En raison de la continuité complète de la fonctionelle U, on peut donc extraire de $\{Y_n\}$ une suite partielle convergeante. L'ensemble E' est donc compact, et comme il est partout dense dans l'espace E, E est aussi compact. [11])

(Reçu par la Rédaction le 4. V. 1929).

[11]) l'énoncé que nous venons d'établir, étend le fait bien connu que l'équation de Fredholm de 1e espèce n'est pas, en général, résoluble. D'ailleurs, dans le cas où l'espace E est l'espace hilbertien, notre énoncé découle du théorème connu de MM. Picard-Schmidt sur l'équation intégrale de 1re éspèce, ce théorème s'étendant sans modifications à toute équation de la forme $U(X)=Y$, où U désigne une fonctionnelle linéaire complètement continue dans l'espace de Hilbert. (Voir, p. ex., Lalesco, Introduction à la théorie des équations intégrales, 1912. (Chap. IV)).

Sur les fonctionnelles linéaires II *)

par

S. BANACH (Lwów).

§ 1.

Soient $\{\sigma_n\}$ $(\sigma_1=1)$ une suite numérique à termes positifs croissants indéfiniment et $\{a_n\}$ une suite des éléments telle que $\|a_n\|\leqslant 1$ $(n=1,2,3,\ldots)$. $f(x)$ étant une fonctionnelle linéaire nous désignerons, dans ce qui va suivre, par $\|f\|^*$, le plus petit nombre positif K, pour lequel

$$|f(a_n)|\leqslant K\sigma_n \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Nous dirons que $\|f\|^*$ est la norme de f relative aux suites $\{\sigma_n\}$, $\{a_n\}$.

On a évidemment

1° $\|f\|^*\geqslant 0$

2° $\|\alpha f\|^*=|\alpha|\,.\,\|f\|^*$ $(\alpha$ réel)

3° $\|f+\varphi\|^*\leqslant\|f\|^*+\|\varphi\|^*$

4° $\|f\|^*\leqslant\|f\|$.

De même, $z=\{\zeta_n\}$ étant une suite bornée des nombres réels, nous désignerons par $\|z\|^*$ le plus petit nombre K pour lequel $|\zeta_n|\leqslant K\sigma_n$ $(n=1,2,\ldots)$. Dans ce qui va suivre nous supposons toujours, que l'ensemble des elements E est véctoriel, normé et complet [10]).

Lemme 1. Soit L un ensemble linéaire [1]) des fonctionnelles linéaires. Supposons qu'à chaque fonctionnelle de L corresponde un nombre $A(f)$ remplissant les relations:

*) Voir S. Banach. Sur les fonctionelles linéaires. Stud. math. I (1929), p. 211—216. Cette communication sera citée dans la suite comme „I".

[1]) Un ensemble L de fonctionnelles linéaires est dit *linéaire* lorsqu'il contient toute combinaison linéaire à coefficients réels de deux quelconques de ses fonctionnelles.

$$A(f_1+f_2)=A(f_1)+A(f_2)$$
$$|A(f)|\leqslant M\|f\|^*,$$

M étant une constante positive. Il existe alors un élément x_0 tel que

$$\|x_0\|\leqslant M, \qquad A(f)=f(x_0) \qquad (f\subset L).$$

Démonstration. Désignons par W l'ensemble des suites numériques $w=\{f(a_n)\}$ correspondantes aux diverses fonctionnelles f de L. Ces suites sont évidemment bornées et on a

$$\|w\|^*=\|f\|^*,$$

f étant une fonctionnelle quelconque de L et w la suite correspondante.

Posons

(1) $$F(w)=A(f) \qquad (w\subset W).$$

On a

$$F(w_1+w_2)=F(w_1)+F(w_2)$$
$$|F(w)|\leqslant M\|w\|^*.$$

$F(w)$ est donc une fonctionnelle linéaire définie dans l'ensemble linéaire W. Par conséquent[2]), il existe une fonctionnelle linéaire $\Phi(z)$, définie dans tout l'ensemble Z, telle que

(2) $$\Phi(z)=F(z) \qquad (z\subset W)$$
$$|\Phi(z)|\leqslant M\|z\|^* \qquad (z\subset Z).$$

Désignons par z_i la suite $\{\zeta_n^{(i)}\}$ définie par

$$\zeta_n^{(i)}=0 \qquad n\neq i, \qquad \zeta_i^{(i)}=1;$$

il est aisé de voir que

$$\lim_{n\to\infty}\|z-\sum_{i=1}^{n}\zeta_i z_i\|^*=0,$$

quelque soit la suite bornée $z=\{\zeta_n\}$.

Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty}|\Phi(z)-\sum_{i=1}^{n}\Phi(z_i)\zeta_i|=0$$

ou

(3) $$\Phi(z)=\sum_{i=1}^{\infty}\Phi(z_i)\zeta_i \qquad (z\subset Z).$$

[2]) Voir I, p. 213, Téorème 2.

Pour la suite particulière z_0 définie comme il suit:

$$\left.\begin{array}{ll}\zeta_i=\operatorname{sign}\Phi(z_i) & (\Phi(z_i)\neq 0)\\ \zeta_i=1 & (\Phi(z_i)=0)\end{array}\right\}(i=1,2,\ldots),$$

on a évidemment

$$\|z_0\|^*=1$$

et

$$\Phi(z_0)=\sum_{i=1}^{\infty}|\Phi(z_i)|,$$

il vient donc en vertu de (2)

(4) $$\sum_{i=1}^{\infty}|\Phi(z_i)|\leqslant M.$$

Posons maintenant

(5) $$x_0=\sum_{i=1}^{\infty}\Phi(z_i)\,a_i;$$

on aura en vertu de (4)

$$\|x_0\|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|\Phi(z_i)|\leqslant M.$$

Enfin les relations (1), (2), (3) donnent

$$A(f)=\sum_{i=1}^{\infty}\Phi(z_i)\,f(a_i), \qquad (f\subset L)$$

donc en vertu de (5)

$$A(f)=f\left(\sum_{i=1}^{\infty}\Phi(z_i)\,a_i\right)=f(x_0) \qquad (f\subset L).$$

Lemme 2. Soit L un ensemble linéaire des fonctionnelles linéaires et φ une fonctionnelle linéaire qui n'y appartient pas. Supposons qu'il existe un nombre $M>0$ tel que

$$\|f-\varphi\|^*\geqslant M \qquad (f\subset L)$$

Il existe alors un élément x_0 tel que

$$f(x_0)=0, \qquad (f\subset L)$$
$$\varphi(x_0)=1,$$
$$\|x_0\|\leqslant\frac{1}{M}.$$

Démonstration. Soit L' l'ensemble linéaire des fonctionnelles linéaires

(1) $$\psi=f+\lambda\varphi \qquad (f\subset L,\ \lambda \text{ réel})$$

Posons par définition [3])

$$A(\psi)=\lambda; \qquad (\psi \subset L')$$

on a évidemment

$$A(\psi_1+\psi_2)=A(\psi_1)+A(\psi_2),$$

$$|A(\psi)|=|\lambda|.$$

En outre, si $\lambda \neq 0$,

$$\|\psi\|^*=|\lambda|.\|-\frac{1}{\lambda}f-\varphi\|^* \geqslant |\lambda|.M,$$

donc

$$|A(\psi)|\leqslant \frac{1}{M}\|\psi\|^*.$$

Il existe donc, par le lemme précédent, un élément x_0 tel que

$$\|x_0\|\leqslant \frac{1}{M}$$

et

$$A(\psi)=\psi(x_0) \qquad (\psi \subset L').$$

En tenant compte de (1) et de la définition de $A(\psi)$, la dernière égalité devient

$$\lambda=f(x_0)+\lambda\varphi(x_0) \qquad (f\subset L,\ \lambda \text{ réel}),$$

c'est à dire

$$f(x_0)=0 \ (f\subset L), \qquad \varphi(x_0)=1.$$

§ 2.

Théorème 1. $p(x)$ étant une fonctionnelle remplissant les relations

$$1^\circ \quad p(x+y)\leqslant p(x)+p(y),$$

$$2^\circ \quad p(\lambda x)=\lambda p(x), \qquad (\lambda \geqslant 0)$$

il existe une fonctionnelle additive [4]) $f(x)$ remplissant l'inégalité

$$-p(-x)\leqslant f(x)\leqslant p(x) \qquad (x\subset E).$$

Démonstration. Soit $f(x)$ une fonctionnelle additive définie dans un ensemble linéaire G et y remplissant l'inégalite $f(x)\leqslant p(x)$. Nous prouverons que, y_0 étant un élément non appartenant à G, il est possible d'étendre la définition de $f(x)$ à l'ensemble liné-

[3]) Cette définition est univoque, parce que la fonctionnelle φ n'est pas contenue dans L.

[4]) Une fonctionnelle $f(x)$ est *additive* lorsqu'elle remplit l'équation $f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$ quelques soient les éléments x, y et les nombres réels α, β.

aire G_1 formé par les éléments $Z=x+\lambda y_0$ ($x\subset G$, λ réel), en maintenant l'inégalité $f(x)\leqslant p(x)$.

On a, pour $x\subset G$, $\bar{x}\subset G$,

$$f(x+\bar{x})\leqslant p(x+\bar{x})=p(x+y_0+\bar{x}-y_0)\leqslant p(x+y_0)+p(\bar{x}-y_0),$$

donc

$$-p(\bar{x}-y_0)+f(\bar{x})\leqslant p(x+y_0)-f(x).$$

Il existe donc [5]) un nombre α tel que

$$(1) \qquad -p(\bar{x}-y_0)+f(\bar{x})\leqslant\alpha\leqslant p(x+y_0)-f(x) \qquad (x\subset G,\ \bar{x}\subset G).$$

Posons dans G_1

$$\varphi(z)=\varphi(x+\lambda y_0)=f(x)+\lambda\alpha.$$

Cette fonctionnelle $\varphi(z)$ est additive et égale à $f(z)$ si $z\subset G$. Nous allons voir qu'elle remplit aussi l'inégalité $\varphi(z)\leqslant p(z)$ ($z\subset G_1$).

On a, en vertu de (1),

$$\lambda\alpha\leqslant p(\lambda x+\lambda y_0)-f(\lambda x) \qquad (x\subset G,\ \lambda\geqslant 0),$$

d'où, en posant $\lambda x=\bar{x}$ et $\bar{x}+\lambda y_0=z$,

$$f(\bar{x})+\lambda\alpha\leqslant p(\bar{x}+\lambda y_0),$$

c'est à dire

$$\varphi(z)\leqslant p(z).$$

Si $\lambda<0$, l'inégalité (1) donne encore

$$-p(-\lambda\bar{x}+\lambda y_0)+f(-\lambda\bar{x})\leqslant-\lambda\alpha,$$

d'où, en posant $-\lambda\bar{x}=x$ et $x+\lambda\alpha=z$,

$$f(x)+\lambda\alpha\leqslant p(z),$$

c'est à dire

$$\varphi(z)\leqslant p(z).$$

Cela posé, soit $x_1=\theta$ (l'élément nul) le premier élément de l'ensemble E supposé bien ordonné. Posons $f(x_1)=0$; on aura $f(x_1)=p(x_1)$. En étendant la définition de $f(x)$ de proche en proche à l'aide du raisonnement précédent, on obtient une fonctionnelle additive $f(x)$ définie dans l'ensemble E et y remplissant l'inégalité $f(x)\leqslant p(x)$.

[5]) Voir I, p. 212.

Il s'ensuit

$$f(-x) \leqslant p(-x),$$

donc

$$-p(-x) \leqslant f(x) \leqslant p(x).$$

Remarque. S'il existe une constante $M > 0$ telle que $p(x) \leqslant M\|x\|$, alors $|f(x)| \leqslant M\|x\|$, donc $\|f\| \leqslant M$.

Définition. Soit ϑ un nombre ordinal limite, c'est à dire privé d'un précédent immédiat. Soit $\{c_\xi\}$ $(1 \leqslant \xi < \vartheta)$ une suite bornée des nombres réels du type ordinal ϑ. Nous désignerons par

$$\overline{\lim_{\xi \to \vartheta}}\, c_\xi$$

la borne inférieure des nombres K remplissants l'inégalité $c_\xi \leqslant K$ à partir d'un certain nombre ordinal (dépendant de K). On définit de même

$$\underline{\lim_{\xi \to \vartheta}}\, c_\xi = -\overline{\lim_{\xi \to \vartheta}}\,(-c_\xi)$$

Lemme 3. Soit $\{f_\xi(x)\}$ une suite des fonctionnelles linéaires du type ϑ telle que $\|f_\xi\| \leqslant M$ $(1 \leqslant \xi < \vartheta)$. Il existe alors une fonctionnelle linéaire $f(x)$ satisfaisant pour tout x à l'inégalité

$$\underline{\lim_{\xi \to \vartheta}}\, f_\xi(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{\lim}\, f_\xi(x).$$

Démonstration. Posons

$$p(x) = \overline{\lim_{\xi \to \vartheta}}\, f_\xi(x) \quad (\text{donc } p(-x) = -\underline{\lim_{\xi \to \vartheta}}\, f_\xi(x)).$$

La fonctionnelle $p(x)$ remplissant évidemment les hypothèses du théorème 1. il existe une fonctionnelle additive $f(x)$ de manière que

$$-p(-x) \leqslant f(x) \leqslant p(x)$$

On a encore, en vertu de $|p(x)| \leqslant M\|x\|$,

$$|f(x)| \leqslant M\|x\|,$$

$f(x)$ est donc une fonctionnelle linéaire.

Définition. Toute fonctionnelle linéaire remplissant l'inégali du lemme précédent sera dite une *fonctionnelle-limite* de la sui $\{f_\xi(x)\}$.

Définition. Un ensemble linéaire L des fonctionnelles linéaires est dit *faiblement fermé* si, pour chaque nombre ordinal ϑ

et chaque suite $\{f_\xi\}$ du type ϑ des fonctionnelles linéaires telles que

$$f_\xi \subset L, \quad \|f_\xi\| \leqslant M, \qquad (1 \leqslant \xi < \vartheta)$$

il existe une fonctionnelle-limite appartenante à L.

Théorème 2. Soit L un ensemble linéaire des fonctionnelles linéaires faiblement fermé et φ une fonctionnelle linéaire qui n'y appartient pas. Désignons par M la borne inférieure des nombres $\|f-\varphi\|$ $(f \subset L)$ et par M_1 un nombre positif $< M$, d'ailleurs quelconque [6]). Il existe un élément x_0 tel que

$$f(x_0) = 0 \qquad (f \subset L),$$

$$\varphi(x_0) = 1,$$

$$\|x_0\| \leqslant \frac{1}{M_1}.$$

Démonstration. Soit $\{M_i\}$ une suite numérique croissante indéfiniment dont le premier terme est le nombre donné M_1 $(0 < M_1 < M)$. Soit $\aleph$ le plus grand nombre cardinal jouissant de la propriété suivante:

G étant un ensemble arbitraire de puissance $< \aleph$, il existe une fonctionnelle linéaire $f(x)$ telle que

$$(1) \qquad f \subset L, \quad \|f\| \leqslant M_2, \quad |f(x) - \varphi(x)| \leqslant M_1\|x\| \qquad (x \subset G).$$

Le nombre cardinal de l'ensemble E est $\geqslant \aleph$. En effet, dans le cas contraire, on aurait une fonctionnelle linéaire $f(x)$, pour laquelle

$$|f(x) - \varphi(x)| \leqslant M_1\|x\| \qquad (x \subset E),$$

donc

$$\|f - \varphi\| \leqslant M_1 < M,$$

ce qui est impossible.

Nous allons prouver que $\aleph$ est un nombre fini, c'est à dire, un entier. Supposons donc que $\aleph$ n'est pas fini. Soit $G (\subset E)$ un ensemble arbitraire de puissance $\aleph$. Rangeons ses éléments dans une suite transfinie bien ordonnée $\{x_\xi\}$ du type ordinal ϑ, ϑ désignant le plus petit nombre ordinal de puissance $\aleph$; c'est évi-

[6]) Il est aisé de voir que $M > 0$. Supposons en effet que $M = 0$. L'ensemble L contient alors une suite $\{f_n\}$ telle que $\lim\limits_{n \to 8} \|f_n - \varphi\| = 0$. La suite des normes $\{\|f_n\|\}$ étant bornée en vertu de $\|f_n\| \leq \|f_n - \varphi\| + \|\varphi\|$, la suite $\{f_n\}$ admet une fonctionnelle-limite contenue dans L. Or, on a $|f_n(x) - \varphi(x)| \leq$ $\leq \|f_n - \varphi\| . \|x\|$, donc $\varphi(x) = \lim f_n(x)$ $(x \subset E)$. La fonctionnelle φ est donc la seule fonctionnelle-limite de la suite $\{f_n\}$. Par conséquent $\varphi \subset L$, ce qui n'est pas.

demment un nombre limite. Si $\eta < \vartheta$, alors, l'ensemble $\{x_\xi\}$ $(1 \leqslant \xi < \eta)$ étant de puissance $< \aleph$, il existe une fonctionnelle linéaire f_η remplissant les relations

$$(2) \qquad f_\eta \subset L, \quad \|f_\eta\| \leqslant M_2, \quad |f_\eta(x_\xi) - \varphi(x_\xi)| \leqslant M_1 \|x_\xi\| \qquad (\xi < \eta).$$

L'ensemble L étant faiblement fermé, la suite $\{f_\eta\}$ $(1 \leqslant \eta < \vartheta)$ admet une fonctionnelle limite $f \subset L$, satisfaisante en vertu de (2) aux conditions

$$\|f\| \leqslant M_2, \quad |f(x_\xi) - \varphi(x_\xi)| \leqslant M_1 \|x_\xi\| \qquad (1 \leqslant \xi < \vartheta).$$

On peut donc à tout ensemble $G (\subset E)$ de puissance $\aleph$ faire correspondre une fonctionnelle linéaire $f(x)$ remplissante les conditions (1), contrairement à la définition de $\aleph$.

Le nombre $\aleph$ étant fini, il existe un ensemble fini $K_1 (\subset E)$ tel que toute fonctionnelle linéaire $f(x)$, satisfaisante aux conditions

$$\|f - \varphi\| \leqslant M_2, \quad |f(x) - \varphi(x)| \leqslant M_1 \|x\| \qquad (x \subset K_1),$$

n'est pas contenue dans L. On peut supposer que les éléments de l'ensemble K_1 ont les normes égales à 1, en les multipliant au besoin par des constantes convenables. Les conditions ci-dessus deviennent alors

$$\|f - \varphi\| \leqslant M_2, \quad |f(x) - \varphi(x)| \leqslant M_1 \qquad (x \subset K_1).$$

On établit de même, par induction, l'existence d'une suite $\{K_i\}$ des ensembles finis telle que toute fonctionnelle linéaire $f(x)$, satisfaisant pour un n naturel aux conditions

$$\|f - \varphi\| \leqslant M_n, \quad |f(x) - \varphi(x)| \leqslant M_i \quad (x \subset K_i,\ i < n),$$

n'est pas contenue dans L.

Par conséquent, aucune fonctionnelle linéaire $f(x)$, satisfaisant aux conditions

$$|f(x) - \varphi(x)| \leqslant M_i, \qquad (x \subset K_i, \quad i = 1, 2 \ldots)$$

n'est pas contenue dans L.

Considérons la suite $\{a_n\}$, obtenue en écrivant succesivement les éléments de K_1, de K_2 et ainsi de suite. Posons $n_0 = 0$, $n_i = \sum_{r=1}^{i} l_r$, l_r désignant le nombre des éléments de K_r, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_n = \dfrac{M_{n_i}}{M_1}$ $(n_{i-1} < n \leqslant n_i)$. Avec ces notations le résultat précédent devient:

„Aucune fonctionnelle, satisfaisante aux conditions

$$|f(a_n) - \varphi(a_n)| \leqslant M_1 \sigma_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

n'est pas contenue dans L."

On a donc, pour la norme déterminée par les suites $\{a_n\}$ et $\{\sigma_n\}$, l'inégalité

$$\|f - \varphi\|^* \geqslant M_1 \qquad (f \subset L).$$

Il existe donc (lemme 2) un élément x_0 tel que $f(x_0) = 0$, $(f \subset L)$, $\varphi(x_0) = 1$, $\|x_0\| \leqslant \dfrac{1}{M_1}$.

Corollaire. Un ensemble faiblement fermé linéaire L des fonctionnelles linéaires, tel que l'element nul Θ est le seul pour lequel s'annulent toutes ses fonctionnelles, contient nécessairement toutes les fonctionnelles linéaires.

§ 3.

Définition. On dit qu'une suite des fonctionnelles linéaires est *faiblement convergente* vers une fonctionnelle $f(x)$, lorsque

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \qquad (x \subset E).$$

Nous écrivons dans ce cas simplement

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f \text{ [7]}.$$

J'ai démontré dans ma Thèse un théorème, dont il s'ensuit que la fonctionnelle f est aussi linéaire et que la suite $\{\|f_n\|\}$ est bornée [8]).

Lemme 4. Si, pour une suite donneé $\{x_n\}$, la suite $\{f(x_n)\}$ est toujours convergente, quelque soit la fonctionnelle linéaire $f(x)$, alors la suite $\{\|x_n\|\}$ est borneé.

Démonstration. On peut, en effet, considérer $\{f(x_n)\}$ comme une fonctionnelle $A_n(f)$ définie dans l'ensemble des fonctionnelles linéaires $f(x)$. La suite $\{A_n(f)\}$ étant par l'hypothèse faiblement convergente, le théorème, dont nous venons de parler, nous enseigne que la suite $\{\|A_n(f)\|\}$ est borneé. Or, on a

$$|A_n(f)| \leqslant \|x_n\| . \|f\|,$$

---

[7]) En vertu de l'inégalité $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \|f_n - f\| . \|x\|$ toute suite convergente (suivant la norme) est aussi faiblement convergente vers la même fonctionnelle $f(x)$.

[8]) Fund. Math. III. (1922), p. 157, Théorème 5.

l'égalité ayant lieu pour toute fonctionnelle f telle que $f(x_n) = \|x_n\|$ et $\|f\| = 1$. Par conséquent, $\|A_n\| = \|x_n\|$. La suite $\{\|x_n\|\}$ est donc bornée.

Remarque. On démontre aisément qu'une suite $\{f_n\}$ des fonctionnelles, dont les normes forment une suite bornée, est faiblement convergente, lorsqu'il existe $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ pour tout x appartenant à un ensemble G partout dense dans E.

Lemme 5. Si l'ensemble E est séparable[9]), alors toute suite des fonctionnelles, dont les normes forment une suite bornée, contient une suite faiblement convergente.

Démonstration. Il suffit, d'après la remarque précédente, d'extraire une suite partielle convergente dans un ensemble dénombrable partout dense. On le fait par la méthode bien connue des diagonales.

Définition. Un ensemble L des fonctionnelles linéaires est dit *faiblement séparable*, lorsqu'il contient une suite dénombrable $\{f_n\}$ des fonctionnelles jouissant de la propriété suivante: quelque soit la fonctionnelle $f \subset L$, la suite $\{f_n\}$ contient une suite partielle faiblement convergente vers f.

Lemme 6. Si l'ensemble E est séparable, tout ensemble L des fonctionnelles linéaires est faiblement séparable.

Démonstration. On peut supposer que les normes des fonctionnelles de L sont bornées. En effet, tout ensemble L est une somme dénombrable des ensembles satisfaisant à cette condition.

Soit $\{x_n\}$ une suite des éléments partout dense dans E. Désignons par Z_n l'ensemble formé par les points

$$\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$$

correspondants aux diverses fonctionnelles de L dans l'espace euclidien à n dimensions. Cet ensemble Z_n étant séparable, il existe un ensemble dénombrable K_n des fonctionnelles de L tel que les points correspondants forment un ensemble partout dense dans Z_n.

Posons

$$R = \sum_{i=1}^{\infty} K_i .$$

Cet ensemble R de fonctionnelles est dénombrable. Pour une fonctionnelle quelconque de L il existe évidemment une suite $\{f_n\}$ des fonctionnelles remplissant les conditions:

[9]) C'est à dire contenant un sous-ensemble dénombrable et partout dense.

1° $f_n \subset K_n \subset R$

2° $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \dfrac{1}{n}$ $\qquad (i = 1, 2, \ldots n)$

Les normes $\|f_n\|$ formant par l'hypothèse une suite bornée on a, d'après la remarque faite au Lemme 4,

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

Théorème 3. Si l'ensemble E est séparable, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble L des fonctionnelles linéaires soit faiblement fermé, est que la limite de toute suite faiblement convergente de fonctionnelles de L soit aussi une fonctionnelle de L.

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire. Nous allons prouver qu'elle est aussi suffisante.

Soit $\{f_\xi\}$ $(1 \leqslant \xi < \vartheta)$ une suite du type ϑ telle que $f_\xi \subset L$ et $\|f_\xi\| \leqslant M$ $(1 \leqslant \xi < \vartheta)$. Désignons par $\{x_n\}$ un ensemble dénombrable partout dense dans E. On peut faire correspondre à tout n naturel un nombre ordinal ξ_n de manière que

$$\varliminf_{\xi\to\vartheta} f_\xi(x_i) - \frac{1}{n} \leqslant f_{\xi_n}(x_i) \leqslant \varlimsup_{\xi\to\vartheta} f_\xi(x_i) + \frac{1}{n} \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

La suite $\{f_{\xi_n}\}$ contient (lemme 5) une suite partielle faiblement convergente, dont la limite est évidemment une fonctionnelle-limite de la suite $\{f_\xi\}$, contenue par l'hypothèse dans L.

Définition. Lorsqu'à toute fonctionnelle f d'un ensemble linéaire L correspond un nombre $A(f)$ remplissant les conditions:

1° $A(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 A(f_1) + \alpha_2 A(f_2)$
$\qquad (f_1 \subset L,\ f_2 \subset L;\ \alpha_1,\ \alpha_2$ réels),

2° on a $\lim_{n\to\infty} A(f_n) = A(f)$, toute fois que

$$f_n \subset L \text{ et } \lim_{n\to\infty} f_n = f \subset L,$$

nous dirons que $A(f)$ est une *opération linéaire faiblement continue*, définie dans L.

Il est aisé à prouver qu'il existe alors un $M > 0$ tel que

$$|A(f)| \leqslant M\|f\| \qquad (f \subset L).$$

Théorème 4. Soit L un ensemble linéaire faiblement fermé des fonctionnelles linéaires, définies dans un ensemble séparable

E, et $A(f)$ une opération linéaire faiblement continue, définie dans L et y remplissant l'inégalité

$$|A(f)| \leqslant M\|f\|.$$

Etant donné un nombre $M_1 > M$, d'ailleurs quelconque, il existe un element x_0 tel que

$$A(f) = f(x_0) \qquad (f \subset L)$$
$$\|x_0\| \leqslant M_1.$$

Démonstration. Désignons par L' le sous-ensemble de L défini par l'égalité $A(f) = 0$. C'est évidemment un ensemble linéaire faiblement fermé.

Soit φ un élément de L tel que $A(\varphi) = 1$. On a pour tout $f \subset L'$

$$A(f+\varphi) = 1 \leqslant M\|f+\varphi\|,$$

donc

$$\|f+\varphi\| \geqslant \frac{1}{M} \qquad (f \subset L').$$

Il existe donc (théorème 2) un élément x_0 de sorte que

$$f(x_0) = 0 \qquad (f \subset L'),$$
$$(1) \qquad \varphi(x_0) = 1,$$
$$\|x_0\| \leqslant M_1.$$

Si ψ est une fonctionelle quelconque de L, écrivons

$$\psi = [\psi - \varphi A(\psi)] + \varphi A(\psi).$$

La fonctionelle $\psi - \varphi A(\psi)$ étant contenue dans L', il vient en vertu de (1),

$$\psi(x_0) = \varphi(x_0) A(\psi) = A(\psi).$$

§ 4.

Soient E, E' deux ensembles vectoriels normés et complets[10]). Supposons qu'à tout élément x de E corresponde un élément y de E'

$$y = U(x).$$

Nous dirons alors que $U(x)$ est une *opération* définie dans E.

Une opération $U(x)$

[10]) Un ensemble vectoriel et normé est *complet*, lorsque toute suite $\{x_n\}$ de ses éléments, remplissante la condition $\lim\limits_{\substack{p\to\infty \\ q\to\infty}} \|x_p - x_q\| = 0$, est convergente.

1° *additive*, c'est à dire telle que

$$U(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha U(x_1) + \beta U(x_2),$$

2° *continue*, c'est à dire telle que

$$\lim_{n\to\infty} U(x_n) = U(x),$$

$$\text{toute fois que } \lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

sera dite une *opération linéaire*.

Il est aisé à prouver qu'il existe alors un nombre $M > 0$ tel que

$$\|U(x)\| \leqslant M\|x\|.$$

Réciproquement, une opération additive remplissante cette inégalité, est linéaire.

Nous désignerons les fonctionnelles linéaires définies dans E ou E' par X respectivement par Y.

Une opération $U(x)$ fait correspondre à toute fonctionnelle linéaire Y définie dans E' une fonctionnelle $X = Y[U(x)]$ définie dans E, aussi linéaire. En effet, il est évident qu'elle est additive. Elle est aussi continue, car on a

$$Y[U(x)] \leqslant \|Y\| . \|U(x)\| \leqslant M\|Y\| . \|x\|.$$

Cette correspondance entre X et Y est une nouvelle opération linéaire

$$X = \overline{U}(Y)$$

définie dans le domaine des fonctionnelles linéaires Y, le contredomaine étant contenu dans l'ensemble des fonctionnelles linéaires X.

On a, en effet, par l'inégalité précedente,

$$\|\overline{U}(Y)\| \leqslant M\|Y\|.$$

Nous l'appellerons *l'opération adjointe* à l'opération $y = U(x)$.

$U(x)$ étant une opération additive, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de l'opération inverse

$$x = U^{-1}(y)$$

est évidemment que l'équation $U(x) = O$ ait lieu seulement pour $x = O$. L'opération inverse est aussi additive. Pour qu'elle soit en outre continue, il faut et suffit que l'on ait

$$\|x\| \leqslant \overline{M}\|y\| \qquad (\overline{M} > 0),$$

pour tout paire des éléments correspondants. On peut donc énoncer le lemme suivant:

Lemme 7. $U(x)$ étant une opération linéaire (ou seulement additive), la condition nécessaire et suffisante, pour l'existence et continuité de l'opération inverse, est qu'il existe un nombre $m>0$, de manière que

$$m\|x\| \leqslant \|U(x)\| \qquad (x \subset E).$$

Lemme 8. Si $U(x)$ est une opération linéaire, dont l'inverse existe et est continue, alors le contredomaine de $U(x)$ (c'est à dire l'image de l'ensemble E) est fermé.

Démonstration. En effet, si $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, où $y_n = U(x_n)$, il vient en vertu du lemme précédent

$$\|x_p - x_q\| \leqslant m\|y_p - y_q\|.$$

Il existe donc $\lim x_n = x$ et on a $U(x) = y$.

Remarque. Si Y_0 est une fonctionnelle-limite d'une suite $\{Y_\xi\}$ du type ϑ, alors $X_0 = \overline{U}(Y_0)$ est évidemment une fonctionnelle-limite de la suite correspondante $\{X_\xi = \overline{U}(Y_\xi)\}$.

Lemme 9. Supposons que l'inverse de l'opération adjointe $X = \overline{U}(Y)$ existe et soit continue.

Si alors L' est un ensemble linéaire des Y faiblement fermé l'ensemble correspondant $\overline{U}(L')$ des X l'est aussi.

Démonstration. En vertu du Lemme 7 il existe un $m>0$ tel que, pour tout Y,

$$m\|Y\| \leqslant \|\overline{U}(Y)\|.$$

Si donc $\{X_\xi\}$ est une suite à normes bornées du type ϑ, contenue dans $\overline{U}(L')$, la suite correspondante $\{Y_\xi\}$, contenue dans L', a aussi les normes bornées, en vertu de $X_\xi = \overline{U}(Y_\xi)$ $(1 \leqslant \xi < \vartheta)$ et de l'inégalité précédente. L'ensemble L' étant faiblement fermé, la suite $\{Y_\xi\}$ admet une fonctionnelle limite $Y_0 \subset L'$. La fonctionnelle $X_0 = \overline{U}(Y_0)$, contenue dans $\overline{U}(L')$, est une fonctionnelle-limite de la suite $\{X_\xi\}$.

Théorème 5. I. Si l'inverse de l'opération adjointe $X = \overline{U}(Y)$ existe et est continue, alors l'équation $y = U(x)$ est soluble pour tout y donné.

II. Si l'équation $X = \overline{U}(Y)$ est soluble pour tout X donné, alors

a) l'inverse de l'opération linéaire $U(x)$ existe et est continue,

b) le contredomaine de l'opération $U(x)$ est l'ensemble des y remplissants la condition $Y(y)=0$ toute fois que $\overline{U}(Y)=0$.

Démonstration. I. Soit y_0 un élément quelconque de E'; désignons par L' l'ensemble des toutes fonctionnelles linéaires Y telles que $Y(y_0)=0$ et par L l'ensemble des fonctionnelles correspondantes $X = \overline{U}(Y)$.

L'ensemble L' étant évidemment faiblement fermé, L l'est aussi (lemme 9).

Soit Y_0 une fonctionnelle linéaire telle que $Y_0(y_0)=1$. L'ensemble L ne contient pas la fonctionnelle $X_0 = \overline{U}(Y_0)$. Il existe donc (théorème 2) un élément x_0 tel que

$$X_0(x_0) = 1, \quad X(x_0) = 0 \qquad (X \subset L).$$

Posons $y_1 = U(x_0)$; on a $Y_0(y_1) = X_0(x_0) = 1$, $Y(y_1) = 0$ $(Y \subset L')$.

Soit maintenant Y une fonctionnelle linéaire quelconque; posons

$$Y' = Y - Y(y_0) \,.\, Y_0.$$

On a $Y'(y_0)=0$, c'est à dire $Y' \subset L'$. Par conséquent, $Y'(y_1)=0$, ou $Y(y_1) - Y(y_0) = 0$, ou encore $Y(y_1 - y_0) = 0$. La fonctionnelle Y étant arbitraire, il vient $y_1 = y_0$, ou $y_0 = U(x_0)$.

II. *a)* Par l'hypothèse toute fonctionnelle X peut être représentée sous la forme $X = Y[U(x)]$. Il résulte de là que l'opération inverse de $U(x)$ existe, car dans le cas contraire toute fonctionnelle X prendrait pour certains deux éléments x les mêmes valeurs, ce qui n'est pas.

Supposons que cette opération inverse n'est pas continue. Il existe alors, en vertu du lemme 7, une suite $\{x_n\}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = +\infty \text{ et } \lim_{n\to\infty} \|y_n\| = 0, \text{ où } y_n = U(x_n).$$

Soit X une fonctionnelle quelconque et Y une fonctionnelle telle que $X = \overline{U}(Y)$; on a

$$\lim_{n\to\infty} X(x_n) = \lim_{n\to\infty} Y(y_n) = 0.$$

Or, la fonctionnelle X étant quelconque, la suite $\{\|x_n\|\}$ doit être bornée (lemme 4), ce qui n'est pas.

II. *b)* Soit y_0 un élément vérifiant l'équation $Y(y_0)=0$ toutes les fois que $\overline{U}(Y)=0$. Désignons par G' le contredomaine de l'opération $U(x)$. C'est un ensemble fermé (lemme 8). Supposons que l'élément y_0 n'est pas contenu dans G'; il existe alors, en vertu d'un théorème analogue au théorème 2 [11]), une fonctionnelle Y_0 telle que $Y_0(y_0)=1$, $Y_0(y)=0$ $(y \subset G')$. Pour l'opération correspondante $X_0=\overline{U}(Y_0)$ il vient

$$X_0(x)=Y_0[U(x)]=0 \quad (x \subset E), \text{ donc } \overline{U}(Y_0)=0,$$

ce qui est impossible, puisque $Y_0(y_0)=1$.

Réciproquement, si $y_0=U(x_0) \subset G'$ et $\overline{U}(Y)=0$, alors $Y[U(x)]=0$ $(x \subset E)$, donc, pour $x=x_0$, il vient $Y(y_0)=0$.

Théorème 6. I. Si l'inverse de l'opération linéaire $y=U(x)$ existe et est continue, alors l'équation $X=\overline{U}(Y)$ est soluble pour tout X donné.

II. Si l'équation $y=U(x)$ est soluble pour tout y donné, alors

a) l'inverse de l'opération adjointe $X=\overline{U}(Y)$ existe et est continue,

b) le contredomaine de l'opération $\overline{U}(Y)$ est l'ensemble des X remplissants la condition $X(x)=0$ toutes les fois que $U(x)=0$.

Démonstration. Elle est tout à fait analogue à celle du théorème précédent. On remplacera dans celle-ci les lettres x, y, X, Y, U, $\overline{U}$ resp. par Y, X, y, x, $\overline{U}$, U et on s'appuiera sur le théorème cité dans le renvoi [11]) au lieu du théorème 2 et réciproquement.

Théorème 7. Si l'opération linéaire $y=U(x)$ définit une représentation biunivoque de l'ensemble E sur tout l'ensemble E', alors l'opération inverse est aussi linéaire.

Démonstration. Il résulte du théorème 6 II *b)* que l'équation $X=\overline{U}(Y)$ est soluble pour tout X donné, parce que $U(x)=0$ est ici équivalent à $x=0$. La continuité de l'opération inverse est donc une conséquence du théorème 5 II *a)*.

[11]) A savoir I, p. 215, Théorème 4.

Théorème 8. Soit E un éspace vectoriel admettant deux normes différentes: $\|x\|$ et $\|x\|_1$, et complet pour chacune d'elles. Supposons encore que $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=0$ entraîne toujours $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|_1=0$. Alors aussi $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|_1=0$ entraîne toujours $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=0$, c'est à dire: les deux normes donnent lieu à la même définition de convergence, ou encore: il existent deux nombres m, M $(0<m<M)$ tels que

$$m \leqslant \frac{\|x\|_1}{\|x\|} \leqslant M,$$

pour tout $x \neq O$.

Démonstration. On l'obtient comme application immédiate du théorème précédent en prenant pour les ensembles E, E' le même ensemble E normé suivant la première resp. la seconde norme et en définissant la correspondance par l'équation $y=x$.

Nous avons l'intention de publier dans le prochain volume de ces Studia une troisième communication sur les questions auxquelles étaient consacrées les deux premières.

(Reçu par la Rédaction le 6. VI. 1929).