(a)$

( $a$  ist von  $\bar{A}$  unabhängig, nicht aber von  $\{d_i\}$ ). Da die Folge  $\{\bar{A}_i\}$  als schwachkonvergent vorausgesetzt war, so kann man die lineare Transformation

$$\sum_{v=1}^{\infty} d_v \bar{A}_1(a_v) = \bar{A}_1(a)$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} d_v \bar{A}_2(a_v) = \bar{A}_2(a)$$

...

$$\sum_{v=1}^{\infty} d_v \bar{A}_p(a_v) = \bar{A}_p(a)$$

...

mit der Matrix  $\{\bar{A}_p(a_q)\}$ , als eine lineare, konvergenzerzeugende Limitierungsmethode betrachten, die jeder beschränkten Folge eine Grenze zuordnet. Nun ist nach J. Schur<sup>5)</sup> dafür, dass eine Limitierungsmethode mit der Matrix  $(b_{pq})$ , diese Eigenschaft besitze, notwendig, dass bei jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N(\varepsilon)$  existiere, für welches

$$(7) \quad \sum_{v=N}^{\infty} |b_{pv}| \leq \varepsilon \quad (p = 1, 2, \dots).$$

<sup>5)</sup> J. Schur: Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen, J. f. r. u. ang. Math. 151 (1921). Vgl. pp. 82 u. 88-90.

Indem wir diesen Satz in unserem Falle anwenden, gelangen wir zum Widerspruch mit (6).

Aus (5) folgt sofort das Lemma. Es existiert nämlich, nach dem Hilfssatze, für jedes  $n$  ein Funktional  $\bar{A}_n$  mit der Norm  $\leq 1$ , so dass  $\bar{A}_n(a_n) = \|a_n\|$ . Nach (5) ist also  $\|a_n\| \leq \varepsilon$  für  $n \geq N$ .

**Satz 3.** Voraussetzung. Wie im Satz 2.

Behauptung. Für die unbedingte Konvergenz der Reihe (1) ist notwendig und hinreichend, dass ihre Partialsummen, bei jeder Anordnung der Glieder, beschränkt seien.<sup>6)</sup>

**Beweis.** Die Notwendigkeit der Bedingung ist trivial. Man beweist ganz analog wie unter 1° im vorigen Beweise, dass die Reihe (3) bei jedem  $A$  konvergiert, wenn die Partialsummen von (1) bei jeder Anordnung der Glieder beschränkt sind. Daraus folgt nach Satz 2 die unbedingte Konvergenz von (1). Die Bedingung ist also auch hinreichend.

Nicht in jedem  $B$ -Raume ist der Satz 2, bzw. der mit ihm äquivalente Satz 3, gültig. (Es handelt sich natürlich darum, ob die entsprechenden Bedingungen allgemein hinreichend sind; denn dass sie immer notwendig sind, ist sofort zu ersehen). Setzen wir z. B.:

$$h_n(x) = 1 \text{ wenn } x \in \left( \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n} \right), \text{ und}$$

$$h_n(x) = 0 \text{ für alle anderen } x \text{ aus } \langle 0, 1 \rangle.$$

Die Partialsummen der Reihe dieser beschränkten Funktionen, sind bei jeder Anordnung der Glieder beschränkt (im Sinne der Norm  $\|\cdot\|_{\infty}$ ) und trotzdem ist diese Reihe in  $S^{\infty}$  nicht konvergent. — Es gelten also in  $S^{\infty}$  die Sätze 2, 3 nicht — und ganz ähnlich auch z. B. im Falle des Bereiches der stetigen Funktionen oder der beschränkten Zahlenfolgen. (Das kann man natürlich auch als Beweis betrachten, dass die  $B$ -Räume  $S^{\infty}$ ,  $\mathcal{C}$  u. a. die  $W$ -Eigenschaft nicht besitzen).

Für gewöhnliche numerische Reihen ist die unbedingte Konvergenz mit der absoluten identisch. Bei allgemeineren Klassen von  $B$ -Räumen ist das nicht immer der Fall.

<sup>6)</sup> Dieser Satz wurde zuerst im Falle  $S^{\partial}$ ,  $\partial > 1$ , von Herrn S. Banach bewiesen. Wie dem Verfasser von Herrn Banach mitgeteilt wurde, verläuft sein Beweis ganz anders und ist schon für  $\partial = 1$  nicht anwendbar (und umso weniger im allgemeinen Falle). Nun ist aber vor allem der Grenzfall im nachfolgenden für uns von Interesse. Ich verdanke auch Herrn Banach eine Vereinfachung meiner ursprünglichen Voraussetzungen in den Sätzen 2, 3.

Wir werden das z. B. im Falle von  $S^\delta$  zeigen. Im Falle  $\delta = \infty$  setzen wir  $h_n(x) = \frac{1}{n}$  für  $\frac{1}{2^{n+1}} < x \leq \frac{1}{2^n}$ ,  $h_n(x) = 0$  für alle anderen  $x$  aus  $(0, 1)$ . Es ist klar, dass einerseits die Reihe  $\sum_{v=1}^{\infty} h_v(x)$  in  $S^\infty$  unbedingt konvergiert und andererseits die Reihe  $\sum_{v=1}^{\infty} \|h_v(x)\|_\infty$  divergiert. Es sei jetzt  $\delta = \beta \geq 2$ . Wir nehmen ein beliebiges, in  $S^1$  vollständiges  $OS$ , das aus gleichmäßig beschränkten Funktionen besteht und eine Zahlenfolge  $\{a_i\}$  so, dass  $\sum_{v=1}^{\infty} |a_v| = +\infty$ , aber  $\sum_{v=1}^{\infty} |a_v|^\alpha < +\infty$  ist ( $\alpha$  bezeichnet hier, wie immer, den zu  $\beta$  konjugierten Exponenten). Nach einem Satze von F. Riesz<sup>7)</sup> ist  $\{a_i\}$  in  $\Omega(\beta)$  enthalten und die Reihe  $\sum_{v=1}^{\infty} a_v \varphi_v(x)$  ist in  $S^\beta$  unbedingt konvergent. Diese Konvergenz ist aber nicht absolut, denn wir haben:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \|a_v \varphi_v(x)\|_\beta = \sum_{v=1}^{\infty} |a_v| \left( \int_0^1 |\varphi_v(x)|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} > C \sum_{v=1}^{\infty} |a_v| \quad (C > 0).$$

Die Reihe  $\sum_{v=1}^{\infty} a_v \varphi_v(x)$  ist natürlich auch in jedem Bereiche  $S^\delta$ ,  $\delta < \beta$ , unbedingt konvergent, aber auch nicht absolut.

§ 2.

Wir werden jetzt einen Spezialfall des Problems I betrachten. Gegeben sei ein  $OS\{\varphi_i(x)\}$ . Wir suchen eine Zahlenfolge  $\{p_i\}$ , von nichtnegativen Zahlen, mit folgender Eigenschaft:

Es existiert eine beschränkte Funktion  $h(x)$  mit Entwicklungskoeffizienten  $\{h_v\}$ , für welche die Reihe

$$(8) \quad \sum_{v=1}^{\infty} |h_v| p_v$$

divergiert.

Wir bemerken noch, dass man im obigen Problem „beschränkte Funktion“ immer durch „stetige Funktion“ ersetzen darf.<sup>8)</sup>

<sup>7)</sup> F. Riesz: Über eine Verallgemeinerung der Parsevalschen Formel, Math. Zeitschr. 18 (1923), Satz D, p. 124.

<sup>8)</sup> Vgl. W. Orlicz: Zur Theorie der Orthogonalreihen, Bull. Ac. Pol. (1927), p. 103–105.

**Satz 4.** Voraussetzung. Gegeben sei ein beliebiges  $OS\{\varphi_i(x)\}$ .

Behauptung. Man kann annehmen:

$$p_n = \frac{1}{\int_0^1 |\varphi_n(x)| dx}.$$

**Beweis.** Angenommen, die Reihe (8) konvergiere für jede beschränkte Funktion. Da sich ein beliebiges Funktional in  $S^1$  in der Form  $\int_0^1 h(x) f(x) dx$  darstellen lässt, bedeutet die letzte Annahme, dass für die Elemente  $e_i \in S^1$ ,  $e_i = \varphi_i(x) p_i$  die Reihe (3) bei beliebigen  $A$  (in  $S^1$ ) konvergiert. Nach dem Satze 2 folgt

daraus insbesondere  $\lim_{i \rightarrow \infty} \|e_i\|_1 = \lim_{i \rightarrow \infty} p_i \int_0^1 |\varphi_i(x)| dx = 0$ . Andererseits

ist aber  $p_i \int_0^1 |\varphi_i(x)| dx = 1$  und das ist ein Widerspruch.

Speziell interessant ist die Frage, wann man  $p_n = 1$  setzen kann. In diesem Falle sagen wir nach der Terminologie von Ort. Ent.,  $OS\{\varphi_i(x)\}$  weise die Singularität  $c^\infty$  auf.

**Satz 5.** Voraussetzung. Wie in Satz 4.

Behauptung. Damit  $OS$  die Singularität  $c^\infty$  nicht aufweise, ist die unbedingte Konvergenz der Reihe

$$(9) \quad \sum_{v=1}^{\infty} \varphi_v(x)$$

in  $S^1$  notwendig und hinreichend.

Wir sagen, das  $OS\{\varphi_i(x)\}$  besitze die Cantorsche Eigenschaft (die „ $c$ “ — Eigenschaft), wenn aus der Konvergenz fast überall der Reihe  $\sum_{v=1}^{\infty} c_v \varphi_v(x)$  immer  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$  folgt. Für das Bestehen

der Cantorschen Eigenschaft ist notwendig und hinreichend, dass es eine Zahl  $\varepsilon > 0$  gebe, mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |\varphi_n(x)| dx > 0$  für jede Menge  $E$ , wenn nur  $|E| > 1 - \varepsilon$ .<sup>9)</sup> Jedes  $OS$ , dessen Funktionen mit

<sup>9)</sup> Vgl. die unter <sup>8)</sup> zitierte Arbeit, p. 109–111.

einer quadratisch integrierbaren Funktion majorisierbar sind, besitzt die Eigenschaft „c“. — Aus Satz 5 folgt unmittelbar:

**Satz 6. Voraussetzung.** Das OS  $\{\varphi_i(x)\}$  besitzt die Cantorsche Eigenschaft.

**Behauptung.** Das OS  $\{\varphi_i(x)\}$  weist die Singularität  $c^\infty$  auf.

**Satz 7. Voraussetzung.** Das OS  $\{\varphi_i(x)\}$  weist die Singularität  $c^\infty$  auf.

**Behauptung.** Man kann

$$p_n = \frac{1}{\int_0^1 |\varphi_1(x) + \dots + \varphi_n(x)| dx}$$

annehmen.

**Beweis.** Nehmen wir an, dass die Reihe (8) bei den so gewählten  $p_n$  und beliebiger beschränkter Funktion  $h(x)$  konvergiert. Es muss jedenfalls  $\lim p_i = 0$  sein. Denn anderenfalls wäre die Reihe (8) divergent und zwar für die Funktion, für welche

$\sum_{v=1}^{\infty} |h_v| = +\infty$  ist. Wir definieren eine Folge  $p'_i$  folgendermassen:

$p'_1 = p_1$ ,  $p'_r = p_{n_i}$  für  $n_{i-1} < r \leq n_i$ , wo  $n_i$  der erste Index ist, für welchen  $p_{n_i} < p_{n_{i-1}}$  (es ist  $\lim_{i \rightarrow \infty} p'_i = 0$ ). Für die Folge  $\{p'_i\}$  ist wieder bei jeder beschränkten Funktion

$$\sum_{v=1}^{\infty} |h_v| p'_v < +\infty.$$

Man beweist leicht mit Hilfe des Satzes 2 die Existenz eines  $N_0$ , so dass für alle  $n_i > N_0$  die Ungleichung

$$\frac{\int_0^1 |\varphi_{N_0}(x) + \dots + \varphi_{n_i}(x)| dx}{\int_0^1 |\varphi_1(x) + \dots + \varphi_{n_i}(x)| dx} \leq \frac{1}{2}$$

gilt. Das steht aber im Widerspruch mit der evidenten Relation

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 |\varphi_{N_0}(x) + \dots + \varphi_{n_i}(x)| dx}{\int_0^1 |\varphi_1(x) + \dots + \varphi_{n_i}(x)| dx} = 1.$$

Für das trigonometrische OS haben wir z. B.  $\int_0^{2\pi} |\varphi_1(x) + \dots + \varphi_n(x)| dx \sim \lg n$ ,

aus Satz 7 können wir also ohne weiteres die Existenz einer stetigen (periodischen) Funktion entnehmen, für welche  $\sum_{v=2}^{\infty} \frac{|h_v|}{\lg v} = +\infty$ . (Alle Erwägungen dieses § können wir natürlich auch für periodische Funktionen führen). — Für

das Rademacher'sche<sup>10)</sup> OS ist  $\int_0^1 |\varphi_1(x) + \dots + \varphi_n(x)| dx \sim \sqrt{n}$ , es existiert

also in diesem OS eine stetige Funktion, für welche  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{|h_v|}{\sqrt{v}} = +\infty$ . Es folgt

daraus bei jedem positiven  $\epsilon$ , dass auch  $\sum_{v=1}^{\infty} |h_v| 2^{-\epsilon v} = +\infty$  ist; das Rademacher'sche OS weist also die Singularität  $C^\infty$  auf.

**Satz 8. Voraussetzung.** Gegeben sei ein beliebiges, in  $S^2$  vollständiges OS.

**Behauptung.** Man kann

$$p_n = w(n)$$

annehmen, wenn

$$(10) \quad \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{w^2(v)} < +\infty$$

ist.

**Beweis.** Anderenfalls wäre die Reihe  $\sum_{v=1}^{\infty} p_v \varphi_v(x)$  in  $S^1$  konvergent; es muss also auch, nach (10), die Reihe

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left( \int_0^1 |\varphi_v(x)| dx \right)^2$$

konvergent sein. Das ist aber für ein in  $S^2$  vollständiges OS unmöglich (Vgl. die unter 8) zit. Arbeit, Hilfssatz 7, p. 101).

Wir wenden uns jetzt dem Problem II zu. Wenn eine Folge  $\{p_i\}$ , bei gegebenem  $S^d$ , die Eigenschaft besitzt, welche wir im Problem II fordern, werden wir sagen, sie sei eine *Majorante* in  $\Omega(d)$ .

<sup>10)</sup> Ich verstehe darunter das von Herrn H. Rademacher definierte Orthogonalsystem. (Dieses OS findet Anwendungen bei verschiedenen Problemen der Wahrscheinlichkeitstheorie.) Vgl. H. Rademacher: Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, Math. Ann. 87 (1922), insbes. p. 130—138.

**Satz 9.** Voraussetzung. Gegeben sei ein in  $S^\delta$  vollständiges  $OS\{\varphi_i(x)\}$ , dessen Funktionen in  $S^\delta$  enthalten sind, wobei  $\delta < \infty$  ist.

Behauptung. Dafür, dass die Folge  $\{p_i\}$  eine Majorante in  $\Omega(\delta)$  sei, ist notwendig und hinreichend, dass die Reihe

$$(11) \quad \sum_{v=1}^{\infty} p_v \varphi_v(x)$$

in  $S^\delta$  unbedingt konvergiere.

**Beweis.** 1°. Die Bedingung ist notwendig.

Wenn  $\{p_i\}$  eine Majorante in  $\Omega(\delta)$  ist, so ist jede Folge  $\{\lambda_i p_i\}$  — wo  $\{\lambda_i\}$  eine beliebige beschränkte Folge bezeichnet — in  $\Omega(\delta)$  enthalten. Jedem  $\{\lambda_i p_i\}$  entspricht genau eine Funktion  $f_\lambda(x) = U[\{\lambda_i p_i\}]$  aus  $S^\delta$ , mit den Koeffizienten  $\lambda_i p_i$ . Ähnlich wie beim Beweise des Satzes 12 in Ort. Ent. (p. 25), sehen wir, dass man  $U[\{\lambda_i p_i\}]$  als eine Operation betrachten kann, deren Definitionsbereich aus der Menge  $\Gamma$  aller Folgen vom Typus  $\{\lambda_i p_i\}$  besteht. ( $\Gamma$  ist ein  $B$ -Raum; als Norm der Folge  $\{\lambda_i p_i\}$  setzen wir  $\max |\lambda_{n_i}|$ , wo die  $n_i$  alle — der Bedingung  $p_{n_i} \neq 0$  genügenden — Indizes bedeuten). Die Stetigkeit dieser Operation folgt im Falle  $\delta > 1$  ohne weiteres aus dem Hilfssatz 2 in Ort. Ent. Im Falle  $\delta = 1$  ist die Richtigkeit des Hilfssatzes 2 in Ort. Ent., nur unter Voraussetzung der Abgeschlossenheit in  $C$  bekannt.<sup>11)</sup> Nach Herrn S. Banach genügt es aber nur die Vollständigkeit in  $S^1$  vorzusetzen<sup>12)</sup>; es ist also unsere Operation auch im Grenzfalle stetig. — Wir haben also für jede Folge  $\{\lambda_i p_i\}$

$$(12) \quad \left\| \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v p_v \varphi_v(x) \right\|_p \leq K \max |\lambda_{n_i}|.$$

Aus dieser Ungleichung folgt schon leicht, mit Hilfe des Satzes 3, die unbedingte Konvergenz der Reihe (11).

2°. Die Bedingung ist hinreichend.

Aus der unbedingten Konvergenz in  $S^\delta$  der Reihe (11) folgt unmittelbar die absolute Konvergenz der Reihe

<sup>11)</sup> In unserem Falle ist die Bedingung (5) des Hilfssatzes 2 nicht erfüllt, das ist aber belanglos, da wir beim Beweise der Stetigkeit der in Frage kommenden Operation von (5) keinen Gebrauch gemacht haben.

<sup>12)</sup> Sur les fonctionelles linéaires II, *Studia Math.* I (1929), p. 232, lemme 5. Ich verdanke die Kenntniss dieses Lemmas einer vor der Niederschrift dieser Note von Herrn Banach erhaltenen, persönlichen Mitteilung.

$$\sum_{v=1}^{\infty} f_v \lambda_v p_v,$$

wobei  $\{f_i\} \in \Omega\left(\frac{\delta}{\delta-1}\right)$  und  $\{\lambda_i\}$  eine beliebige beschränkte Folge bezeichnet. Daraus folgern wir, nach Satz 3' in Ort. Ent. (vergl. auch die Fussnote <sup>30)</sup> p. 28, Ort. Ent.), dass  $\{\lambda_i p_i\} \in \Omega(\delta)$ .

**Satz 10.** Voraussetzung. Gegeben sei ein in  $S^\infty$  vollständiges  $OS\{\varphi_i(x)\}$ , dessen Funktionen beschränkt sind.

Behauptung. Dafür, dass die Folge  $\{p_i\}$  eine Majorante in  $\Omega(\infty)$  sei, ist notwendig und hinreichend, dass die Ungleichung

$$(13) \quad \sum_{v=1}^{\infty} p_v |\varphi_v(x)| < K$$

für fast jedes  $x$  besteht.

**Beweis.** Der vorige Beweis der Ungleichung (12) gilt ohne jede Veränderung auch im Grenzfalle  $\delta = \infty$ . In diesem Falle kann man aber aus dieser Ungleichung nicht auf die unbedingte Konvergenz, sondern nur auf (13) schliessen.<sup>13)</sup> Dass (13) hinreichend ist, folgt wieder mit Hilfe des schon erwähnten Satzes 3'.

**Satz 11.** Voraussetzung. Gegeben sei ein in  $S^\infty$  vollständiges  $OS$ , dessen Funktionen gleichmässig beschränkt sind.

Behauptung. Dafür, dass  $\{p_i\}$  eine Majorante in  $\Omega(\infty)$  sei, ist notwendig und hinreichend, dass die Ungleichung

$$\sum_{v=1}^{\infty} p_v < +\infty$$

gilt.

**Beweis.** Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des am Ende von Ort. Ent. gegebenen Korollars. Aus (13) folgt unmittelbar in diesem Falle die Konvergenz der Reihe  $\sum_{v=1}^{\infty} p_v$ .

**Satz 12.** Voraussetzung. Gegeben sei ein in  $S^\delta$  vollständiges  $OS\{\varphi_i(x)\}$ , dessen Funktionen mit der  $\delta$ -ten Potenz integrierbar sind.

Behauptung. Dann und nur dann besitzt die Folge  $\{p_i\}$  die Eigenschaft, die wir im Problem I bei gegebenem  $S^\delta$  fordern, wenn sie keine Majorante in  $\Omega\left(\frac{\delta}{\delta-1}\right)$  ist.

<sup>13)</sup> Vgl. Ort. Ent. Beweis des Satzes 16 und <sup>30)</sup>.

**Beweis.** Der Beweis folgt unmittelbar aus den Sätzen 9, 10.

Diesen Satz kann man z. B. benutzen zur Konstruktion von Folgen mit bestimmtem Wachstumstypus, die in  $\Omega(\delta)$  nicht enthalten sind — wenn man das entsprechende Problem I lösen kann. Aus den Sätzen 6, 10 folgert man leicht: ein in  $S^1$  vollständiges OS, das die Cantorsche Eigenschaft besitzt, weist die Singularität  $h^1$  auf.

Nehmen wir jetzt als Beispiel das Haar'sche System.

Für dieses OS haben wir  $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^1 |\varphi_i(x)| dx = 0$ . Daraus folgt

sofort, dass man für das Haar'sche OS, eine Majorante in  $\Omega(1)$  mit  $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = +\infty$  konstruieren kann. Es gilt aber der Satz:

Eine monotone Folge  $\{p_i\}$  ist dann und nur dann eine Majorante in  $\Omega(1)$ , wenn

$$\sum_{v=1}^{\infty} |p_v|^2 < +\infty$$

gilt.

Dass diese Bedingung hinreichend ist, folgt aus dem Riesz-Fischer'schen Satz.

Die Bedingung ist auch notwendig. Wir setzen  $c_v = p_{2^n}$  für  $2^{n-1} \leq v < 2^n$ . Die Reihe  $\sum_{v=1}^{\infty} c_v \varphi_v(x)$  ist, nach der bekannten

Eigenschaft des Haar'schen Systems, fast überall konvergent, da doch  $\{c_i\} \in \Omega(1)$ . Aber für das Haar'sche System haben wir (abgesehen von einer abzählbarer Menge)

$$\varphi_{2^{n-1}}(x) + \dots + \varphi_{2^n-1}(x) = -\sqrt{2^{n-1}} \psi_n(x),$$

wo  $\psi_n(x)$  die  $n$ -te Funktion des Rademacher'schen OS bedeutet.

Es ist also die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2^{n-1}} p_{2^n} \psi_n(x)$$

fast überall konvergent, was nach einem Satze von Kolmogoroff<sup>14)</sup>

nur dann möglich ist, wenn  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n p_{2^n}$  endlich ist. Es ist also auch

$$\sum_{v=1}^{\infty} p_v^2 < +\infty.$$

<sup>14)</sup> A. Khintchine-A. Kolmogoroff: Über Konvergenz von Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden, Recueil de la Soc. Mathém. de Moscou 1925 (insb. p. 675—676).

Aus dem vorhergehenden Satze folgt, dass das Haar'sche OS die Singularität  $H^1$  aufweist. Es genügt z. B.  $p_n = \frac{1}{\sqrt{n \lg n}}$  zu setzen — denn diese Folge ist keine Majorante in  $\Omega(1)$ , aber es gilt, bei jedem  $\varepsilon > 0$ ,  $\sum_{v=1}^{\infty} p_v^{2+\varepsilon} < +\infty$ . Nach den Sätzen 22, 17 in Ort. Ent. folgt daraus auch die Existenz der Singularität  $C^\infty$ .<sup>15)</sup>

Übrigens kann man hier unmittelbar den Satz 12 anwenden, es folgt aus ihm die Existenz einer beschränkten Funktion, mit der Eigenschaft

$$\sum_{v=2}^{\infty} \frac{|h_v|}{\sqrt{v \lg v}} = +\infty,$$

für welche also auch  $\sum_{v=1}^{\infty} |h_v|^{2-\varepsilon} = +\infty$ , bei jedem  $\varepsilon > 0$ .<sup>16)</sup>

Man darf vermuten, dass ein dem vorhergehenden analoger Satz (event. auch ohne Voraussetzung der Monotonie) auch für das trigonometrische OS besteht.

(Reçu par la Rédaction le 22. 2. 1929)<sup>17)</sup>

<sup>15)</sup> Vgl. die unter <sup>8)</sup> zitierte Arbeit, p. 105—106.

<sup>16)</sup> Wir bemerken noch, dass mit der Benutzung des obigen Zusammenhanges zwischen Haar'schen und Rademacher'schen Orthogonalfunktionen, man auch beweisen kann, dass die Reihe  $\sum_{v=1}^{\infty} a_v \psi_v(x)$ , unter der Voraussetzung

$\sum_{v=1}^{\infty} a_v^2 < +\infty$ , fast überall konvergiert (vgl. die unter <sup>10)</sup> zit. Arbeit) — wenn wir die entsprechende Eigenschaft für das Haar'sche OS als bekannt voraussetzen.

— Es genügt nämlich zu setzen  $c_v = \frac{a_n}{\sqrt{2^n}}$  für  $2^n \leq v < 2^{n+1}$ . Die Reihe

$\sum_{v=1}^{\infty} c_v^2$ , konvergiert dann und es gilt die Relation

$$\sum_{v=1}^{\infty} c_v \varphi_v(x) = \frac{a_n}{\sqrt{2^n}} \sum_{v=2^n}^{2^{n+1}} \varphi_v(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x).$$

<sup>17)</sup> Vgl. <sup>12)</sup>